

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

# UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

## THÈSE

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II**

SPÉCIALITÉ : **INFORMATIQUE**

École doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée par

**Thomas FERNIQUE**

## **Pavages, Fractions Continues et Géométrie Discrète**

Soutenance prévue le 13 Décembre 2007, devant le jury composé de :

M. Jean-Claude BAJARD, Professeur, Univ. Montpellier 2 ..... Examineur  
Mme Valérie BERTHÉ, Directrice de recherche CNRS, LIRMM ..... Directrice de thèse  
M. Srečko BRLEK, Professeur, Univ. du Québec à Montréal ..... Examineur M. Bruno  
DURAND, Professeur, Univ. de Provence ..... Examineur  
M. Bruno GAUJAL, Directeur de recherche INRIA, LIG ..... Rapporteur  
M. Jacques-Olivier LACHAUD, Professeur, Univ. de Savoie ..... Rapporteur  
M. Laurent VUILLON, Professeur, Univ. de Savoie ..... Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte et contenu</b>	<b>7</b>
1.1 Combinatoire des mots et géométrie discrète . . . . .	7
1.1.1 Mots, groupe libre et morphismes . . . . .	7
1.1.2 Mots sturmiens et fractions continues . . . . .	10
1.1.3 Reconnaissance de droite discrète . . . . .	16
1.2 Extension en dimensions supérieures . . . . .	22
1.2.1 Pavages . . . . .	23
1.2.2 Substitutions . . . . .	24
1.2.3 Fractions continues multi-dimensionnelles . . . . .	26
1.2.4 Reconnaissance de plan discret . . . . .	28
1.3 Un petit détour par la physique théorique . . . . .	29
1.4 Résultats principaux . . . . .	34
<b>2 Applications duales</b>	<b>37</b>
2.1 Construction d'une application duale . . . . .	37
2.1.1 Relèvement d'un morphisme . . . . .	37
2.1.2 Dual d'un relèvement . . . . .	40
2.2 Définition générale et propriétés élémentaires . . . . .	42
<b>3 Développement de plan en escalier</b>	<b>47</b>
3.1 Plan en escalier . . . . .	47
3.1.1 Définition . . . . .	47
3.1.2 Image par une application duale . . . . .	49
3.2 Développement de Brun d'un vecteur . . . . .	51
3.2.1 Algorithme de Brun vectoriel . . . . .	52
3.2.2 Formulation matricielle . . . . .	54
3.3 Développement de Brun d'un plan . . . . .	55
3.3.1 Substitutions de Brun . . . . .	55
3.3.2 Paliers d'un plan . . . . .	56
3.3.3 Algorithme de Brun géométrique . . . . .	59

<b>4</b>	<b>Flips : des plans aux surfaces</b>	<b>61</b>
4.1	Surfaces en escalier . . . . .	61
4.1.1	Pavages canoniques de codimension un . . . . .	61
4.1.2	Propriétés élémentaires . . . . .	63
4.2	Flips . . . . .	66
4.2.1	Flip-accessibilité . . . . .	66
4.2.2	Pseudo-flip-accessibilité . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Développement de surface en escalier</b>	<b>75</b>
5.1	Action des applications duales . . . . .	75
5.1.1	Cas général . . . . .	75
5.1.2	Cas positif . . . . .	78
5.2	Développement de Brun d'une surface . . . . .	79
5.2.1	Surface cohérente . . . . .	79
5.2.2	Algorithme de Brun géométrique . . . . .	80
5.3	Développements communs . . . . .	83
5.3.1	Quasi-plan en escalier . . . . .	83
5.3.2	Une condition nécessaire . . . . .	86
5.3.3	Cas réductible . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Génération et reconnaissance de plan</b>	<b>93</b>
6.1	Morceau de plan et application duale . . . . .	94
6.2	Génération de plan . . . . .	97
6.2.1	Plan substitutif . . . . .	97
6.2.2	Périodes Pisot . . . . .	100
6.2.3	Plan rationnel . . . . .	102
6.3	Reconnaissance de plan . . . . .	105
6.3.1	Principe . . . . .	105
6.3.2	Reconnaissabilité . . . . .	107
6.3.3	$\beta_{a,i}$ -pavabilité . . . . .	110
6.3.4	Un algorithme hybride . . . . .	112
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>

# Introduction

Un problème de pavage auquel chacun a pu se confronter est celui du *puzzle* : étant donné un ensemble de pièces (appelées aussi *tuiles*), comment les assembler en respectant les *contraintes locales* imposées par l'imbrication des pièces (due à leur découpe) et la continuité des couleurs (deux pièces devant être de même couleur là où elles se touchent) ? Le respect de ces contraintes conduit à obtenir, à une échelle plus globale, l'image finale promise. Sous l'aspect récréatif de cet exemple apparaît une question fondamentale de la théorie des pavages : comment des contraintes locales (ici l'assemblage des pièces) engendrent-elles une contrainte globale (l'image finale) ? Un exemple célèbre est celui du pavage de Penrose, introduit dans [86], qui est obtenu à partir de deux tuiles en forme de losange, qui ont la propriété remarquable de ne pouvoir paver le plan euclidien que de manière apériodique *apériodique*, c'est-à-dire sans qu'il n'existe aucune invariance par une translation non triviale<sup>1</sup>. La figure 1 illustre cela.

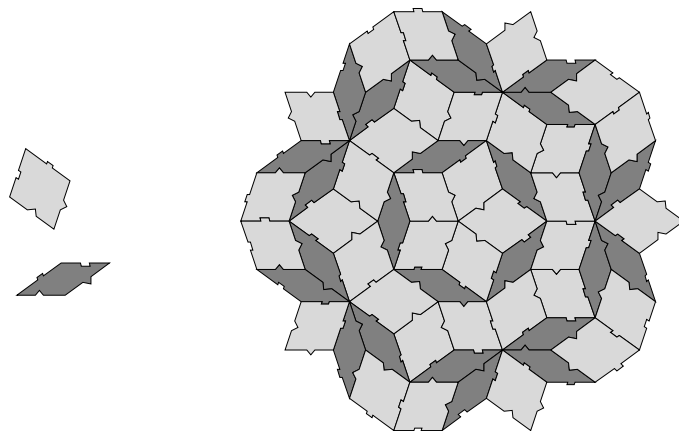


FIG. 1 – Deux tuiles (à gauche) et un exemple de pavage fini qu'elles permettent de réaliser (à droite – les tuiles pouvant être tournées). Il s'agit d'un morceau du célèbre pavage de Penrose. Soulignons que les contraintes locales (ergots sur les côtés des tuiles) entraînent une contrainte globale : aucun pavage du plan par ces tuiles n'est invariant par translation, c'est-à-dire qu'ils sont tous *apériodiques*.

---

<sup>1</sup>Ce pavage a d'ailleurs été inventé pour une entreprise fabriquant de véritables puzzles !

Ce problème de *transfert d'information* a été à l'origine de la théorie moderne des pavages, laquelle s'est depuis développée dans de nombreuses directions. Par exemple, en informatique théorique, les pavages ont notamment été étudiés pour le problème de *décidabilité* suivant, posé par Wang dans [111] : existe-t-il un programme qui, étant donné n'importe quel ensemble fini de tuiles, détermine s'il est possible de paver le plan avec ces tuiles ? La réponse s'est avérée négative à cause de l'existence d'ensembles de tuiles ne pouvant paver qu'apériodiquement le plan (voir, par exemple, [2, 13, 37, 46, 45, 97] et, bien sûr le cas de la figure 1). Parallèlement, les pavages ont été étudiés d'un point de vue plus mathématiques, notamment comme *systèmes dynamiques symboliques* particuliers, suffisamment simples pour être étudiés sans être pour autant trop simples (voir, par exemple, []). Enfin, en physique, les pavages servent à modéliser la structure de la matière, notamment des *quasi-cristaux*, dont la découverte expérimentale récente a contribué à relancer fortement l'intérêt porté aux pavages (voir, par exemple, [103]).

Outre cela, dans le cas particulier de la dimension un, il existe un lien fort entre pavages, fractions continues et géométrie discrète. Esquignons-en ici les idées principales. Notons d'abord que, dans ce cadre, les pavages sont des pavages de la droite, qui peuvent aussi être vus comme des mots (à chaque tuile correspond une lettre). On peut alors discrétiser une courbe du plan par une ligne brisée composée de segments unité, puis coder cette ligne brisée par un mot (chaque lettre codant un segment unité de direction particulière). Les outils de la combinatoire des mots que sont les morphismes ou les substitutions permettent alors d'agir sur ces codages de courbes discrètes. En particulier, on peut calculer le développement en fraction continue de la pente  $\alpha$  d'une droite discrète (c'est-à-dire de la pente de la droite réelle qu'elle approxime) de manière géométrique. En effet, sans supposer  $\alpha$  connu, on détermine sa partie entière  $[\alpha]$  simplement à partir des motifs du mot codant la droite, et on applique une transformation adéquate afin d'obtenir une droite de pente  $T(\alpha)$ , où  $T$  est l'application de Gauss utilisée pour calculer le développement en fraction continue d'un réel. Itérer ceci donne une suite de mots codant des droites discrètes permettant de calculer le développement en fraction continue de  $\alpha$ . On peut ensuite étendre cela aux mots codant n'importe quelle courbe discrète : à partir des motifs d'un tel mot, on calcule en procédant similairement un développement en fraction continu. Soulignons qu'il n'est pas clair de quel réel on calcule ainsi le développement, puisque la notion de pente n'est pas définie pour une courbe générale. Cependant, on montre que ce procédé permet de déterminer si la courbe discrète codée par un mot donné est une droite ou non : on parle de *reconnaissance de droite*. Soulignons que c'est problème fondamental en géométrie discrète, lié à la vectorisation (ou polygonalisation) d'objets discrets : comment décomposer une courbe discrète complexe en un ensemble de morceaux de droites discrètes, plus simple à stocker. Il s'agit d'un problème très étudié (voir, par exemple, le survol [78]).

En dimensions supérieures, un tel lien entre pavages, fractions continues et géométrie discrète n'a jamais, à notre connaissance, été développé. Pourtant, d'une part, de nombreuses extensions multi-dimensionnelles des fractions continues ont été étudiées (voir, par exemple, [22, 102]), d'autre part, le problème de la *reconnaissance de plan* a reçu beaucoup d'attention en géométrie discrète (voir, par exemple, le récent survol [23]). Développer un tel lien est l'objectif principal de cette thèse. La suite de ce document est organisée comme suit.

Au chapitre 1, nous reprenons plus en détail le lien esquissé ci-dessus entre pavages unidimensionnels (ou mots), fractions continues et géométrie discrète. Notons que si la formulation retenue (notamment l'utilisation de morphismes et de substitutions) semble nouvelle, les idées exposées dans ce chapitre sont déjà connues. On passe ensuite en revue les différentes extensions multi-dimensionnelles des concepts utilisés dans le cas unidimensionnel (pavages, substitutions, fractions continues, reconnaissance de plan). À la lumière de ceci, on conclut ce chapitre par une description plus précise des résultats principaux de cette thèse.

Le chapitre 2 est consacré à la notion d'*application duale* d'une substitution ou d'un morphisme (on parle aussi de *substitution généralisée*). Il s'agit de transformations sur les pavages généralisant les substitutions et morphismes définis sur les mots (voir Fig. 2). La présentation commence par reprendre la construction donnée par P. Arnoux et S. Ito dans [6] et étendue par H. Ei dans [48], avant de proposer une définition légèrement plus générale. Soulignons que ces applications duales, malgré une relative complexité qui peut rebuter au premier abord, jouent un rôle absolument primordial dans toute cette thèse.

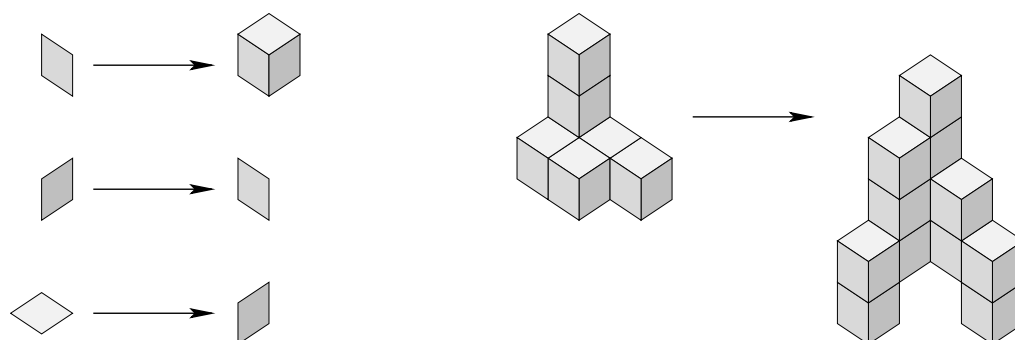


FIG. 2 – Action d'une application duale sur quelques tuiles, appelées aussi *faces* (à gauche) et sur un ensemble de tuile un peu plus grand (à droite).

Les premiers résultats propres à cette thèse sont exposés au chapitre 3. On reprend la notion de *plan en escalier*, initialement introduite par L. Vuillon dans [110],

qui peut être vu comme un type de pavage particulier, et dont on montre le lien avec la notion de *plan arithmétique discret* telle qu'introduite par J.-P. Réveilles dans [95] (voir Fig. 3, à gauche). On caractérise alors l'action des applications duales sur les plans en escaliers. Plus précisément, nous donnons une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'image d'un plan en escalier par l'application duale d'un morphisme soit un plan en escalier (Th. 3.4). En particulier, cette condition s'avère être toujours réalisée dans le cas d'une application duale d'une substitution. Ceci complète un premier résultat dans cette direction, donné dans [6], qui considérait le cas d'une application duale de substitution laissant invariant un plan en escalier, montrant que cette application était stable sur les morceaux de ce plan en escalier. Nous avons publié ce résultat d'abord dans la conférence [52] dans un cas particulier d'application duale de substitution, puis dans l'article [55] dans le cas d'une application duale substitution quelconque. Enfin, l'article [15] (soumis) traite le cas plus général d'une application duale de morphisme. La suite du chapitre montre alors comment utiliser l'algorithme de Brun – une extension multi-dimensionnelle particulière de l'algorithme de fraction continue classique (Euclide) – pour calculer le développement du vecteur normal d'un plan en escalier *directement* sur ce plan. On parle, par abus, du *développement* de ce plan. Plus précisément, on calcule ce développement sans supposer connu le vecteur normal du plan en escalier en question, mais simplement en déduisant des configurations locales de ce plan les informations suffisantes à calculer ce développement. Une classe spéciale d'applications duales est utilisée à cette fin, ainsi que la notion de *palier*, que nous introduisons en généralisant une notion similaire définie pour les droites discrètes (voir Fig. 3, à gauche).

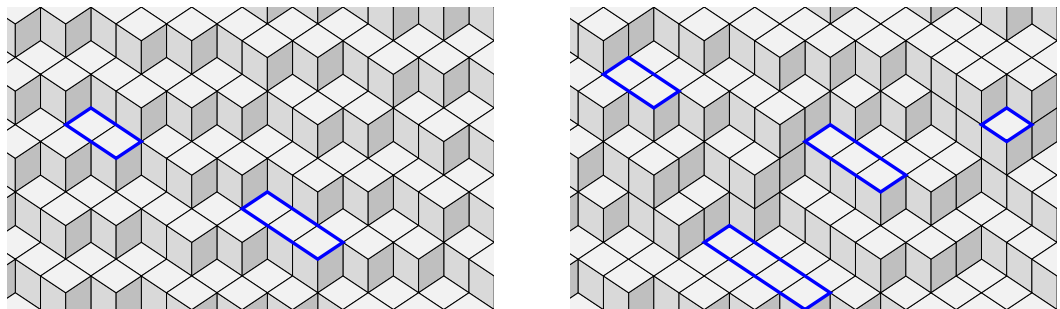


FIG. 3 – Un *plan en escalier* (à gauche) ou une *surface en escalier* (à droite) peuvent être vus, dans l'espace, comme des discrétisations de plan ou de surface réels, et dans le plan comme des pavages (par losanges). La notion de *paliers* (quelques exemples sont ici encadrés) permet de lire une information qui peut être reliée, dans le cas d'un plan en escalier, à son vecteur normal (le cas d'une surface en escalier étant plus difficile à interpréter).

Le chapitre 4 joue le rôle de charnière entre le chapitre 3 et le chapitre 5. On commence par rappeler la notion de *surface en escalier*, introduite par D. Jamet dans [70] et on montre quelques propriétés élémentaires associées. Intuitivement, une surface en escalier peut être vue soit comme un pavage de  $\mathbb{R}^{d-1}$  soit, en la “relevant à la Thurston” (voir [107]) comme une discrétisation d’une surface de  $\mathbb{R}^d$ . On introduit alors la notion de *flip* (voir Fig. 4). Le *flip* est utilisé en physique, notamment en mécanique statistique et dans l’étude de la formation des cristaux ou quasi-cristaux (ce terme sera défini au chapitre 1), pour modéliser les réarrangements locaux d’atomes. Dans le contexte des plans et surfaces en escalier, le flip s’avère une notion utile pour relier les premiers aux seconds, comme nous l’avons d’abord exposé dans [54]. En particulier, on montre que toute surface en escalier peut être obtenue comme une suite de flips effectués sur un plan en escalier (Th. 4.16). Nous avons publié ce résultat dans l’article [3]. Par ailleurs, mettant à profit le côté formel des plans et surfaces en escalier (par rapport aux cristaux, par exemple), on introduit une variante moins contrainte du flip, appelée *pseudo-flip*. Sans entrer ici dans les détails, soulignons simplement que cette notion permet des preuves plus faciles de résultats similaires (Th. 4.20 et 4.21). Nous avons décrit la notion de pseudo-flip et prouvé les résultats correspondants dans l’article [15] (soumis).

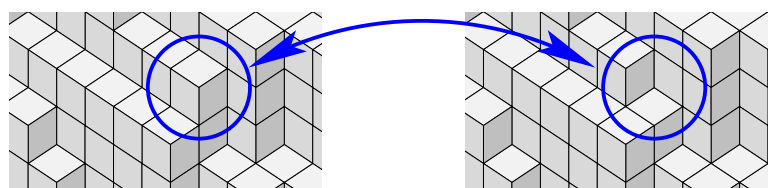


FIG. 4 – Un *flip* est une transformation local sur les surfaces en escalier. On peut le voir comme l’ajout ou la suppression d’un cube unité dans l’espace, ou comme un échange de tuiles dans le plan.

Le chapitre 5 est en quelque sorte l’extension du chapitre 3 au cas des surfaces en escalier. On commence par caractériser l’action des applications duales sur les surface en escalier. Plus précisément, nous donnons une condition nécessaire et suffisante simple pour que l’image d’un plan en escalier par l’application duale d’un morphisme soit un plan en escalier (Th. 5.3). Ce résultat a été publié dans [3] dans le cas d’une application duale d’une substitution, puis détaillé dans [15] (soumis), dans le cas général d’une application duale d’un morphisme. On montre ensuite que le procédé consistant à calculer le développement d’un plan à partir de configurations locales – les *paliers* – peut être étendu aux surfaces en escalier, ceci bien

qu'une surface en escalier n'ait généralement pas de vecteur normal, contrairement à un plan en escalier. Une question naturelle est alors de savoir quelles surfaces en escalier ont le même développement qu'un vecteur réel donné, outre le plan en escalier qui a ce vecteur pour vecteur normal. Une réponse en termes de *quasi-plan en escalier* est apportée (Th. 5.14 et 5.21). Une version partielle de ce résultat se trouve dans l'article [15] (soumis).

Au chapitre 6 (le dernier), on montre comment appliquer les résultats des chapitres précédents en géométrie discrète, plus précisément en ce qui concerne les problèmes de la génération et de la reconnaissance de plans discrets (rôle joué par les plans en escalier). On expose trois techniques différentes pour engendrer un plan en escalier. La première consiste à itérer une application duale sur un morceau fini de plan en escalier, et à engendrer ainsi – sous certaines conditions – des morceaux de plus en plus grands de ce plan (Th. 6.9). Ce résultat a été publié dans [55]. La seconde technique repose sur les résultats du chapitre 5 : en itérant une application duale adéquate sur une surface en escalier, on obtient – sous certaines conditions – une suite de surfaces en escalier convergeant vers le plan en escalier désiré (Th. 6.10). Enfin, la dernière technique consiste à engendrer un plan dont le vecteur normal a des coordonnées rationnelles à partir d'un *domaine fondamental*, c'est-à-dire d'un morceau de plan fini engendrant tout ce plan par périodicité. On montre comment construire un domaine fondamental de taille minimal grâce aux applications duales associées au développement en fraction continues du vecteur normal du plan que l'on veut engendrer (6.14). Ce résultat a été récemment soumis, dans [56]. En ce qui concerne la reconnaissance de plan, on décrit un algorithme qui généralise la méthode de reconnaissance de droite esquissée plus haut : on calcule le développement d'une surface en escalier (en fait, plus généralement, de ce qu'on appellera *fonction binaire*) et on en déduit sa nature – plan en escalier ou non (Th. 6.25). La complexité d'un tel algorithme est discutée, bien que nous ne proposons pour l'instant qu'une borne théorique sans doute très large. Ce résultat a également été récemment soumis, dans [56].

Nous concluons ce mémoire par un bref chapitre consacré à décrire quelques résultats obtenus pendant cette thèse mais non présentés dans les chapitres précédents. Ces résultats posent les jalons de futures recherches liées à la problématique de cette thèse. Soulignons que certains d'entre eux ont déjà été publiés (voir [20, 21, 51, 53, 57]).

# Chapitre 1

## Contexte et contenu

### 1.1 Combinatoire des mots et géométrie discrète

#### 1.1.1 Mots, groupe libre et morphismes

Ce paragraphe rappelle brièvement les concepts de base de la combinatoire des mots. Le lecteur intéressé par une introduction plus détaillée (notamment en ce qui concerne des références historiques) pourra, par exemple, se référer au premier chapitre de [82], ou aux livres [92, 94].

Un *alphabet*  $\mathcal{A}$  est un ensemble, supposé fini ici, de symboles appelés lettres. Sans restriction de généralité, on peut supposer  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ . Un *mot*  $w$  de longueur  $k$  sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  est alors une *concaténation* de  $k$  lettres  $a_1, \dots, a_k$  de  $\mathcal{A}$ , notée  $w = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$  ou  $w = a_1 a_2 \cdots a_k$ . On note  $|w|$  la longueur de  $w$  et  $|w|_i$  le nombre d'occurrences de la lettre  $i$  dans le mot  $w$ . Par exemple,  $w = 12112$  est un mot de longueur 5 sur l'alphabet  $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ , et on a  $|w|_1 = 3$  et  $|w|_2 = 2$ . Plus généralement, la concaténation de deux mots  $u$  et  $v$  est le mot noté  $u \cdot w$  ou  $uv$  : c'est la concaténation des lettres de  $u$  et de celle de  $v$ . On note alors  $u^k$  la concaténation de  $k$  copies du mot  $u$ . Enfin, on note  $\varepsilon$  le mot vide, c'est-à-dire tel que  $w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$ . Tout ce qui précède confère une structure de *monoïde* à l'ensemble des mots sur  $\mathcal{A}$  : on note  $\mathcal{A}^*$  ce monoïde. Soulignons qu'on peut aussi considérer les concaténations infinies de lettres, appelées mots infinis : on note  $\mathcal{A}^\omega$  l'ensemble des mots finis et infinis.

Introduisons encore quelques notions classiques en combinatoire des mots. Un mot  $v$  est un *facteur* d'un mot  $w$  s'il existe deux mots  $u_1$  et  $u_2$  tels que  $w = u_1 v u_2$ . Si, de plus,  $u_1 = \varepsilon$  (resp.  $u_2 = \varepsilon$ ), on dit que  $v$  est un *préfixe* (resp. *suffixe*) de  $w$ . On note  $L_k(w)$  l'ensemble des facteurs de longueur  $k$  de  $w$  et  $L(w)$  l'ensemble de tous les facteurs de  $w$ . L'ensemble  $L(w)$  est appelé le *langage* de  $w$ . Par exemple,

on calcule :

$$L(12112) = \{\varepsilon, 1, 2, 12, 21, 11, 121, 211, 112, 1211, 2112, 12112\}.$$

Ceci permet, par exemple, de comparer des mots en comparant leurs langages (soulignons que deux mots infinis ayant le même langage ne sont pas forcément égaux).

Une autre façon de comparer les mots est d'introduire une *distance* sur l'ensemble des mots finis ou infinis. Plus précisément, on dit que deux mots sont à distance  $2^{-n}$  si leur plus grand préfixe commun est de taille  $n$ . Par exemple, les mots 12112 et 12122 sont à distance  $2^{-3}$  car leur plus grand préfixe commun est le mot 121, de longueur 3. Notons que cette notion de distance permet aussi de parler de *convergence*. Par exemple, la suite de mots  $((12)^n)_{n \geq 0}$  converge vers le mot infini noté  $(12)^\omega$ , qui commence par la lettre 1 et alterne les lettres 1 et 2.

Ce qui précède a donc permis d'introduire la notion de mot, ainsi que le monoïde associé. On peut alors vouloir inclure les mots dans un ensemble plus grand ayant une structure de groupe. Plus précisément, le *groupe libre sur  $d$  éléments*, noté  $F_d$ , est le groupe engendré par l'alphabet  $\{1, \dots, d\}$  pour la loi de concaténation, avec le mot vide  $\varepsilon$  comme élément neutre. Les éléments de  $F_d$  sont donc les concaténations de lettres de  $\{1, \dots, d\}$  élevées à des puissances de  $\mathbb{Z}$ , les mots correspondant au cas particulier où toutes ces puissances sont positives. Soulignons qu'un élément de  $F_d$  admet plusieurs écritures : on appelle *écriture réduite* celle où aucune lettre n'est directement suivie de son inverse. On note  $|w|_i$  la somme des puissances des occurrences de la lettre  $i$  dans  $w$  (on vérifie facilement que cette valeur ne dépend pas de l'écriture choisie). Par exemple,  $w = 2^{-1}1211^{-1}$  est un élément de  $F_d$  dont l'écriture réduite est  $w = 2^{-1}12$ ; on a  $|w|_1 = 1$  et  $|w|_2 = 1 - 1 = 0$ .

Tant la structure de monoïde que celle de groupe libre conduisent naturellement à la notion de morphisme. Par exemple, on définit un endomorphisme  $\tau$  du groupe libre à deux éléments  $F_2$  par :

$$\tau : \begin{cases} 1 & \mapsto 2, \\ 2 & \mapsto 2^{-1}1, \end{cases}$$

et on calcule :

$$\tau(12^21^{-1}) = \tau(1)\tau(2)^2\tau(1)^{-1} = 22^{-1}12^{-1}12^{-1} = 12^{-1}12^{-1}.$$

Un morphisme tel que les images de chaque lettre ne contiennent que des puissances positives de lettres est dit *positif* (en particulier, c'est le cas des endomorphismes du monoïde des mots). Si, de plus, il n'envoie aucune lettre sur l'élément neutre  $\varepsilon$ , c'est-à-dire s'il est *non-effaçant*, on parle de *substitution*. Par exemple, le morphisme suivant est une substitution :

$$\sigma : \begin{cases} 1 & \mapsto 12 \\ 2 & \mapsto 1 \end{cases}$$

Enfin, un morphisme  $\sigma$  est un *automorphisme* s'il existe un morphisme noté  $\sigma^{-1}$  tel que  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$ . Par exemple, les morphismes  $\tau$  et  $\sigma$  définis plus haut sont des automorphismes puisqu'on vérifie qu'ils sont inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned}\sigma \circ \tau(1) &= \sigma(2) = 1, \\ \sigma \circ \tau(2) &= \sigma(2^{-1}1) = \sigma(2)^{-1}\sigma(1) = 1^{-1}12 = 2, \\ \tau \circ \sigma(1) &= \tau(12) = \tau(1)\tau(2) = 22^{-1}1 = 1, \\ \tau \circ \sigma(2) &= \tau(1) = 2.\end{aligned}$$

Une notion importante associée aux morphismes est celle de *matrice d'incidence*. Rappelons d'abord que l'*application de Parikh*, notée  $\mathbf{f}$ , est l'application du groupe libre  $F_d$  dans  $\mathbb{Z}^d$  définie par :

$$\mathbf{f}(w) = (|w|_1, \dots, |w|_d). \quad (1.1)$$

Par exemple, on calcule :

$$\mathbf{f}(2^{-1}1211^{-1}) = \mathbf{f}(2^{-1}12) = (1, 0).$$

La matrice d'incidence d'un morphisme  $\sigma$  est alors la matrice entières  $d \times d$ , notée  $M_\sigma$ , dont la  $i$ -ème colonne est le vecteur  $\mathbf{f}(\sigma(i))$ . Par exemple, les morphismes  $\tau$  et  $\sigma$  précédemment définis ont pour matrices d'incidences :

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il découle de cette définition que, pour tout élément  $w \in F_d$ , on a :

$$\mathbf{f}(\sigma(w)) = M_\sigma \mathbf{f}(w). \quad (1.2)$$

On vérifie aussi facilement que pour tous morphismes  $\sigma$  et  $\tau$ , on a :

$$M_{\sigma \circ \tau} = M_\sigma M_\tau. \quad (1.3)$$

On en déduit que la matrice d'incidence d'un morphisme inversible  $\sigma$  est l'inverse de la matrice d'incidence de  $\sigma^{-1}$ , puisqu'on a :

$$M_\sigma M_\sigma^{-1} = Id = M_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = M_\sigma M_{\sigma^{-1}}.$$

En particulier, la matrice d'incidence d'un automorphisme a pour inverse une matrice à coefficients entiers : elle appartient donc au groupe multiplicatif  $GL(d, \mathbb{Z})$ , qui est le groupe des matrices à coefficients entiers et à déterminant égal à  $\pm 1$ . Il n'est pas difficile de voir que la réciproque est fautive. Par exemple, on vérifie que le morphisme suivant n'est pas inversible, bien que sa matrice d'incidence ait un déterminant égal à 1 :

$$\rho : \begin{cases} 1 \mapsto 121, \\ 2 \mapsto 21. \end{cases}$$



La définition la plus connue d'un mot sturmien est sans doute la suivante : un mot sturmien est un mot infini sur deux lettres qui, pour tout  $n$ , admet exactement  $n + 1$  facteurs distincts de taille  $n$ . Cette définition combinatoire, donnée par Coven et Hedlund dans [33], est équivalente à de nombreuses autres définitions, notamment en termes de mot *balancé*, de discrétisation de droite ou de codage de rotation (voir, par exemple, le survol historique détaillé dans les notes du second chapitre de [82]). Notons que le mot infini donné par l'équation (1.4) semble<sup>1</sup> sturmien puisqu'on calcule :

$$\begin{aligned} L_1(u) &= \{1, 2\}, \\ L_2(u) &= \{12, 21, 11\}, \\ L_3(u) &= \{121, 212, 211, 112\}, \\ L_4(u) &= \{1212, 2121, 1211, 2112, 1121\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

On verra plus tard qu'il est effectivement sturmien. Avant ceci, détaillons un peu les définitions équivalentes données en termes de codage de rotation ou de discrétisation de droite.

Soit  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le tore unidimensionnel. La rotation d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$  est l'application  $R_\alpha$  de  $\mathbb{T}$  dans lui-même qui à un point  $\rho$  associe le point  $\rho + \alpha$ . Considérons la partition du tore  $\mathbb{T}$  formée des deux intervalles  $[0, \alpha[$  et  $[\alpha, 1[$ . La *trajectoire* (ou *orbite*) d'un point  $\rho$  du tore, c'est-à-dire la suite  $(R_\alpha^n(\rho))_n$ , est alors codée par le mot  $u_{\alpha, \rho}$  dont la  $n^{\text{ème}}$  lettre vaut 1 si  $R_\alpha^n(\rho) \in [0, \alpha[$ , et 2 sinon. Un tel mot est aussi appelé *mot de Christoffel* ([32]). Il n'est pas difficile de voir qu'il est périodique si et seulement si  $\alpha$  est rationnel, le cas irrationnel correspond alors aux mots sturmiens. Par exemple, on montre que le mot de Fibonacci donné à l'équation (1.4) code une rotation d'angle  $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0.618$ , et est donc sturmien (voir, par exemple, le chapitre 5 de [92]). De plus, on déduit facilement de cette définition que tout mot sturmien  $u$  (ou même tout mot de Christoffel) possède des *fréquences*, c'est-à-dire que, pour tout lettre  $i$ , la limite suivante existe :

$$\text{freq}_i(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|_i}{n},$$

où  $u_n$  désigne le préfixe de taille  $n$  de  $u$ . Plus précisément, les fréquences d'apparition des lettres 1 et 2 sont proportionnelles à la taille des intervalles  $[0, \alpha[$  et  $[\alpha, 1[$  :

$$\text{freq}_1(u_{\alpha, \rho}) = \frac{1}{1 + \alpha} \quad \text{et} \quad \text{freq}_2(u_{\alpha, \rho}) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

Par exemple, environ 61.8% des lettres du mot de Fibonacci (Eq. (1.4)) sont des 1.

---

<sup>1</sup>Du moins si l'on se réfère à la partie forcément finie qui en est donnée

On peut aussi définir les mots sturmiens (ou mots de Christoffel) de façon plus géométrique, comme étant des codages de discrétisations de droites. C'est surtout cette définition qui guidera notre intuition dans le reste de la thèse. Il y a plusieurs définitions similaires, nous n'en détaillons ici qu'une seule. Considérons, dans le plan euclidien, une droite réelle pente  $\alpha$ . Sans restriction de généralité, on suppose  $\alpha \in [0, 1]$  (les autres cas de figure s'y ramenant par des symétries simples). On peut alors approximer cette droite par la ligne brisée que forme la frontière de l'union des carrés unités de sommets dans  $\mathbb{Z}^2$  qui intersectent le demi-plan situé sous cette droite. La figure 1.1 illustre cela.

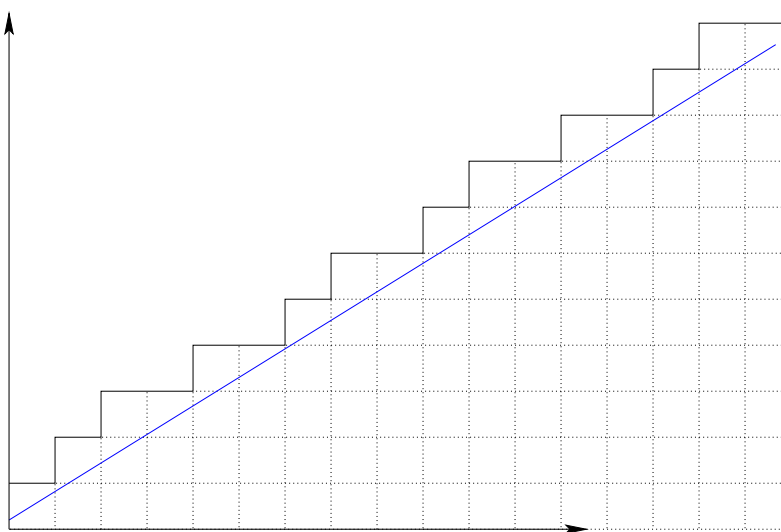


FIG. 1.1 – Discrétisation d'une droite de pente  $(\sqrt{5}-1)/2$  par la frontière de l'union des carrés unités intersectant le demi-plan sous la droite (représentés en pointillés). Cette discrétisation est une ligne brisée formée de deux types de segments.

Il est ensuite facile de coder une telle discrétisation de droite par un mot : il suffit de coder les segments horizontaux et verticaux respectivement par la lettre 1 et 2 (on parle de *code de Freeman* ou de *chain code*). Par exemple, le mot associé à la discrétisation représentée sur la figure 1.1 est, encore une fois, le mot de Fibonacci précédemment défini (son intercept est  $(\sqrt{5}-1)/2$ , comme sa pente). On montre que la droite de pente  $\alpha$  et d'intercept  $\rho$  (la hauteur à l'origine) est codée par le mot sturmien  $u_{\alpha,\rho}$  défini plus haut comme un codage de rotation (voir, par exemple, [84] ou le second chapitre de [82]).

Maintenant que nous avons rappelé quelques définitions des mots sturmiens, intéressons-nous à l'action des substitutions et des morphismes sur ces mots. On montre facilement, par exemple en raisonnant sur les fréquences, que pour une

substitution unimodulaire<sup>2</sup>  $\sigma$  et un mot sturmien  $u_{\alpha,\rho}$ , on a :

$$\sigma(u_{\alpha,\rho}) = u_{\beta,\rho/\lambda} \quad \text{où} \quad \lambda(1,\beta) = M_\sigma(1,\alpha). \quad (1.5)$$

En particulier, ceci montre que si un mot sturmien  $u_{\alpha,\rho}$  est point fixe d'une substitution, alors  $(1,\alpha)$  est un vecteur propre de la matrice d'incidence  $M_\sigma$  de  $\sigma$ . On en déduit que  $\alpha$  est un nombre quadratique, c'est-à-dire la solution d'un polynôme entier de degré 2. Par exemple, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que  $(1, (\sqrt{5}-1)/2)$  est bien un vecteur propre de la matrice d'incidence de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 1$  dont le mot de Fibonacci est un point fixe (voir paragraphe précédent). Une question naturelle est alors de savoir si c'est la réciproque est vraie. La première réponse a été apportée par [36], qui montre :

**Théorème 1.1 ([36])** *Un mot sturmien  $u_{\alpha,\alpha}$  est point fixe d'une substitution si et seulement si sa pente  $\alpha$  est un nombre de Sturm, c'est-à-dire un irrationnel quadratique dont le conjugué algébrique n'appartient pas à l'intervalle  $[0, 1]$ .*

Rappelons qu'un nombre est quadratique si c'est une racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients entiers, son conjugué algébrique étant alors l'autre racine de ce polynôme. Par exemple,  $(\sqrt{5}-1)/2$  est quadratique car c'est une racine irrationnelle de  $X^2 + X - 1$  dont le conjugué algébrique  $(-\sqrt{5}-1)/2$  n'appartient pas à  $[0, 1]$ . On en déduit que le mot de Fibonacci  $u_{(\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}-1)/2}$  est un point fixe d'une substitution (ce qu'on savait déjà). Plus généralement, il a été prouvé dans [114] :

**Théorème 1.2 ([114])** *Un mot sturmien  $u_{\alpha,\rho}$  est substitutif si et seulement si sa pente  $\alpha$  est un nombre irrationnel quadratique et son intercept  $\rho$  appartient à l'extension de corps  $\mathbb{Q}(\alpha)$ .*

Rappelons que l'extension de corps  $\mathbb{Q}(\alpha)$  n'est rien d'autre que les réels de la forme  $p + q\alpha$ , où  $p$  et  $q$  sont des rationnels. Les preuves de ces théorèmes sont relativement techniques. Montrons ici un résultat un peu moins général dont la preuve est plus simple mais donne une bonne idée des techniques utilisées pour prouver les résultats ci-dessus. Ce résultat annonce également un résultat analogue en dimension supérieure obtenu au chapitre 6. Plus précisément, montrons la proposition suivante :

**Proposition 1.3** *Si  $\alpha$  est un nombre irrationnel quadratique réduit, c'est-à-dire dont le conjugué algébrique est strictement inférieur à  $-1$ , alors le mot sturmien  $u_{\alpha,0}$  est point fixe d'une substitution.*

<sup>2</sup>Rappelons qu'un morphisme est unimodulaire si sa matrice d'incidence a  $\pm 1$  pour déterminant.

Rappelons d'abord brièvement la notion de fraction continue (pour un exposé plus détaillé, le lecteur peut se référer, par exemple, à [75]). L'application de Gauss est l'application  $T : ]0, 1] \rightarrow [0, 1]$  définie par :

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

On associe alors à tout réel  $\alpha \in [0, 1]$  une suite d'entier  $(a_n)_{n \geq 1}$ , définie tant que  $T^n(\alpha) \neq 0$  par :

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n+1}(\alpha)} \right\rfloor.$$

On voit alors facilement qu'on a :

$$\alpha = \frac{1}{a_0 + T(\alpha)} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + T^2(\alpha)}} = \dots$$

Ceci explique le terme de *développement en fraction continue* donné à la suite  $(a_n)_n$ . Il est commode d'introduire la notation suivante :

$$[a_1] = \frac{1}{a_1} \quad \text{et} \quad [a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_n]}.$$

Par exemple, on a :

$$[7, 15, 1] = \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 16/113 = 0,14159292.$$

On montre alors que si  $\alpha \in [0, 1]$  est rationnel, alors il a un développement en fraction continue fini  $(a_n)_{1 \leq n \leq N}$  tel que  $\alpha = [a_1, \dots, a_N]$ , et que si  $\alpha$  est irrationnel, alors il a un développement en fraction continue infini  $(a_n)_{n \geq 1}$  tel que :

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1, \dots, a_n].$$

On voit donc l'intérêt des fractions continues : approcher un nombre réel par une suite de rationnels. Par exemple, le rationnel  $[7, 15, 1]$  donné ci-dessus est obtenu à partir des trois premiers termes du développement en fraction continue de  $\pi - 3$ . Notons qu'on peut montrer que, pour tout  $n$ , le rationnel  $[a_1, \dots, a_n]$  est, parmi les rationnels de dénominateur inférieur ou égal, le plus proche de  $\alpha$ . En ce sens, on parle de *meilleure approximation*.

Notons qu'on peut donner une formulation matricielle de l'action de l'application de Gauss. On vérifie facilement qu'en posant  $a = \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$ , on a :

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ T(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Introduisons maintenant, pour tout entier  $a \geq 1$  la substitution suivante, dont la matrice d'incidence est la matrice apparaissant dans l'équation précédente :

$$\beta_a : \begin{cases} 1 \mapsto 1^a 2, \\ 2 \mapsto 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

On déduit alors de l'équation (1.5) que, pour  $a = \lfloor \alpha^{-1} \rfloor$ ,  $\beta_a$  envoie un mot sturmien de pente  $T(\alpha)$  sur un mot sturmien de pente  $\alpha$  :

$$\beta_a(u_{T(\alpha), \rho}) = u_{\alpha, \alpha \rho}.$$

Il s'ensuit que si un réel  $\alpha$  a un développement en fraction continue périodique de la forme  $[\overline{a_1, \dots, a_p}]$ , alors  $u_{\alpha, 0}$  est un point fixe de la substitution  $\sigma = \beta_{a_1} \circ \dots \circ \beta_{a_p}$ . La proposition 1.3 découle alors du théorème de Galois pour les fractons continus :

**Théorème 1.4** *[[62]] Un nombre réel dans l'intervalle  $[0, 1]$  a un développement en fraction continue périodique si et seulement si c'est un irrationnel quadratique réduit.*

**Exemple 1.5** *Soit  $\alpha = \sqrt{3} - 1 \simeq 0.732$ . Le réel  $\alpha$  est une racine irrationnelle du polynôme  $(X + 1)^2 - 3$  de conjugué algébrique  $-\sqrt{3} - 1 < 1$ . On sait donc que le développement en fraction continue de  $\alpha$  est purement périodique. On calcule :*

$$\sqrt{3} - 1 = [\overline{1, 2}].$$

Le mot sturmien  $u_{\alpha, 0}$  est donc point fixe de la substitution  $\tau$  définie par :

$$\tau = \beta_1 \circ \beta_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 12121, \\ 2 \mapsto 12. \end{cases}$$

On a alors :

$$u_{\alpha, 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(1) = 1212112121211212121121212112121211212121121211 \dots$$

qui est un mot sturmien comportant  $1/(1 + \alpha) \simeq 57,7\%$  de lettres 1.

Ces résultats montrent donc qu'il existe un lien fort entre les mots sturmiens et les fractions continues. Pour conclure, notons que qu'une caractérisation analogue existe pour les mots sturmiens *bi-infinis*, c'est-à-dire les mots indexés par  $\mathbb{Z}$  obtenus en discrétisant une droite irrationnelle (voir, par exemple, [12]).

### 1.1.3 Reconnaissance de droite discrète

Dans ce paragraphe, nous montrons que le lien entre mots sturmiens et fractions continues se retrouve dans une opération fondamentale en géométrie discrète : la reconnaissance de droite discrète.

Parmi les différents façons de définir une droite discrète, celle introduite par Réveillé dans [95] est probablement l'une des plus commode et élégante. Plus précisément, la *droite arithmétique discrète de pente  $\alpha \geq 0$ , d'intercept  $\rho \in \mathbb{R}$  et d'épaisseur  $\omega > 0$*  est l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{Z}^2$  vérifiant :

$$\rho \leq \alpha y - x < \rho + \omega.$$

En d'autres termes, c'est l'ensemble des vecteur entiers dont le produit scalaire avec le vecteur  $(-1, \alpha)$  est compris entre  $\rho$  et  $\rho + \omega$ . Il s'agit donc d'une discrétisation naturelle de la droite de pente  $\alpha$  (c'est-à-dire de vecteur normal  $(-1, \alpha)$ ). La figure 1.2 illustre cela.

Le problème de la reconnaissance de droite est alors le suivant : étant donné un ensemble de points de  $\mathbb{Z}^2$ , décider s'il s'agit d'un sous-ensemble d'une droite arithmétique discrète, et si oui, quels sont les paramètres possibles de cette droite (en général, ces paramètres ne sont pas uniques). Soulignons que la reconnaissance de droite est un premier pas vers la polygonalisation d'objets discrets, c'est-à-dire le calcul d'une représentation par union de morceaux de droite discrète d'un sous-ensemble donné de  $\mathbb{Z}^2$ . L'intérêt de cette représentation est qu'elle est généralement plus compacte que le sous-ensemble correspondant de  $\mathbb{Z}^2$ .

On peut trouver une taxonomie des divers algorithmes de reconnaissance dans [78]. Ici, nous distinguerons essentiellement deux type d'approches. Le premier type d'approche consiste, pour décider si un ensemble  $E$  donné de points est un morceau de droite discrète, à construire une suite croissante  $(E_k)_k$  de sous-ensembles de  $E$  et à calculer, pour chaque  $k$ , les paramètres possibles des droites dont la discrétisation contient  $E_k$  – on parle de paramètres *acceptables*. Ainsi, si on obtient un ensemble non vide de paramètres acceptables à la fin, c'est-à-dire quand  $E_k = E$ , alors on a bien reconnu  $E$ . Sinon, c'est que, pour un  $k$  donné, l'ensemble des paramètres acceptables associés à  $E_k$  était vide. C'est alors *a fortiori* le cas pour l'ensemble des paramètres acceptables associés à  $E$ , et on a donc “reconnu”  $E$  : il ne s'agit pas d'un morceau de droite discrète. Ce type d'approche est fondamentalement *incrémental* : la reconnaissance peut se faire en passant un à un en revue les points de  $E$  (il suffit de définir  $E_{k+1}$  en ajoutant un point de  $E \setminus E_k$  à  $E_k$ ). C'est, par exemple, le type d'approche développé dans [26, 35, 41].

Un autre type d'approche est celui généralement désigné par le terme *techniques linguistiques*. Décrivons-en le principe général. On a vu qu'une droite discrète peut,

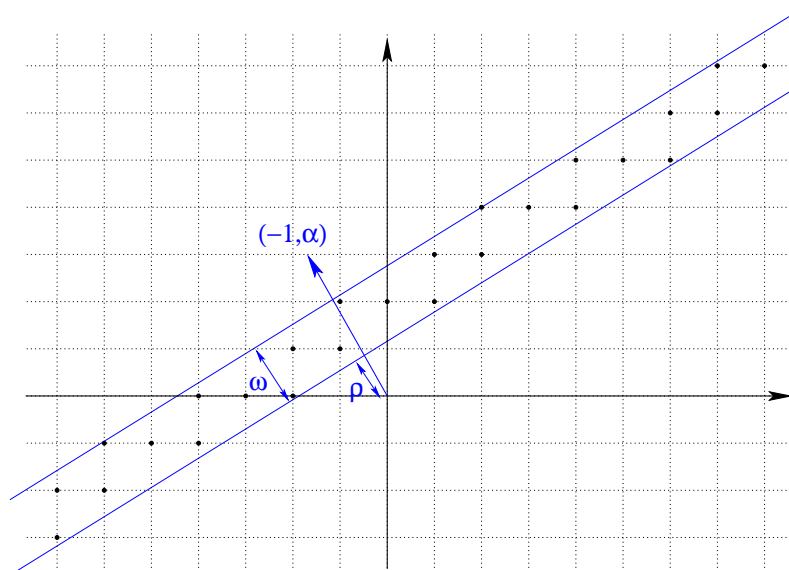


FIG. 1.2 – Droite arithmétique discrète de pente  $\alpha$ , d'intercept  $\rho$  et d'épaisseur  $\omega$  (points en gras).

sous certaines conditions, être codée par un mot. C'est, par exemple, le cas d'une droite arithmétique discrète de pente  $\alpha$  et d'épaisseur  $\omega = 1 + \alpha$  (une telle droite est dite *standard*) : les segments unitaires reliant les points de la droite discrète forment une ligne brisée qu'on peut coder par un mot sur deux lettres – une lettre pour les segments horizontaux et une pour les segments verticaux. La figure 1.3 (à gauche) illustre ceci. On retrouve en fait une construction similaire à celle des mots sturmiens du paragraphe précédente, la seule différence étant qu'on obtient ici des mots bi-infinis. On note encore  $u_{\alpha, \rho}$  le mot bi-infini codant la droite arithmétique discrète de pente  $\alpha$ , d'intercept  $\rho$  et d'épaisseur  $\omega = 1 + \alpha$ . La point clé consiste alors à remarquer que, inversement, un mot sur deux lettres peut toujours être vu comme le codage d'une ligne brisée du plan, c'est-à-dire une sorte de discrétisation de courbe. La figure 1.3 (à droite) illustre ceci. Le problème de la reconnaissance de droite devient alors le suivant : étant donné un mot sur deux lettres, code-t-il une droite discrète, et si oui, laquelle ou lesquelles. Ceci conduit alors à des techniques récursives de reconnaissance de motifs. Plus précisément, les approches de ce types fonctionnent comme ceci : étant donné un mot, on teste ses configurations locales pour vérifier s'il "semble" coder une droite, puis, si c'est le cas, on recode ce mot en un nouveau mot duquel on testera à nouveau les configurations locales, et ainsi de suite. Le principe est de définir un recodage qui, d'une part, laisse invariant la propriété "coder une droite discrète" et, d'autre part, permettent d'affiner le test à chaque étape. C'est, par exemple, le type d'approche développé dans [34, 43, 60, 108, 113]. Intuitivement, ce type d'approche serait plutôt adaptée à une reconnaissance "floue", c'est-à-dire approximative (ce qui peut être intéressant,

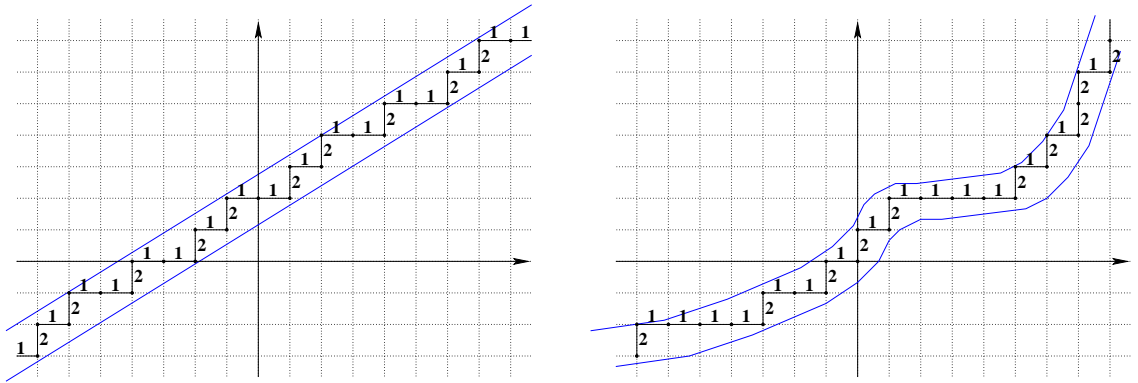


FIG. 1.3 – Codage d’une droite arithmétique discrète standard par un mot sur deux lettres (à gauche). Inversement, tout mot sur deux lettres peut être vu comme le codage d’une sorte de “courbe discrète standard” (à droite).

voir, par exemple, [39, 40]).

La suite de ce paragraphe est consacré à décrire plus en détail une telle approche. Plus précisément, on reprend l’approche exposée dans [108], que l’on reformule ici avec la terminologie introduite dans les deux paragraphes précédents. Cette reformulation permet de préparer l’extension multi-dimensionnelle, qui est au cœur des chapitres suivants. Soulignons que la présentation qui suit est relativement informelle, passant sous silence certains détails techniques pour essayer de mieux faire ressortir les idées directrices.

Étant donné un mot  $u$ , il est difficile de déterminer directement s’il code une droite, mais il est par contre facile (on verra comment) de déterminer, en supposant qu’il code une droite de pente  $\alpha$ , la quantité  $[1/\alpha]$ . Or, bien qu’incomplète, cette information suffit à faire une étape du développement en fraction continue de  $\alpha$ . On va donc tenter de calculer le développement en fraction continue de la “pente” de  $u$  (sachant que cette pente n’est pas nécessairement définie puisque le mot  $u$  ne code pas forcément une droite). On montre alors que cette tentative échoue (c’est-à-dire qu’on ne peut plus recoder le mot obtenu à une certaine étape) si et seulement si  $u$  ne code pas une droite. L’outil fondamental pour recoder le mot sont les substitutions  $\beta_a$  définies par l’équation (1.6). Plus précisément, soulignons que  $\beta_a$  est un morphisme *inversible*, puisqu’on calcule aisément :

$$\beta_a^{-1} : \begin{cases} 1 \mapsto 2, \\ 2 \mapsto 2^{-a}1. \end{cases} \quad (1.7)$$

On déduit alors de l’équation (1.5) que, pour  $a = [1/\alpha]$ , on a :

$$\beta_a^{-1}(u_{\alpha, \alpha\rho}) = u_{T(\alpha), \rho}. \quad (1.8)$$

Ceci va donc nous permettre de calculer le développement en fraction continue de la pente (présumée) d'un mot, à condition de savoir "lire" la quantité  $a = \lfloor 1/\alpha \rfloor$  directement sur ce mot. Introduisons à cet effet la notion de *palier* (voir, par exemple, []). Un palier de longueur  $k$  est une suite maximale de  $k$  lettres identiques consécutives. Par exemple, le mot bi-infini suivant a des paliers de 1 de longueurs 2 et 3 :

$$u = \dots 11211211211121121112112111211211211 \dots$$

Notons  $a(u)$  la longueur du plus court palier de 1 d'un mot bi-infini  $u$ . On montre alors (voir []) :

$$\forall \alpha \in ]0, 1], \forall \rho \in \mathbb{R}, a(u_{\alpha, \rho}) = \lfloor 1/\alpha \rfloor. \quad (1.9)$$

Ainsi, un mot  $u$  code une droite de pente  $\alpha > 0$  si et seulement si  $\beta_{a(u)}^{-1}(u)$  code une droite de pente  $T(\alpha)$ . En particulier,  $\beta_{a(u)}^{-1}(u)$  n'est pas un mot (c'est-à-dire comporte des lettres élevées à des puissance négatives) dans exactement deux cas : si  $u$  ne code pas une droite ou s'il code une droite de pente nulle ou supérieure à 1. Dans tout ce qui suit, on se place dans le cas d'un mot ne comportant jamais deux lettres 2 consécutives.<sup>3</sup> En particulier, ceci exclut les codes de droites de pente strictement supérieure à 1. On déduit alors de ce qui précède l'algorithme suivant :

- 
1.  $u_0 \leftarrow$  mot bi-infini sur deux lettres ;
  2.  $n \leftarrow 0$  ;
  3. **tant que**  $u_n$  est un mot **faire**
  4.      $a_n \leftarrow a(u_n)$  ;
  5.     calculer  $u_{n+1} = \beta_{a_n}^{-1}(u_n)$  ;
  6.      $n \leftarrow n + 1$  ;
  7. **fin tant que** ;
  8. **si**  $u_n$  ne comporte que des 1
  9.     **renvoyer** " $u_0$  code une droite" ;
  10. **sinon**
  11.     **renvoyer** " $u_0$  ne code pas une droite" ;
  12. **fin si**
- 

Notons que cet algorithme ne donne pas, dans le cas où il reconnaît un mot codant une discrétisation de droite, l'ensemble des paramètres acceptables de cette droite. On peut cependant modifier l'algorithme pour qu'il renvoie aussi la pente de la droite reconnue (ce qui est fait dans [108]). Soulignons par ailleurs que, *a priori*, le seul cas où l'on soit sûr que l'algorithme termine est celui d'un mot codant une droite de pente rationnelle (car, dans ce cas, le développement en fraction continue de cette pente est finie). On peut en fait montrer que l'algorithme termine tout le

---

<sup>3</sup>S'il y a deux lettres 2 consécutives, il suffit d'échanger les lettres 1 et 2, ce qui, géométriquement, revient à faire une symétrie d'axe la première bissectrice du plan.

temps sauf pour les mots codant les droites de pente irrationnelle.

Ce qui précède donne donc un algorithme pour décider si un mot bi-infini code une droite ou non. Considérons maintenant, toujours en suivant l'approche développée dans [108], le cas fini, c'est-à-dire le problème consistant à décider si un mot fini code un morceau de droite ou non. Il y a alors un problème de bords (problème soulevé initialement dans [87]). En effet, ce n'est pas parce qu'un morphisme  $\beta_a^{-1}$  envoie un mot bi-infini  $u$  sur un mot que ce même morphisme envoie un facteur de  $u$  sur un mot. Par exemple, on a :

$$\beta_1^{-1}(\dots 1212121212\dots) = \dots 1111111\dots \quad \text{mais} \quad \beta_1^{-1}(2121212121) = 2^{-2}111112.$$

L'idée est, étant donné un mot fini  $u$ , de le modifier légèrement en un mot  $\tilde{u}$  qui soit "équivalent" à  $u$ , c'est-à-dire tel que  $u$  code un morceau de droite de pente  $\alpha$  si et seulement si  $\tilde{u}$  code un morceau de droite de pente  $\alpha$ , mais tel que son image par  $\beta_a^{-1}$  (avec  $a$  bien choisi) soit un mot. Détaillons ceci. On a d'abord besoin d'affiner un peu la notion de palier. On appelle *palier interne* une suite maximale de lettres identiques consécutives, encadrée à gauche et à droite par deux lettres différentes. Par opposition, un palier non interne est appelé *externe*. Par exemple, le mot suivant a des paliers internes de longueur 2 et 3, un palier externe gauche de longueur 1 et un palier externe droit de longueur 2 :

$$u = 12112111211.$$

Si un mot fini  $u$  a des paliers interne, alors on note  $a(u)$  la longueur du plus court palier interne. Ensuite, comme dans le cas des mots bi-infinis, on montre que si  $u$  code un morceau de droite de pente  $\alpha$ , alors  $a(u) = \lfloor 1/\alpha \rfloor$ . Si  $u$  a un palier de longueur strictement supérieure à  $a(u) + 1$ , alors il ne peut s'agir d'un code de droite (rappelons qu'un code de droite comporte au plus deux longueurs de paliers différentes), et on arrête la reconnaissance. Sinon, on transforme le mot  $u$  en un mot  $\tilde{u}$  comme suit. Si  $u$  n'a pas de palier externe gauche ou si ce palier a une longueur inférieure à  $a(u)$ , alors on le prolonge en un palier de longueur  $a(u)$  en rajoutant des 1 à gauche. Ainsi, si  $u$  code un morceau de droite, cette opération donne un mot codant un morceau de la même droite puisque le mot codant la totalité de la droite a des paliers de longueur au moins  $a(u)$ . Si le palier externe droit est de longueur  $a(u) + 1$ , alors on rajoute un 2 à droite (le palier devient donc interne), sinon, on supprime ce palier. Ainsi, si  $u$  code un morceau de droite, cette opération donne un mot codant un morceau de la même droite puisque le mot codant la totalité de la droite a des paliers de longueur au plus  $a(u) + 1$ . Illustrons ceci par quelques cas de figure possibles (où, à chaque fois,  $a(u) = 2$ ) :

$$\begin{aligned} u = 12112111211 &\rightarrow \tilde{u} = 1121121112, \\ u = 112112111211 &\rightarrow \tilde{u} = 1121121112, \\ u = 1121121112111 &\rightarrow \tilde{u} = 11211211121112. \end{aligned}$$

Le mot  $\tilde{u}$  ainsi obtenu code donc un morceau de droite de pente  $\alpha$  si et seulement si le mot  $u$  code aussi un morceau de droite de pente  $\alpha$ . De plus, si  $u$  n'est pas rejeté, alors  $\tilde{u}$  est de la forme :

$$\tilde{u} = 1^{a(u)+\delta_1} 2 1^{a(u)+\delta_2} 2 \dots 1^{a(u)+\delta_k} 2,$$

avec  $\delta_i \in \{0, 1\}$  pour  $i = 1, \dots, k$ . L'image de  $\tilde{u}$  par  $\beta_{a(u)}^{-1}$  est donc le mot :

$$\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u}) = 2^{\delta_1} 1 2^{\delta_2} 1 \dots 2^{\delta_k} 1.$$

On peut alors itérer sur ce mot, comme dans le cas bi-infini précédemment décrit, jusqu'à obtenir soit un mot qui ne code pas une droite, soit un mot sans palier interne (ce sont les deux cas d'arrêt). De plus, soulignons qu'il n'est pas difficile de vérifier que la taille de  $\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})$  est strictement inférieure à celle de  $u$ . On est donc sûr, dans le cas fini, que le procédé s'arrête en temps fini. Finalement, examinons le cas d'un mot sans palier interne. Un tel mot est de la forme  $u = 1^p 2^q 1^r$ . On voit facilement qu'il code une droite si et seulement si  $q \leq 1$ . Plus précisément, si  $q = 0$ , alors  $u = 1^{p+r}$  code une droite de pente  $\alpha \in [0, \frac{1}{p+r}]$ , et si  $q = 1$ , alors  $u = 1^p 2 1^r$  code une droite de pente  $\alpha \in ]0, \frac{1}{\max(p,r)}]$ . Avant d'examiner la complexité de cet algorithme, détaillons complètement son déroulement sur deux exemples.

**Exemple 1.6** *Considérons le mot fini suivant :*

$$u_0 = 11211211211121121112112111211211211211.$$

*Le plus court palier interne de  $u_0$  est de longueur  $a(u_0) = 2$ . On calcule :*

$$\tilde{u}_0 = 112112112111211211121121112112112,$$

*et on obtient un nouveau mot  $u_1$  en appliquant  $\beta_2^{-1}$  :*

$$u_1 = \beta_2^{-1}(\tilde{u}_0) = 1112112112111.$$

*Le plus court palier interne de  $u_1$  est de longueur  $a(u_1) = 3$ . On calcule :*

$$\tilde{u}_1 = 1112112112,$$

*et on obtient un nouveau mot  $u_2$  en appliquant  $\beta_3^{-1}$  :*

$$u_2 = \beta_3^{-1}(\tilde{u}_1) = 2111.$$

*Le mot  $u_2$  n'a pas de palier interne. Il code un morceau de droite, donc on en déduit que  $u_0$  code aussi un morceau de droite. Plus précisément,  $u_2$  code un morceau de droite de pente  $\alpha_2 \in ]0, 1/3]$ , c'est-à-dire que pour tout  $\alpha_2$  dans cet intervalle, il existe un codage d'une droite de pente  $\alpha_2$  dont  $u_2$  est un facteur. On déduit alors*

de l'équation (1.8) que  $\tilde{u}_1 = \beta_3(u_2)$ , et donc  $u_1$  aussi, code un morceau de droite de pente  $\alpha_1 \in ]1/3, 3/4]$ . De même,  $\tilde{u}_0 = \beta_2(u_1)$ , et donc  $u_0$  aussi, code un morceau de droite de pente  $\alpha_0 \in ]3/7, 4/11]$ . Notons que les réels de l'intervalle  $]3/7, 4/11]$  sont ceux dont le développement en fraction continue est de la forme  $[2, 3, a, \dots]$  avec  $a \geq 2$  (ceci parce que si  $u_2$  est facteur d'un mot bi-infini codant une droite, alors ce mot a un plus court palier de taille au moins 2). En d'autres termes, cet algorithme calcule la partie commune des développements en fractions continues de tous les pentes des droites que le mot initial peut coder.

**Exemple 1.7** *Considérons le mot fini suivant :*

$$v_0 = 1121121121121121112112111211211211211.$$

*Le plus court palier interne de  $v_0$  est de longueur  $a(v_0) = 2$ . On calcule :*

$$\tilde{v}_0 = 11211211211211211121121112112112112.$$

*et on obtient un nouveau mot  $v_1$  en appliquant  $\beta_2^{-1}$  :*

$$v_1 = \beta_2^{-1}(\tilde{v}_0) = 111112112111.$$

*Le plus court palier interne de  $v_1$  est de longueur  $a(v_1) = 2$ . Or le palier externe gauche de  $v_1$  est de longueur 5, donc strictement supérieure à  $a(v_1) + 1$ . On en déduit que  $v_1$ , et donc  $v_0$  aussi, ne peut pas coder une droite.*

Pour conclure, examinons la complexité d'un tel algorithme. On voit facilement que la lecture de  $a(u)$ , le calcul de  $\tilde{u}$  et le calcul de  $\beta_{a(u)}^{-1}(u)$  se fait en temps linéaire en la taille de  $u$ . Par ailleurs, on déduit de l'équation (1.5) :

$$|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})| = |\tilde{u}| - [|\tilde{u}|_1/|\tilde{u}|_2]|\tilde{u}|_2.$$

Une étude de fonction montre alors qu'on a :  $|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})| \leq 2/3|\tilde{u}|$ . De plus, on a  $|\tilde{u}| \leq |u| + a(u) + 1$ . On en déduit l'existence d'une constante  $\lambda < 1$  telle que, pour tout  $u$  assez grand (deux paliers internes suffisent), on ait :  $|\beta_{a(u)}^{-1}(\tilde{u})| \leq \lambda|u|$ . Le nombre d'étape (c'est-à-dire d'applications d'un morphisme  $\beta_a^{-1}$ ) est donc borné indépendamment de  $u$ . Cet algorithme est donc de complexité linéaire (ce qui, asymptotiquement, est le mieux qu'on puisse attendre d'un algorithme de reconnaissance de droite).

## 1.2 Extension en dimensions supérieures

L'objectif principal de cette thèse est d'étendre en dimensions supérieures les interactions entre combinatoire des mots, fractions continues et géométrie discrète présentées au paragraphe 1.1. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux notions, outils et résultats déjà existant dans un contexte multi-dimensionnel.

### 1.2.1 Pavages

La première façon de généraliser les mots qui viennent à l'esprit est sans doute de considérer des lettres non plus indexées par  $\mathbb{N}$  (mot infini) ou  $\mathbb{Z}$  (mot bi-infini) mais par  $\mathbb{Z}^d$ . Un mot  $d$ -dimensionnel sur un alphabet  $\mathcal{A}$  est alors un élément de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  ou, en d'autres termes, une matrice infinie à  $d$  entrées et à coefficients dans  $\mathbb{A}$ . C'est, par exemple, l'approche suivie dans les articles [18, 19, 28, 29, 50, 85, 93, 98, 99].

Une autre approche consiste à considérer un mot comme un *pavage* de la droite, et donc à généraliser la notion de mot par celle de pavage. Rappelons qu'un pavage d'un domaine  $D \subset \mathbb{R}^d$  est un ensemble de compacts d'intérieurs vides (appelés *tuiles*) dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à  $D$  (voir, par exemple, [64] pour une présentation plus détaillée). Généralement, on exige de plus que l'ensemble des tuiles soit fini à translation près (on peut remplacer les translations par tout groupe d'isométries de l'espace). Soulignons que les mots indexés par  $\mathbb{Z}^d$  peuvent être vus comme des pavages particuliers de  $\mathbb{Z}^d$  (dont les tuiles sont des hypercubes).

Une classe de pavages particulièrement intéressante dans l'optique de généraliser les mots sturmiens (ou, plus généralement, les mots codant des droites du plan) est celle des pavages obtenus par *coupe et projection* dans  $\mathbb{R}^d$ . Plus précisément, suivant [67], on définit :

**Définition 1.8** *Un pavage par coupe et projection canonique est un pavage obtenu en projetant sur un espace affine  $V \subset \mathbb{R}^d$  de dimension  $k$  (appelé espace projectif), selon un espace affine  $W \subset \mathbb{R}^d$  (appelé espace interne), l'ensemble  $c(V)$  des faces  $k$ -dimensionnelles de  $\mathbb{Z}^d$  incluses dans le cylindre  $V + [0, 1]^d$ . Les entiers  $k$  et  $d - k$  sont respectivement appelés la dimension et la codimension de ce pavage.*

La figure 1.4 illustre cette notion. Notons que l'ensemble  $c(V)$  peut être vu comme une sorte d'espace affine discret (un espace affine "facettisé"). Soulignons qu'il s'agit d'un cas particulier de pavage par coupe et projection. Pour une présentation plus complète et plus générale de la méthode de coupe et projection (ainsi que des notions voisines que sont les ensembles de Delone ou de Meyer) on peut se référer, par exemple, à [65, 79, 103].

Il est alors intéressant de remarquer qu'une droite arithmétique discrète standard de pente  $\alpha$  et d'intercept  $\rho$ , telle que définie dans le paragraphe précédent, n'est en fait rien d'autre que l'ensemble des sommets de  $c(V)$ , où  $V$  est l'espace affine de dimension 1 et de codimension 1 défini par :

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x} \mid (-1, \alpha) \rangle = \rho\}.$$

Ainsi, un mot codant une telle droite (qui est, rappelons le, un mot sturmien quand  $\alpha$  est irrationnel) peut être vu comme pavage par coupe et projection canonique, de

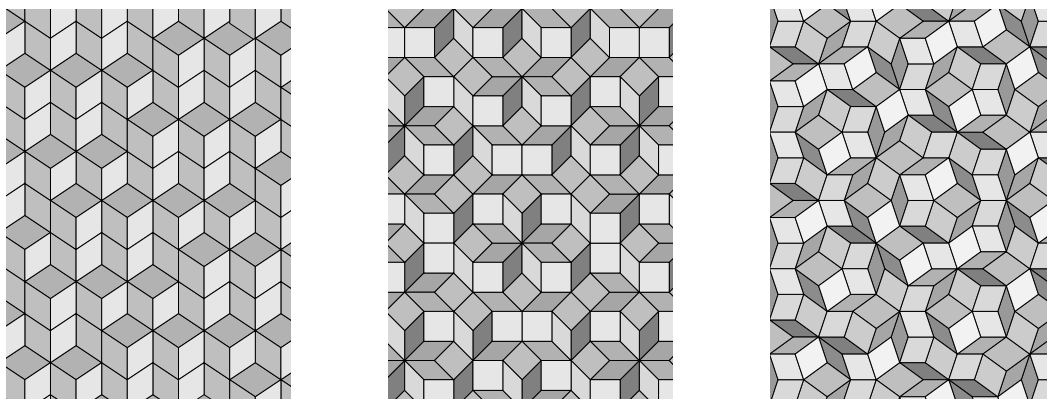


FIG. 1.4 – Trois pavages obtenus par coupe et projection canonique de dimension 2 et de codimensions respectives 1, 2 et 3 (de gauche à droite).

dimension 1 et de codimension 1. Ceci conduit naturellement à généraliser la notion de mot sturmien en définissant un *hyperplan sturmien* comme étant un pavage par coupe et projection canonique de codimension 1, où l'espace projectif  $V$  a un vecteur normal dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$  (comme c'est le cas du vecteur  $(-1, \alpha)$ ). Cette notion d'hyperplan sturmien a été introduite par Vuillon dans [110]. Dans [19], une définition équivalente comme codage de deux rotations sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est donnée. Notons qu'il est aussi montré, dans cet article, qu'un plan sturmien peut être codé par un mot indexé par  $\mathbb{Z}^d$  sur l'alphabet  $\{1, 2, 3\}$ .

### 1.2.2 Substitutions

On s'intéresse ici aux extensions multi-dimensionnelles des notions de substitution ou de morphisme sur les mots. Soulignons qu'une des difficultés principales dans de telles extensions est que, contrairement au cas des mots (indexés par  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ ), il n'y a pas d'opération de concaténation naturelle pour les pavages (ou les mots indexés par  $\mathbb{Z}^d$ ). Ainsi, s'il est facile de définir une application envoyant une tuile sur un ensemble de tuiles (comme une substitution envoie une lettre sur un mot), il n'est par contre pas évident de définir de manière cohérente la façon dont deux images de tuiles doivent être placés l'une par rapport à l'autre. En reprenant la terminologie de [90], on distingue deux grandes classes de substitutions.

La première classe, la plus étudiée, est celle des *substitutions géométriques*. Formalisées par Thurston dans [107], ces substitutions peuvent être vues comme généralisant les substitutions sur les mots qui envoient les lettres de l'alphabet sur des mots tous de la même longueur. Informellement, le principe est le suivant : une similitude (ou, plus généralement, une application linéaire) dilate uniformément les

tuiles originales, puis chaque “grande” tuile ainsi obtenue est partitionnée par des tuiles originales. Un pavage point fixe d’une telle substitution est dit *auto-similaire* (ou, plus généralement, *auto-affine*). La figure 1.5 illustre cela. Soulignons que c’est une transformation assez rigide : toutes les tuiles sont dilatées pareillement (d’où l’analogie avec les substitutions sur les mots qui envoient toutes les lettres sur des mots de la même taille). Une variante consiste à permettre, une fois les tuiles originales dilatées, de les remplacer par des tuiles originales qui ne les partitionnent pas nécessairement, mais en assurant cependant que, globalement, l’image d’un pavage reste un pavage (c’est-à-dire que les tuiles à cheval sur les tuiles dilatées doivent correspondre). Un pavage point fixe d’une telle substitution est alors dit *pseudo-auto-similaire* (ou *pseudo-auto-affine* si la dilatation n’est pas une similitude mais une application linéaire). La figure 1.6 illustre cela. Dans tous ces cas, la relative rigidité de la substitution a permis d’obtenir de nombreux résultats (voir, par exemple, [72, 88, 96, 104, 105] ou les références dans [90]).

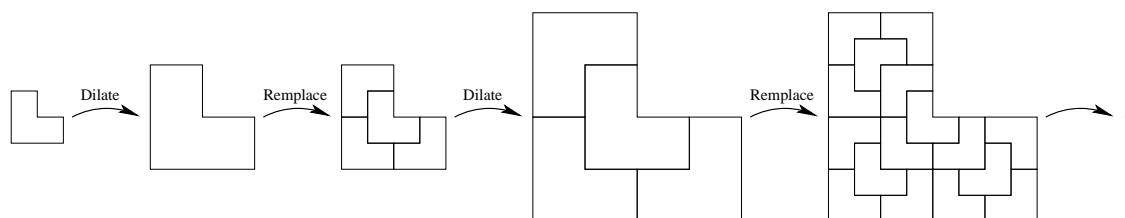


FIG. 1.5 – Une substitution géométrique dilate chaque tuile originale est dilatée puis partitionne la tuile obtenue par des tuiles originales (ici, quatre tuiles en L). En itérant, on obtient à la limite un point fixe de cette substitution, c’est-à-dire un pavage auto-similaire (ici, il s’agit du pavage appelé *chair tiling*).

La seconde classe, moins étudiée, est celle des *substitutions combinatoires*, introduites dans [89]. Ces substitutions peuvent être vues comme généralisant véritablement les substitutions sur les mots, c’est-à-dire le principe de concaténation des images des lettres d’un mot. Informellement, le principe est le suivant : chaque tuile est remplacée par un certain nombre (fini) de tuiles, sans restriction de placement ; des *règles locales* spécifient alors, pour toutes paires de tuiles adjacentes, comment placer leurs images respectivement l’une par rapport à l’autre. Notons que la concaténation des mots est bien un cas particulier de règles locales : si deux lettres  $x$  et  $y$  ont des images  $\sigma(x)$  et  $\sigma(y)$ , alors l’image de la concaténation  $x \cdot y$  sera la concaténation  $\sigma(x) \cdot \sigma(y)$ . C’est l’absence de concaténation naturelle en dimensions supérieures qui nécessite l’introduction de règles locales. Soulignons qu’il n’est pas évident que substituer de tuiles adjacentes en tuiles adjacentes selon des règles locales données ne crée jamais d’incohérence (on peut imaginer que, selon le chemin suivi, l’image d’une tuile se retrouvera à des endroits différents...). Quelques exemples cohérents de règles locales sont donnés dans [4, 89].

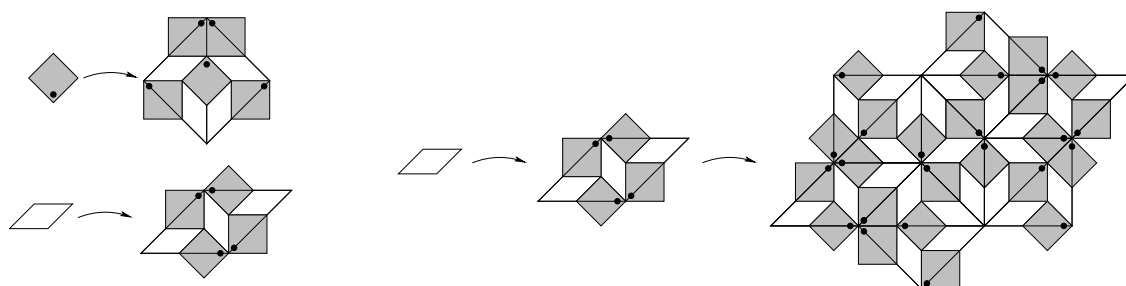


FIG. 1.6 – Une variante consiste à dilater les tuiles originales et à remplacer la tuile obtenue par des tuiles originales qui n’en forment pas nécessairement une partition (à gauche). Il faut alors s’assurer qu’en appliquant une telle substitution, soit les tuiles obtenues après remplacement ne s’intersectent pas, soit elles sont confondues, auquel cas elles peuvent être assimilées (c’est ici le cas pour certaines tuiles carrées, à droite). En itérant, on obtient à la limite un point fixe de cette substitution, c’est-à-dire un pavage pseudo-auto-similaire (ici, il s’agit du *pavage d’Ammann-Beenker*).

Parallèlement aux deux classes de substitutions décrites ci-dessus, un type de substitutions particulier, les *substitutions généralisées*, ou *applications duales*, a été progressivement développée et étudiée dans les articles [6, 7, 48, 68, 69]. Notons que nous avons montré dans [57] que ces substitutions formaient en fait une sous-classe des substitutions combinatoires. Informellement, ces substitutions sont construites comme suit. D’abord, à une substitution sur les mots d’un alphabet à  $d$  lettres est associée une application linéaire sur les segments unités de l’espace  $\mathbb{R}^d$ . Une notion de dualité entre segments unités et hyperfaces de  $\mathbb{Z}^d$  permet ensuite d’obtenir une application (dite *duale*) sur ces faces. Cette application duale permet - sous certaines conditions - d’engendrer des ensembles croissants de faces qui, à projection près, peuvent être vus comme des pavages, ce qui explique le nom de substitution généralisée qui lui est aussi donné. Soulignons que les pavages en question sont en fait des pavages par coupe et projection canonique de codimension un (donc, en particulier, les plans sturmiens). Ces applications duales ou substitutions généralisées sont celles retenues dans cette thèse pour essayer de généraliser les résultats exposés au paragraphe 1.1. Le chapitre 2 de cette thèse sera consacré à une introduction plus complète à ces substitutions, qu’il serait difficile de faire ici sans un formalisme plus conséquent.

### 1.2.3 Fractions continues multi-dimensionnelles

Nous avons rappelé au paragraphe 1.1.2 la notion de développement en fractions continues d’un réel. Trouver une extension multi-dimensionnelle à cette notion a été un problème très étudié en raison des nombreuses applications des fractions continues. Cependant, il semble qu’il n’existe pas de “bonne” extension, c’est-à-dire

qui généraliserait tous les résultats uni-dimensionnels, mais seulement différentes extensions, chacune généralisant plus ou moins bien telle ou telle propriété des fractions continues. Aussi existe-t-il une multitude d'extensions différentes, des voiles de Klein (voir, par exemple, [80]) aux nombreux algorithmes matriciels : Brun, Güting, Jacobi-Perron, Poincaré, Selmers... (voir [22] ou [102] pour une présentation détaillée de ces algorithmes et de leurs propriétés respectives).

Les algorithmes cités ci-dessus peuvent être génériquement décrits comme suit (voir [81, 102]). Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$  et  $(X_t)_{t \in I}$  une partition de  $X$ , où  $I$  est un ensemble au plus dénombrable. Soit  $T$  une application de  $X$  vers  $X$ , injective sur chaque  $X_i$ ,  $i \in I$ . Le *développement* d'un vecteur  $\mathbf{x} \in X$  est alors la suite  $(t_k)_{k \geq 0}$  de  $I$  définie par :

$$t_k = t \Leftrightarrow T^k(\mathbf{x}) \in X_t.$$

De plus, on suppose que, pour tout  $t$  dans  $i$ , il existe une matrice  $A_t$  de taille  $(d+1) \times (d+1)$  telle que, pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $X_t$  :

$$(1, T(\mathbf{x})) \propto A_t(1, \mathbf{x}),$$

où  $(1, \mathbf{u})$  désigne le vecteur (colonne) obtenu en ajoutant une coordonnée 1 devant  $\mathbf{u}$  (le signe  $\propto$  signifiant "proportionnel à"). On parle de développement *fini* de longueur  $k$  si  $T^k(\mathbf{x}) \in X_0$ .

Intéressons nous maintenant aux éventuelles propriétés de ces fractions continues multi-dimensionnelles.

Une première propriété, utile pour des questions d'approximations, est celle de la convergence. Plus précisément, on dit qu'un algorithme est *fortement convergent* s'il vérifie, pour tout vecteur  $\mathbf{x}$  de  $X$  admettant le développement  $(t_k)_{k \geq 0}$  :

$$\forall \mathbf{u} \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} A_{t_n} \dots A_{t_1}(1, \mathbf{u}) = (1, \mathbf{x}).$$

On dit également que cet algorithme est *faiblement convergent* (selon la terminologie de [22]) ou *uniformément convergent* (selon la terminologie de [102]) si on a :

$$\forall \mathbf{u} \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{t_n} \dots A_{t_1}(1, \mathbf{u})}{\|A_{t_n} \dots A_{t_1}(1, \mathbf{u})\|} = \frac{(1, \mathbf{x})}{\|(1, \mathbf{x})\|}.$$

Ainsi, la convergence forte est une convergence en termes de vecteurs alors que la convergence faible (ou uniforme) est simplement une convergence en termes de directions de vecteurs.

Une deuxième propriété concerne la périodicité des développements. Un résultat dû à Lagrange stipule qu'un nombre réel a un développement en fraction continue

ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est quadratique (une variante de ce résultat est le théorème 1.4, mentionné au paragraphe 1.1.2). Par analogie, on voudrait que, dans le cas multi-dimensionnel, un vecteur  $\mathbf{x}$  ait un développement en fraction continue ultimement périodique si et seulement si ses coordonnées forment une base d'une extension de corps  $\mathbb{Q}(\lambda)$ , où  $\lambda$  est un entier algébrique de degré au plus  $d + 1$ .

La dernière propriété que nous exposerons ici est celle de la *détection des dépendances rationnelles*, qui est vérifiée si tout vecteur  $\mathbf{x}$  dont les coordonnées sont liées sur  $\mathbb{Q}$  a un développement fini. Une propriété plus faible est celle assurant que tout vecteur dont les coordonnées sont rationnelles a un développement fini. Inversement, une propriété plus forte est celle de *réductibilité*, vérifiée si tout vecteur  $\mathbf{x}$  dont les coordonnées engendrent un sous-espace vectoriel de dimension  $d'$  sur  $\mathbb{Q}$  est tel que, pour  $k$  assez grand,  $T^k(\mathbf{x})$  a exactement  $d'$  coordonnées qui ne sont pas dans  $X_0$ . Intuitivement, ceci signifie que le développement a reconnu le degré de liberté de  $\mathbf{x}$  sur  $\mathbb{Q}$ .

Dans cette thèse, nous avons retenu l'algorithme de Brun. Cet algorithme a été prouvé fortement convergent sous certaines hypothèses, faiblement (ou uniformément) convergent dans tous les cas, et il détecte les dépendances rationnelles pour  $d \leq 2$  (voir, par exemple, [22]). On montrera aussi (Chap. 3) que tout vecteur dont les coordonnées sont rationnelles a un développement fini (ce qui très probablement une propriété déjà connue). Par contre, il ne semble pas que la propriété énoncée ci-dessus concernant les développements ultimement périodiques soit vérifiée (en fait, le problème de trouver un algorithme qui vérifie cette propriété semble très difficile). Ce choix est arbitraire dans la mesure où l'algorithme de Brun n'est pas le seul vérifiant ces propriétés (notamment, c'est aussi le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron), mais il ne restreint pas la généralité des résultats qu'on obtiendra (on pourrait utiliser un autre algorithme vérifiant aussi ces propriétés).

#### 1.2.4 Reconnaissance de plan discret

Nous avons vu au paragraphe 1.1.3 que le problème de la reconnaissance de droite discrète était important en géométrie discrète dans le processus de vectorisation de données. Naturellement, ce problème se pose aussi (sinon plus) en dimensions supérieures, notamment en ce qui concerne la reconnaissance de plan discret de l'espace. Notons tout d'abord que la notion de droite arithmétique discrète, due à Reveilles et rappelée au paragraphe 1.1.3, s'étend très bien en dimensions supérieures. Plus précisément, toujours suivant la terminologie introduite dans [95], un *hyperplan arithmétique discret* de vecteur normal  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ , d'intercept  $\rho$  et d'épaisseur  $\omega$  est l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{Z}^d$  vérifiant :

$$\rho \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho + \omega.$$

Le cas particulier où  $\omega$  est la somme des coordonnées de  $\alpha$  est appelé hyperplan arithmétique discret *standard*. Notons qu'un hyperplan arithmétique discret peut être, à projection près, vu comme l'ensemble des sommets d'un pavage par coupe et projection canonique de codimension 1 (voir définition 1.8). Le problème de la reconnaissance de plan consiste alors, étant donné un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d$ , à décider s'il est inclus dans un hyperplan arithmétique standard, auquel cas on veut aussi connaître les paramètres possibles d'un tel hyperplan (vecteur normal, intercept, épaisseur).

Comme dans le cas des droites discrètes, il existe plusieurs types d'approches à ce problème. On peut distinguer, en suivant [23, 24], deux classes principales d'approches : par programmation linéaire (voir, par exemple, [25, 59, 109]) ou par géométrie computationnelle (voir, par exemple, [66, 76, 77, 106]). Informellement, les approches par programmation linéaire fonctionnent comme suit. À chaque point de l'ensemble à reconnaître sont associées des inégalités liant les paramètres des plans discrets contenant ce point. L'ensemble de toutes inégalités associées aux points à reconnaître forme alors un polytope convexe de l'espace des paramètres. Reconnaître un plan signifie alors déterminer si ce polytope est non vide (et, accessoirement, en déterminer les points extrémaux - dont il est l'enveloppe convexe - afin de pouvoir explicitement donner les paramètres d'un plan discret contenant l'ensemble des points à reconnaître. Quant aux approches par géométrie computationnelle, elles reposent généralement sur le calcul de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points à reconnaître, qui doit être "assez plat" pour assurer que ces points sont bien dans un plan discret. Un comparatif détaillé des complexités des algorithmes existant peut être trouvé dans les survols [23, 24]. En particulier, notons qu'il existe des algorithmes asymptotiquement optimaux, c'est-à-dire de complexité  $\mathcal{O}(n)$ , où  $n$  désigne la taille de l'ensemble à reconnaître. Cependant, soulignons qu'il existe un hiatus entre les bornes asymptotiques et la complexité effective des algorithmes. Un exemple caractéristique en est sans doute l'algorithme développé dans [66] qui, malgré une complexité théorique en  $\mathcal{O}(n^7)$ , semble être un des plus rapides en pratique.

Pour conclure ce paragraphe, soulignons que les extensions multi-dimensionnelles des mots (notamment sturmiens), des substitutions et des fractions continues, présentées précédemment n'ont, à notre connaissance, jamais été appliquées au problème de la reconnaissance de plan discret. C'est ce que nous allons faire dans cette thèse.

### 1.3 Un petit détour par la physique théorique

Dans l'introduction, il a été mentionné qu'un des champs d'étude des pavages était la physique théorique, notamment en ce qui concerne la notion de matière ordonnée. Le but de ce paragraphe n'est pas d'être exhaustif mais de donner ne

serait-ce qu'une idée de la manière dont apparaissent les pavages en physique et, surtout, d'introduire la notion de *flip*, qui sera utilisée dans la suite de la thèse (notamment au chapitre 4).

Une notion importante dans ce domaine est celle de *figure de diffraction*. Essayons d'en présenter intuitivement le principe (le lecteur peut aussi consulter le survol [8], très clair). Rappelons d'abord que des ondes *interfèrent* lorsqu'elles se superposent. Plus concrètement, lancer deux cailloux dans l'eau donne naissance à deux familles de cercles concentriques de vaguelettes qui, là où ils se rencontrent, *interfèrent* : deux crêtes de vaguelettes donneront naissance à une plus grosse vaguelette, tandis qu'une crête et un creux se compenseront. Rappelons ensuite qu'une onde arrivant sur un obstacle *diffracte*, c'est-à-dire qu'elle est réémise dans toutes les directions, avec une intensité variable (principalement dans un cône d'autant plus fin que la fréquence de l'onde est élevée). C'est, par exemple, ce qui vous permet lire ce manuscrit, chaque lettre diffractant vers votre pupille la lumière qu'elle reçoit (un exemple peut-être plus agréable étant le cas d'ondes sonores diffractant sur un mur, phénomène qui vous permet d'écouter la musique de votre salon jusque dans votre cuisine). Nous pouvons maintenant expliquer ce qu'est une figure de diffraction : si une onde est envoyée sur une collection d'obstacles, ces obstacles vont tous réémettre cette onde comme autant de petites sources, et ces ondes réémises vont alors interférer, donnant un résultat fonction de la répartition spatiale des obstacles. En particulier, en physique, on éclaire aux rayons  $X$  (une onde électromagnétique) un matériau, constitué d'atomes répartis dans l'espace, et on récupère la figure de diffraction résultante. Il se trouve que si les atomes sont très ordonnés, par exemple répartis sur un réseau, alors la figure de diffraction va présenter des pics lumineux sur un fond sombre, dus à une sorte de synchronisation des ondes diffractés par chaque atome (les crêtes de chaque onde vont toutes se sommer dans une certaine direction, alors que dans une autre direction il y aura compensation entre crêtes et creux). Inversement, des atomes répartis sans organisation particulière vont réémettre des ondes qui vont se compenser et se moyennner de sorte à donner, finalement, une figure de diffraction uniforme, sans pics lumineux. En conclusion, observer la figure de diffraction d'un matériau donne donc une idée de sa nature plus ou moins ordonnée.

À la lumière ce qui précède, il semble naturel de définir la matière ordonnée comme celle dont la figure de diffraction est formée de pics. Notamment, les *cristaux*, c'est-à-dire les arrangements périodiques de matière, s'avèrent avoir de telles figures de diffraction, qui, de plus, sont elles aussi périodiques. On a très longtemps pensé que seuls les cristaux possédaient cette propriété. Aussi, en 1984, l'annonce dans [100] de la découverte d'un matériau dont la figure de diffraction est formée de pics répartis apériodiquement fit sensation. Un tel matériau possédait donc une structure ordonnée, au même titre que les cristaux, mais sans être un cristal ! Plus précisément, ces pics se sont avérés avoir une répartition quasi-périodique,

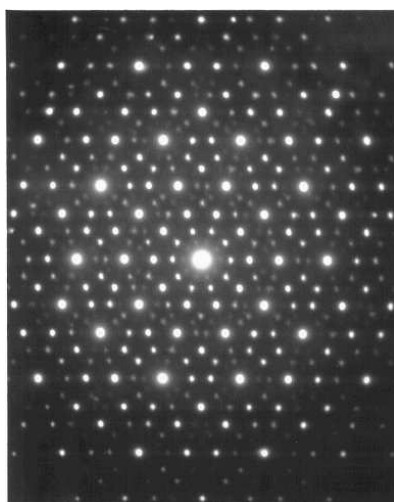


FIG. 1.7 – Figure de diffraction de l’alliage  $\text{Al}_{0.86}\text{Mn}_{0.14}$  (tirée de [100]). Notez la symétrie icosaédrique, qui exclut qu’il s’agisse d’un cristal (voir ci-dessous).

un concept étudié depuis assez longtemps en mathématiques mais qui, jusqu’alors, semblait pour le moins abstrait. D’autres expériences ont ensuite exhibé une large palette de telles matériaux (voir, par exemple, [71]). Ces matériaux ont été nommés *quasi-cristaux*, et se trouvent être à l’origine d’un fort regain d’intérêt pour l’étude des structures quasi-périodiques (voir, par exemple, les ouvrages [10, 44, 71, 83, 103] et les nombreuses références qui s’y trouvent).

C’est là qu’interviennent les pavages. En gros, chaque tuile correspond à une configuration d’atomes assez stable, et des tuiles peuvent être voisines si les interactions entre les atomes sous-jacents sont possibles. On peut alors étendre aux pavages la notion de figure de diffraction. En particulier, les pavages par coupe et projection, déjà décrits au paragraphe 1.2.1 dans le cas canonique, mais qui peuvent être étendus dans un cadre plus général (voir, par exemple, [101]), constituent un bon modèle de quasi-cristal. En effet, si le plan de coupe est irrationnel, le pavage obtenu sera apériodique mais, sous certaines conditions, présentera une figure de diffraction formée de pics. Notons cependant que le procédé de construction par coupe et projection reste très théorique, et il est difficile d’expliquer la formation de quasi-cristaux réels ainsi. De même, la construction par substitutions (exposée au paragraphe 1.2.2) est plutôt théorique, les atomes ayant peu tendance à croître et à se multiplier...

Un modèle explicatif qui semble plus réaliste est celui des *pavages aléatoires*. Informellement, un pavage aléatoire est un pavage quelconque obtenu avec les mêmes tuiles qu’un pavage par coupe et projection. Plus formellement, on peut introduire la notion de *pavage canonique* :

**Définition 1.9** Soit deux entiers  $d$  et  $k$  vérifiant  $d \geq k > 0$ . Un pavage canonique de dimension  $k$  et de codimension  $d - k$ , aussi appelé simplement pavage  $d \rightarrow k$ , est un pavage dont les tuiles sont des translatées des tuiles définies par :

$$T_{i_1, \dots, i_k} = \{\lambda_1 \mathbf{v}_{i_1} + \dots + \lambda_d \mathbf{v}_{i_k} \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\},$$

où  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$  et  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$  sont des vecteurs deux à deux linéairement indépendants d'un sous-espace affine de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^d$ .

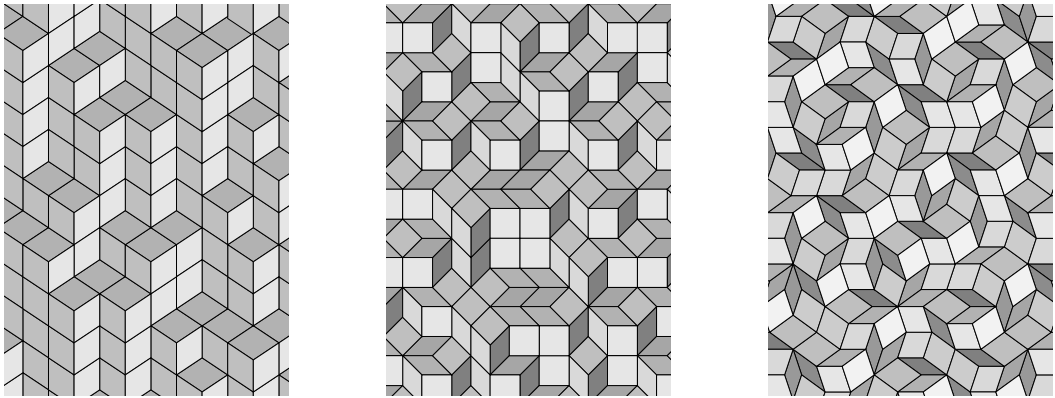


FIG. 1.8 – Trois pavages canoniques, respectivement de type  $3 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 2$  et  $5 \rightarrow 2$ . Les pavages par coupe et projection (Fig. 1.4) sont un cas particulier de ces pavages canoniques.

La figure 1.8 illustre cela. Soulignons qu'un pavage par coupe et projection canonique de dimension  $k$  et de codimension  $d - k$  est un cas particulier de pavage  $d \rightarrow k$ . Expliquer la formation des quasi-cristaux (et aussi des cristaux) revient alors à expliquer comment la matière, passant par divers états modélisés par ces pavages canoniques, va finalement se figer en une structure ordonnée (ou, du moins, va osciller entre des pavages dont la structure moyenne est ordonnée). En particulier, une notion importante permettant de modéliser les passages d'un pavage à l'autre est celle de *flip*. Un flip est une transformation locale du pavage. Plus précisément, on vérifie que la projection d'un hypercube de  $\mathbb{R}^d$  sur un espace de dimension  $k$  peut être pavé exactement de deux façons par des tuiles d'un pavage  $d \rightarrow k$  ; si un pavage  $d \rightarrow k$  admet une de ces deux configurations locales, alors faire un flip sur ce pavage consiste à remplacer cette configuration locale par l'autre. La figure 1.9 illustre cela.

La notion de flip a été introduite en mécanique statistique pour modéliser les dimères polarisés (voir, par exemple, le survol [74]). En particulier, certains cas peuvent être vus comme des pavages canoniques  $3 \rightarrow 2$  restreints à des domaines

finis. Le point de vue adopté est alors plutôt combinatoire, et une question de base dans cette approche est celle de la *flip-accessibilité* : peut-on passer d'un pavage à un autre par une suite de flips ? Toujours dans le cas des pavages canoniques restreints à des domaines finis<sup>4</sup>, il a été montré que la réponse était toujours positive dans le cas  $n \rightarrow n - 1$  (voir [58, 74, 91, 107]), dans le cas  $n \rightarrow n - 2$  (voir [30]) ainsi que dans le cas  $n \rightarrow 2$  (voir [73]). Dans le cas  $n \rightarrow 3$ , la réponse est souvent positive mais pas toujours (voir [42]). Le cas des dimensions ou codimensions supérieures ont été peu explorées, la flip-accessibilité étant probablement d'autant plus rare que ces dernières sont élevées. Notons au passage que la notion de flip existe également pour d'autres types de pavages, par exemple par dominos, ou même pour les graphes (voir, par exemple, [51, 91, 107]). En ce qui concerne l'interprétation physique des flips, nous renvoyons le lecteur au livre [71], en nous contentons de mentionner que, sans fournir à lui seul un modèle explicatif suffisant, le flip semble néanmoins être assez largement reconnu comme un bon modèle de mécanisme élémentaire. Dans le cadre de cette thèse, nous verrons aux chapitres 4 et 5 que la notion de flip est très pratique pour étudier l'action de substitutions (les *applications duales* introduites au chapitre 2 et brièvement mentionnés au paragraphe 1.2.2) sur les *surfaces en escalier*, qui sont en quelque sorte des relevés de pavages canoniques de codimension 1 (voir Fig. 1.8, à gauche).

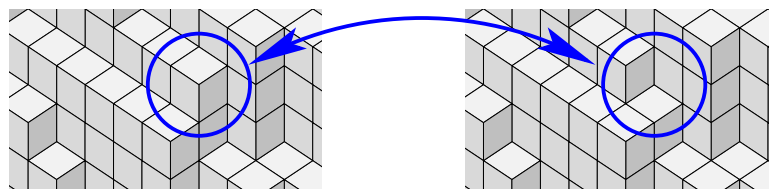


FIG. 1.9 – Dans le cas planaire, trois tuiles en forme de parallélogramme peuvent paver de deux façons différentes un hexagone ; un flip est alors l'opération consistant à remplacer une configuration par l'autre (le reste du pavage restant inchangé).

Pour conclure ce paragraphe revenons brièvement aux pavages aléatoires. Un principe physique fondamental est qu'un matériau stable (ce qui est, forcément, le cas de ceux qu'on peut observer, cristaux et quasi-cristaux compris) doit avoir une *énergie libre* minimale. En d'autres termes, une légère variation (par exemple, quelques flips) doit augmenter cette énergie libre. Rappelons que l'énergie libre s'écrit  $F = U - TS$ , où  $U$  est l'*énergie interne*,  $T$  la température et  $S$  l'*entropie*. Le terme d'énergie interne, qui correspond aux interactions locales entre atomes

<sup>4</sup>On considère alors la flip-accessibilité entre des pavages du même domaine.

(donc, d'un point de vue pavage, à des contraintes de voisinages entre tuiles), est généralement mal connu. Cependant, il devient négligeable devant le second terme aux hautes températures. On peut donc supposer que ce terme joue un rôle clé dans la formation des quasi-cristaux, d'une part parce que ceux-ci sont expérimentalement obtenus en refroidissement brutalement un matériau à haute température (donc on peut imaginer que la matière à haute température, et sa structure éventuelle, est "figée" par ce rapide refroidissement), d'autre part parce que l'entropie des quasi-cristaux est plus grande (de multiples réarrangements locaux sont possibles). Le lecteur intéressé par une discussion plus détaillée sur le sujet peut se référer, par exemple, aux articles [9, 11], ou encore au livre [71], déjà cité.

## 1.4 Résultats principaux

Revenons maintenant plus en détail sur les résultats principaux de cette thèse, brièvement exposés dans l'introduction.

Une première série de résultats concerne l'action des substitutions généralisées ou applications duales (brièvement introduites au paragraphe 1.2.2 et présentées plus en détail au chapitre 2) sur les plans et les surfaces en escalier, qui, à projection près, correspondent respectivement à des pavages par coupe et projection canonique et à des pavages canoniques, tous les deux de codimension 1. On peut aussi voir plans et surfaces en escalier comme des discrétisations respectivement de plans réels et, plus généralement, de surfaces.

Plus précisément, on donne au chapitre 3 une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'application duale d'un morphisme de groupe libre envoie un plan en escalier sur un plan en escalier (Th. 3.4). De plus, le plan en escalier image est caractérisé. Notons également que, dans le cas où le morphisme est une substitution (morphisme positif), la condition nécessaire et suffisante précédente est toujours satisfaite : un plan en escalier est toujours envoyé sur un plan en escalier. Ce résultat est en fait une extension de celui résumé par l'équation (1.5) dans le cas des mots sturmiens. Nous l'avons publié d'abord dans les actes [52] dans le cas de substitutions particulières, puis dans l'article [55] dans le cas de toutes les substitutions, et enfin dans l'article [15] dans le cas des morphismes de groupe libre.

On montre ensuite, au chapitre 5, un résultat analogue pour les surfaces en escalier, à savoir une condition simple pour qu'une surface soit envoyée par une application duale de morphisme sur une surface, condition qu'on montre être toujours vérifiée dans le cas d'une application duale de substitution (Th. 5.3). Soulignons que ce résultat a été obtenu grâce à la notion de *flip* (rappelée au paragraphe 1.3) : l'action des applications duales sur ces flips permettait de ramener le cas des surfaces au cas des plans (traité au chapitre 3). Plus précisément, le lien entre flips, surfaces

en escalier et plans en escalier est étudié au chapitre 4, où l'on montre notamment que toute surface peut s'obtenir en faisant une suite (éventuellement infinie) de flips sur un plan en escalier (Th. 4.16). En fait, il s'est avéré que la notion de flip, venue de la physique, pouvait être avantageusement remplacée par celle de *pseudo-flip*. En gros, les pseudo-flips permettent de s'affranchir de contrainte "réaliste" sur les flips (contraintes nécessaires pour modéliser la matière, mais pas pour étudier l'action d'applications duales de substitutions ou de morphismes). Nous avons introduit le lien entre flips et applications duales dans [54], puis dans l'article [3], où l'on prouve que l'image d'une surface en escalier par l'application duale d'une substitution est une surface en escalier. Nous avons ensuite étendu ce résultat dans l'article [15] au cas des applications duales de morphisme. Cet article a également introduit la notion de pseudo-flip, très utile pour simplifier les preuves de [3].

Une seconde série de résultats consiste à développer des liens entre les fractions continues multi-dimensionnelles, les applications duales de morphismes et les plans ou surfaces en escalier. On montre d'abord comment calculer le *développement de Brun* – un développement en fractions continues multi-dimensionnelles mentionné au paragraphe 1.2.3 et exposé plus en détail au chapitre 3 – du vecteur normal d'un plan en escalier. Les deux outils utilisés à cette fin sont, d'une part, les *applications duales*, d'autre part, une généralisation des *paliers*, tels que décrits au paragraphe 1.1.3 dans le cas des droites discrètes. Ces paliers permettent de lire une information partielle sur le vecteur normal d'un plan en escalier, information qui s'avère cependant suffisante à faire une étape du calcul du développement de Brun de ce vecteur normal (Chap. 3). L'intérêt de calculer le développement de Brun du vecteur normal d'un plan en escalier directement sur ce plan, c'est-à-dire sans supposer connu le vecteur normal mais simplement en "lisant" l'information dont on a besoin sur le plan, est qu'on peut alors étendre ceci au cas des surfaces en escalier. En effet, la notion de palier s'étend sans problème aux surfaces en escalier, et on a vu ci-dessus que les applications duales agissaient aussi sur les surfaces en escalier. Ceci permet alors de définir le développement de Brun d'une surface en escalier : c'est le développement qu'on obtient en procédant exactement comme sur un plan en escalier, bien que, soulignons-le, une surface en escalier n'ait pas de vecteur normal (en général). Les surfaces en escalier ayant le même développement de Brun qu'un plan en escalier donné sont aussi caractérisées (Th. 5.21). Le chapitre 5 expose ces résultats, que nous avons auparavant présentés dans [16] ainsi que dans l'article [15].

Enfin, au chapitre 6, nous adoptons un point de vue plus applicatif et montrons comment appliquer les résultats précédents aux problèmes de la génération et de la reconnaissance de plan. Une première approche pour engendrer un plan est d'itérer une application duale sur un morceau fini. Sous certaines conditions, on peut ainsi obtenir des morceaux arbitrairement grands du plan à engendrer (Th. 6.9). Cette approche a été présentée dans [52] et dans l'article [55]. Une autre ap-

proche consiste à engendrer un plan par des itérations d'une application duale *ad hoc* sur une surface en escalier quelconque (Th. 6.10). Enfin, une dernière approche concerne le cas des plans rationnels, c'est-à-dire dont les coordonnées du vecteur normal sont rationnelles. On montre alors comment utiliser les applications duales pour engendrer des *domaines fondamentaux* de tels plans, c'est-à-dire des morceaux finis, de taille minimale, qui permettent d'engendrer tout le plan par périodicité (Th. 6.14). Soulignons que les domaines fondamentaux obtenus ne sont généralement pas rectangulaire, mais ressembleraient plutôt à des ébauches de fractals (relativement réguliers cependant). En ce qui concerne la reconnaissance de plan, ce chapitre propose une extension de l'algorithme de reconnaissance de droite discrète décrit au paragraphe 1.1.3. Informellement, généralisant les développements de Brun de plans ou surfaces en escalier des chapitres précédents, on montre comment calculer une sorte de développement de Brun d'ensembles discrets finis (les *fonctions binaires*), la nature plane ou non de l'ensemble discret initial pouvant être déduite de ce développement (Th. 6.25). Nous avons soumis une version courte de ce chapitre ([56]).

# Chapitre 2

## Applications duales

On introduit ici l'outil fondamental de cette thèse, à savoir les *applications duales*, aussi appelées *substitutions généralisées*. Le paragraphe 2.1 présente la manière dont ont été initialement construites les applications duales : c'est en quelque sorte la genèse de cet outil. Le paragraphe 2.2 présente ensuite une définition légèrement plus générale des applications duales, qui sera celle utilisée dans la suite de cette thèse.

Soulignons qu'il y a une certaine redondance entre les deux paragraphes. En effet, le second paragraphe a été écrit de façon à ce qu'il puisse être lu indépendamment du premier, dont la lecture n'est pas strictement nécessaire à la compréhension de la suite de cette thèse (bien qu'elle apporte un éclairage sans doute utile - notamment sur l'origine de la dénomination "application duale").

### 2.1 Construction d'une application duale

La présentation donnée ici reprend, dans les grandes lignes, celle exposée dans [6] pour le cas des substitutions et étendue dans [48] aux cas des endomorphismes de groupe libre. On montre d'abord comment interpréter géométriquement un endomorphisme du groupe libre  $F_d$  comme une application linéaire sur les arêtes des hypercubes unités de  $\mathbb{R}^d$  (§2.1.1), puis on raisonne par dualité pour associer à cette application linéaire une application sur les hyperfaces de ces mêmes hypercubes (§2.1.2). Dans toute ce qui suit,  $(e_1, \dots, e_d)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ .

#### 2.1.1 Relèvement d'un morphisme

On montre ici comment associer à un endomorphisme  $\sigma$  du groupe libre  $F_d$  une application linéaire  $E_1(\sigma)$  agissant sur les arêtes des hypercubes unités de  $\mathbb{R}^d$ . Considérons d'abord le cas des substitutions sur les mots de l'alphabet  $\{1, \dots, d\}$ , plus naturel, avant de généraliser au cas des morphismes du groupe libre. On procède en

deux étapes.

La première étape consiste à associer une ligne brisée de l'espace  $\mathbb{R}^d$  à chaque mot sur l'alphabet  $\{1, \dots, d\}$ . Intuitivement, à un mot  $w = w_1 \cdots w_k$  sera associée une ligne brisée constitué de  $k$  segments unité, chaque segment correspondant à une lettre du mot et la direction du segment étant fonction de la lettre elle-même.

On note  $(\mathbf{x}, i)$  le segment d'extrémités  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \mathbf{e}_i$ . Soit alors  $\mathfrak{G}'$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre (abstrait) engendré par les segments, c'est-à-dire les combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de segments. Un élément de  $\mathfrak{G}'$  qui s'écrit comme une simple somme de segments distincts s'interprète alors géométriquement comme l'union de ces segments. C'est en particulier le cas du *relèvement* d'un mot  $w = w_1 \cdots w_k$ , qui est l'élément de  $\mathfrak{G}'$  noté  $\gamma(w)$  et défini par :

$$\gamma(w_1 \cdots w_k) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{f}(w_1 \cdots w_{i-1}), w_i). \quad (2.1)$$

**Exemple 2.1** *Considérons le mot  $w = 1213$ . On calcule :*

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= (\mathbf{f}(\varepsilon), 1) + (\mathbf{f}(1), 2) + (\mathbf{f}(12), 1) + (\mathbf{f}(121), 3) \\ &= (\mathbf{0}, 1) + (\mathbf{e}_1, 2) + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 1) + (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 3) \end{aligned}$$

La figure 2.1 représente l'interprétation géométrique de ce relèvement.

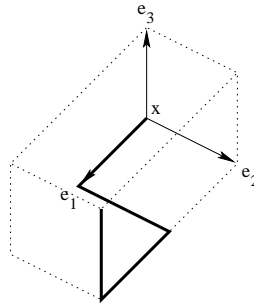


FIG. 2.1 – L'interprétation géométrique du relèvement d'un mot (ici 1213) est une ligne brisée de l'espace (traits gras).

La seconde étape consiste à associer à une substitution  $\sigma$  une application linéaire sur  $\mathfrak{G}'$ , notée  $E_1(\sigma)$ , qui agisse sur le relèvement d'un mot  $w$  comme  $\sigma$  agit sur le mot  $w$  lui-même, c'est-à-dire telle qu'on ait :

$$E_1(\sigma) \circ \gamma = \gamma \circ \sigma.$$

Un raisonnement par analyse-synthèse conduit, pour un segment  $(\mathbf{x}, i)$ , à la formule :

$$E_1(\sigma)(\mathbf{x}, i) = \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} (M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j). \quad (2.2)$$

On étend alors  $E_1(\sigma)$  à tout  $\mathfrak{G}'$  par linéarité. Soulignons que la matrice  $M_\sigma$  et l'image par  $E_1(\sigma)$  des segments  $(\mathbf{0}, 1), \dots, (\mathbf{0}, d)$  suffisent à caractériser  $E_1(\sigma)$  puisque l'image d'un segment  $(\mathbf{x}, i)$  s'obtient en translatant celle du segment  $(\mathbf{0}, i)$  par  $M_\sigma \mathbf{x}$ .

**Exemple 2.2** Soit  $\sigma$  la substitution (dite de Rauzy) définie sur  $F_3$  par :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 12, \\ 2 \mapsto 13, \\ 3 \mapsto 1. \end{cases}$$

On calcule, par exemple :

$$\sigma(12) = \sigma(1)\sigma(2) = 1213.$$

La matrice d'incidence de cette substitution est :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'application linéaire  $E_1(\sigma)$  associée à  $\sigma$  vérifie :

$$E_1(\sigma) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1) \mapsto (\mathbf{0}, 1) + (\mathbf{e}_1, 2), \\ (\mathbf{0}, 1) \mapsto (\mathbf{0}, 1) + (\mathbf{e}_1, 3), \\ (\mathbf{0}, 1) \mapsto (\mathbf{0}, 1). \end{cases}$$

On en déduit son action sur tout élément de  $\mathfrak{G}'$ . La figure 2.2 illustre l'interprétation géométrique de l'action de  $E_1(\sigma)$  sur un relèvement de mot.

La fin de ce paragraphe étend simplement au cas des morphismes ce qui a été fait ci-dessus pour les substitutions. Le principe est le même, seule les formules de relèvement sont modifiées.

Le relèvement d'un élément  $w$  de  $F_d$  est défini de sorte à être compatible avec le relèvement d'un mot et à vérifier  $\gamma(w \cdot w^{-1}) = 0$ . Si  $w$  s'écrit  $w = w_1^{\varepsilon_1} \cdots w_k^{\varepsilon_k}$  avec  $w_i \in \{1, \dots, d\}$  et  $\varepsilon_i = \pm 1$ , on calcule :

$$\gamma(w) = \sum_{i|\varepsilon_i=+1} (\mathbf{f}(w_1^{\varepsilon_1} \cdots w_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}), w_i) - \sum_{i|\varepsilon_i=-1} (\mathbf{f}(w_1^{\varepsilon_1} \cdots w_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}}) - \mathbf{e}_i, w_i). \quad (2.3)$$

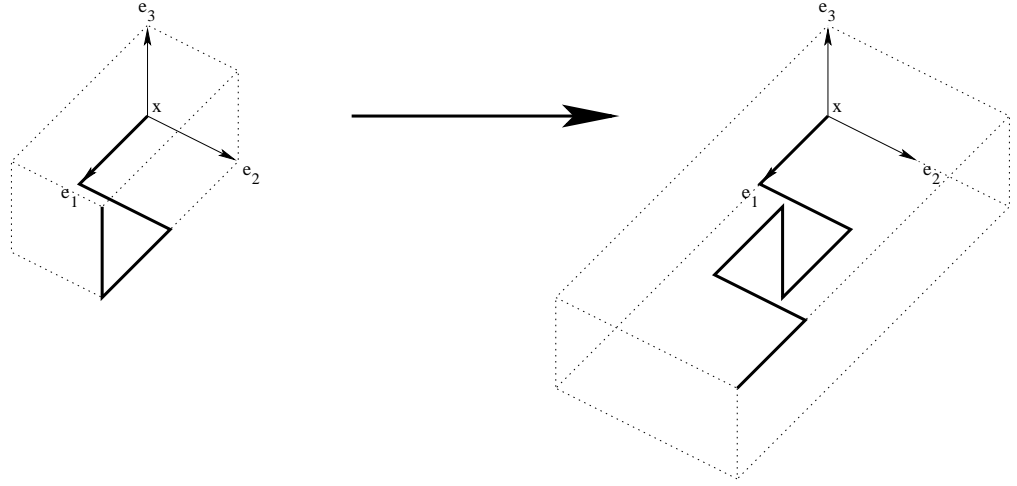


FIG. 2.2 – Action de l'application linéaire de l'exemple 2.2. Notons qu'on a bien :  $E_1(\sigma) \circ \gamma(1213) = \gamma \circ \sigma(1213) = \gamma(1213121)$ .

Le relèvement  $E_1(\sigma)$  d'un morphisme  $\sigma$  est alors l'application linéaire sur  $\mathfrak{G}'$  vérifiant la relation (2.2). On calcule, pour un segment  $(\mathbf{x}, i)$  :

$$E_1(\sigma)(\mathbf{x}, i) = \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} (M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j) - \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j^{-1} \cdot s} (M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_j, j). \quad (2.4)$$

On étend ensuite  $E_1(\sigma)$  à tout  $\mathfrak{G}'$  par linéarité. Ici encore, soulignons que la matrice  $M_\sigma$  et l'image par  $E_1(\sigma)$  des segments  $(\mathbf{0}, 1), \dots, (\mathbf{0}, d)$  suffisent à caractériser  $E_1(\sigma)$  puisque l'image d'un segment  $(\mathbf{x}, i)$  s'obtient en translatant celle du segment  $(\mathbf{0}, i)$  par  $M_\sigma \mathbf{x}$ .

### 2.1.2 Dual d'un relèvement

Raisonnons maintenant par dualité pour associer à l'application linéaire  $E_1(\sigma)$  une application duale  $E_1^*(\sigma)$  agissant sur les hyperfaces des hypercubes unités de  $\mathbb{R}^d$ .

Pour  $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ , la *face*  $(\mathbf{x}, i^*)$  est la forme linéaire sur  $\mathfrak{G}'$  qui vaut un sur le segment  $(\mathbf{x}, i)$  et zéro partout ailleurs. La face  $(\mathbf{x}, i^*)$  est donc *duale* du segment  $(\mathbf{x}, i)$ , et on note  $\mathfrak{F}'$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les faces, c'est-à-dire les combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de faces. Les deux ensembles  $\mathfrak{G}'$  et  $\mathfrak{F}'$  sont donc duaux.

L'application duale  $E_1^*(\sigma)$  de  $E_1(\sigma)$  est alors l'endomorphisme de  $\mathfrak{F}'$  vérifiant, pour tout segment  $(\mathbf{y}, j) \in \mathfrak{G}'$  et toute face  $(\mathbf{x}, i^*) \in \mathfrak{F}'$  :

$$\langle E_1(\sigma)(\mathbf{y}, j), (\mathbf{x}, i^*) \rangle = \langle (\mathbf{y}, j), E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i^*) \rangle,$$

où  $\langle , \rangle$  désigne le crochet de dualité. L'existence d'un tel endomorphisme n'est pas triviale, mais s'il existe, un calcul montre que l'image d'une face  $(\mathbf{x}, i^*)$  est alors nécessairement :

$$E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i^*) = \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p)), j^*) - \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i^{-1} \cdot s} (M_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p) + \mathbf{e}_j), j^*). \quad (2.5)$$

On en déduit aisément que  $E_1^*(\sigma)$  est bien définie sur  $\mathfrak{F}'$  si et seulement si, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ , on a  $M_\sigma^{-1}\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ . Cette condition équivaut à dire que  $M_\sigma$  appartient à  $\text{GL}(d, \mathbb{Z})$ , c'est-à-dire que  $\sigma$  est un morphisme unimodulaire. Soulignons que la matrice  $M_\sigma$  et l'image par  $E_1^*(\sigma)$  des faces  $(\mathbf{0}, 1^*), \dots, (\mathbf{0}, d^*)$  suffisent à caractériser  $E_1^*(\sigma)$  puisque l'image d'une face  $(\mathbf{x}, i^*)$  s'obtient en translatant celle de la face  $(\mathbf{0}, i^*)$  par  $M_\sigma^{-1}\mathbf{x}$ .

**Exemple 2.3** On vérifie aisément que la substitution  $\sigma$  introduite dans l'exemple 2.2 est unimodulaire (le déterminant de  $M_\sigma$  vaut +1), et on calcule :

$$M_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_1^*(\sigma) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1^*) \mapsto (\mathbf{0}, 1^*) + (\mathbf{0}, 2^*) + (\mathbf{0}, 3^*), \\ (\mathbf{0}, 2^*) \mapsto (-\mathbf{e}_3, 1^*), \\ (\mathbf{0}, 3^*) \mapsto (-\mathbf{e}_3, 2^*). \end{cases}$$

La figure 2.4 illustre l'action de  $E_1^*(\sigma)$  dans quelques cas simples.

Proposons maintenant une interprétation géométrique de ce qui précède. Rappelons que  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  et  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on interprète la face  $(\mathbf{x}, i^*)$  comme le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$  défini par :

$$\{\mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j, \lambda_j \in [0, 1]\}.$$

Il s'agit d'une hyperface du cube unité de  $\mathbb{R}^d$  de plus petit sommet  $\mathbf{x}$  (voir Fig. 2.3). Une simple somme de faces distinctes s'interprète alors géométriquement comme l'union des interprétations géométriques de ces faces. La figure 2.4 illustre cela.

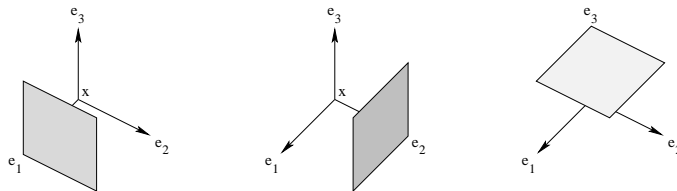


FIG. 2.3 – Interprétation géométrique des faces  $(\mathbf{x}, 1^*)$ ,  $(\mathbf{x}, 2^*)$  et  $(\mathbf{x}, 3^*)$ .

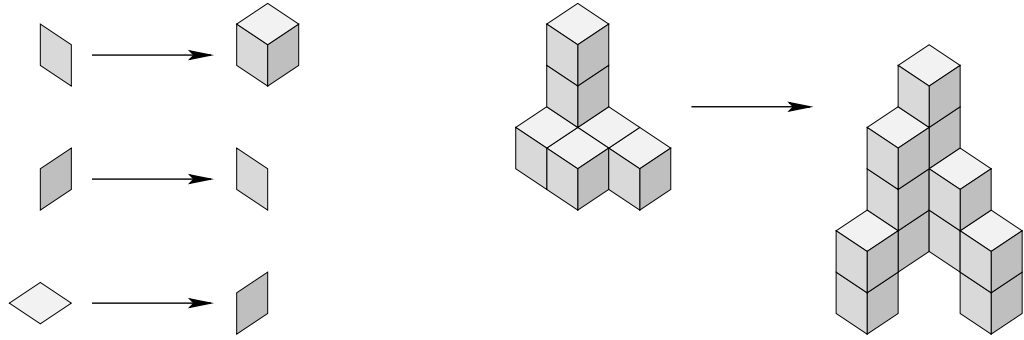


FIG. 2.4 – Action de l'application duale associée à la substitution unimodulaire  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  sur les faces de type 1, 2 et 3 (à gauche) et sur une fonction de  $\mathfrak{F}'$  qui a la propriété remarquable que tant elle que son image s'expriment comme de simples sommes de faces distinctes (à droite).

## 2.2 Définition générale et propriétés élémentaires

On définit ici les applications duales dans un cadre légèrement plus général qu'au paragraphe précédent. Plus précisément, au lieu de se restreindre aux sommes pondérées *finies* de faces ( $\mathbb{Z}$ -module libre  $\mathfrak{F}'$ ), on se place ici dans le cadre des sommes pondérées *infinies* de faces ( $\mathbb{Z}$ -module  $\mathfrak{F}$  défini ci-dessous). Formellement, il est commode de définir ces sommes comme des fonctions afin d'éviter toute ambiguïté sur la convergence de sommes infinies. Ceci conduit aux deux définitions suivantes (qui remplacent donc les définitions similaires données au paragraphe précédent) :

**Définition 2.4** *Le  $\mathbb{Z}$ -module des fonctions de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  dans  $\mathbb{Z}$  est noté  $\mathfrak{F}$ . Le support d'une fonction de  $\mathfrak{F}$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  où cette fonction est non nulle. On note  $|\mathcal{F}|$  le cardinal du support de  $\mathfrak{F}$ .*

**Définition 2.5** *Soit  $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ . La face de type  $i$  localisée en  $\mathbf{x}$ , notée  $(\mathbf{x}, i^*)$ , est la fonction de  $\mathfrak{F}$  valant un en  $(\mathbf{x}, i)$  et zéro partout ailleurs. Géométriquement, la face  $(\mathbf{x}, i^*)$  est interprétée comme le compact de  $\mathbb{R}^d$  défini par :*

$$\{\mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j \mid 0 \leq \lambda_j \leq 1\}.$$

Une fonction  $\mathcal{F}$  de  $\mathfrak{F}$  peut donc aussi être vue comme une somme pondérée (dans  $\mathbb{Z}$ ) de faces, puisqu'on a :

$$\mathcal{F} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}} \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) (\mathbf{x}, i^*).$$

Notons que l'interprétation géométrique d'une face  $(\mathbf{x}, i^*)$  est une l'hyperface du cube unité de plus petit sommet  $\mathbf{x}$  (voir Fig. 2.3, plus haut). Une simple somme de

faces distinctes est alors naturellement interprétée géométriquement comme l'union des interprétations géométriques de ces faces. Plus généralement, on introduit les fonctions suivantes :

**Définition 2.6** Une fonction de  $\mathfrak{F}$  est dite binaire si elle est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . On note  $\mathfrak{B}$  l'ensemble des fonctions binaires. L'interprétation géométrique d'une fonction binaire  $\mathcal{B}$  est alors l'union des interprétations géométriques des faces  $(\mathbf{x}, i^*)$  telles que  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, i) = 1$ . On appelle également morceau d'une fonction binaire  $\mathcal{B}$  toute fonction binaire inférieure à  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire dont l'interprétation géométrique est incluse dans celle de  $\mathcal{B}$ .

Par exemple, les fonctions représentées figure 2.4 sont toutes binaires.

Introduisons maintenant la notion d'application duale (rappelons que les notions de matrice d'incidence et d'application de Parikh ont été définies au chapitre 1) :

**Définition 2.7** Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire, c'est-à-dire dont la matrice d'incidence  $M_\sigma$  a un déterminant égal à  $\pm 1$ . L'application duale associée à  $\sigma$ , notée  $E_1^*(\sigma)$ , est l'endomorphisme de  $\mathfrak{F}$  défini pour tout  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$  par :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}) : (\mathbf{x}, i) \mapsto \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j) - \sum_{j|\sigma(i)=p \cdot j^{-1} \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_j, j),$$

où  $\mathbf{f}$  désigne l'application de Parikh.

Notons que la valeur de  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$  en un point  $(\mathbf{x}, i)$  est la somme (pondérée) des valeurs de  $\mathcal{F}$  en un nombre fini de points. En particulier, cette valeur est donc finie, ce qui assure que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$  appartient à  $\mathfrak{F}$  et que la définition est bien cohérente.

Un calcul simple donne alors l'image d'une face  $(\mathbf{x}, i^*)$  par l'application duale  $E_1^*(\sigma)$  :

$$E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i^*) = \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p)), j^*) - \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i^{-1} \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(p) + \mathbf{e}_j), j^*). \quad (2.6)$$

On retrouve donc la formule (2.5) du paragraphe précédent, ce qui montre bien que la définition 2.7 ne fait qu'étendre à  $\mathfrak{F}$  la notion d'application duale précédemment obtenue sur  $\mathfrak{F}'$  (les fonctions de  $\mathfrak{F}$  à support fini). Par ailleurs, soulignons que cette formule permet, par linéarité, de calculer facilement l'image de toute fonction de  $\mathfrak{F}$  à support fini. Plus généralement, on montre :

**Proposition 2.8** L'application duale d'un morphisme unimodulaire  $\sigma$  est entièrement caractérisée par la matrice  $M_\sigma^{-1}$  et son action sur les faces  $(\mathbf{0}, 1^*), \dots, (\mathbf{0}, d^*)$ .

*Preuve.* Soit  $E_1^*(\sigma)$  l'application duale d'un morphisme unimodulaire  $\sigma$ . Soit  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  est une face, le résultat découle de la formule ci-dessus. Par linéarité, c'est encore vrai si  $\mathcal{F}$  est une combinaison linéaire de faces. Si maintenant  $\mathcal{F}$  est quelconque, comme la valeur de  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$  en un point  $(\mathbf{x}, i)$  dépend de la valeur de  $\mathcal{F}$  en un nombre fini de points, il suffit de prendre une combinaison linéaire de faces qui soit égale à  $\mathcal{F}$  en tous ces points pour en déduire le résultat.  $\square$

On vérifie facilement que la définition suivante introduit bien une distance sur  $\mathfrak{F}$  :

**Définition 2.9** On note  $d_{\mathfrak{F}}$  la distance sur  $\mathfrak{F}$  définie par :

$$d_{\mathfrak{F}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = 2^{-\sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall (\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}, \|\mathbf{x}\| \leq n \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) = \mathcal{F}'(\mathbf{x}, i)\}}.$$

**Remarque 2.10** Deux fonctions binaires sont d'autant plus proches que la boule de centre zéro sur laquelle correspondent leurs interprétations géométriques est grande.

Les applications duales vérifient alors une propriété remarquable :

**Proposition 2.11** L'application duale d'un morphisme unimodulaire est continue sur  $\mathfrak{F}$  pour la topologie définie par  $d_{\mathfrak{F}}$ .

*Preuve.* Soit  $E_1^*(\sigma)$  l'application duale d'un morphisme unimodulaire  $\sigma$ . Notons que pour tout  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ , la valeur de  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})$  en un point  $(\mathbf{x}, i)$  ne dépend que des valeurs de  $\mathcal{F}$  sur des points  $(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p), j)$  où  $p$  est un préfixe de  $\sigma(i)$ . En introduisant une constante  $K > 0$  telle que :

$$\|M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}(p)\| \leq \|M_\sigma\| \|\mathbf{x}\| + K,$$

on en déduit, pour tout  $A \in \mathbb{N}$  :

$$d_{\mathfrak{F}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \leq 2^{-(\|M_\sigma\|A + K)} \Rightarrow d_{\mathfrak{F}}(E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}), E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}')) \leq 2^{-A},$$

ce qui assure la continuité de  $E_1^*(\sigma)$ .  $\square$

La proposition suivante est à mettre en rapport avec la formule (1.2) :

**Proposition 2.12** Si  $\mathcal{F}$  est une fonction de  $\mathfrak{F}$  à support fini, on note  $\mathbf{f}(\mathcal{F})$  le vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  dont la  $i$ -ème coordonnée, notée  $|\mathcal{F}|_i$ , est définie par :

$$|\mathcal{F}|_i = \text{Card}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) > 0\}) - \text{Card}(\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}, i) < 0\}).$$

On a alors, pour tout morphisme unimodulaire  $\sigma$  :

$$\mathbf{f}(E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})) = {}^t M_\sigma \mathbf{f}(\mathcal{F}).$$

*Preuve.* On vérifie que la formule est exacte quand  $\mathcal{F}$  est une face  $(\mathbf{x}, i^*)$ . Par linéarité, la formule est alors exacte pour toute combinaison linéaire de faces, c'est-à-dire pour toute fonction  $\mathfrak{F}$  à support fini.  $\square$

En particulier, la taille du support de  $\mathcal{F}$  est alors la somme des  $|\mathcal{F}|_i$ , c'est-à-dire  $\|\mathbf{f}(\mathcal{F})\|_1$ . Terminons ce chapitre par une dernière propriété élémentaire :

**Proposition 2.13** *Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux morphismes unimodulaires, alors on a :*

$$E_1^*(\sigma \circ \tau) = E_1^*(\tau) \circ E_1^*(\sigma).$$

*Preuve.* Pour les fonctions à support fini, le résultat découle, par dualité, de la propriété suivante des relèvements de morphisme introduits au paragraphe 2.1 :

$$E_1(\sigma \circ \tau) = E_1(\sigma) \circ E_1(\tau).$$

Le résultat s'étend ensuite à tout  $\mathfrak{F}$  par continuité.  $\square$



# Chapitre 3

## Développement de plan en escalier

Le premier paragraphe de ce chapitre définit formellement les *plans en escalier*, montre comment ils sont liés aux plans arithmétiques discrets introduits dans [95], et étudie l'action des applications duales de morphismes et de substitutions sur ces plans. Ces résultats ont été publiés dans [55] (cas des substitutions) et [15] (cas des morphismes). Ensuite, le paragraphe 3.2 rappelle la notion de développement de Brun d'un vecteur réel – une des possibles extension multi-dimensionnelles des développements en fraction continues. Le lien avec les applications duales est finalement fait au paragraphe 3.3, où l'on montre notamment comment calculer le développement de Brun du vecteur normal d'un plan en escalier directement à partir de ce plan, sans supposer connu ce vecteur normal, ceci grâce à la notion de *palier* qui permet de lire une certaine information sur un plan en escalier. On parle simplement de développement de Brun d'un plan en escalier. Ceci correspond à un travail exposé dans [15].

### 3.1 Plan en escalier

#### 3.1.1 Définition

**Définition 3.1** *Le plan en escalier de vecteur normal  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et d'intercept  $\rho \in \mathbb{R}$  est la fonction binaire notée  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$  définie par :*

$$\mathcal{P}_{\alpha,\rho}(\mathbf{x}, i) = 1 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \alpha \rangle,$$

où  $\langle . | . \rangle$  désigne le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^d$ . L'ensemble des plans en escalier est noté  $\mathfrak{P}$ . On a donc la chaîne d'inclusions (strictes) suivante :  $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ .

La figure 3.1 illustre cette notion dans le cas  $d = 3$ .

La proposition suivante explicite le lien entre plans en escalier et géométrie discrète :

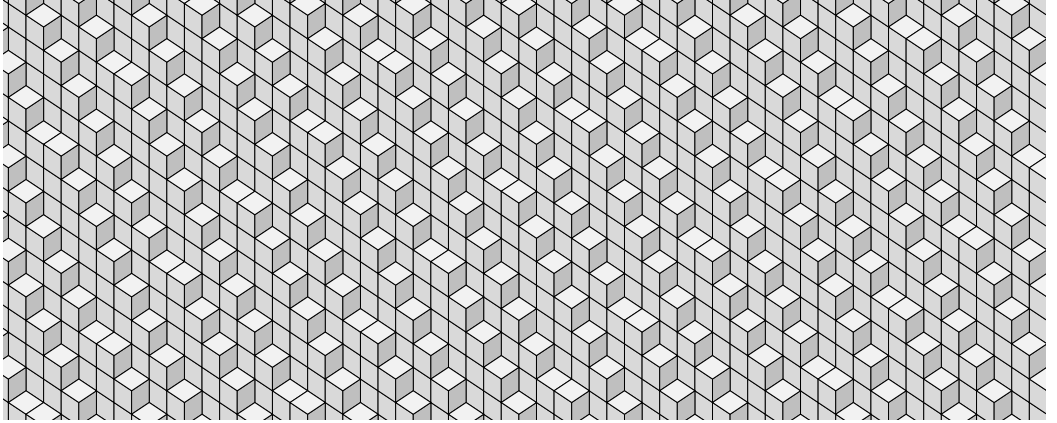


FIG. 3.1 – Interprétation géométrique du plan en escalier  $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$ .

**Proposition 3.2** Soit  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Le sous-ensemble  $V(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho})$  de  $\mathbb{Z}^d$  constitué des sommets des faces du plan en escalier  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho}$  vérifie :

$$\mathbf{y} \in V(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho}) \Leftrightarrow \rho \leq \langle \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho + \alpha_1 + \dots + \alpha_d.$$

Selon la terminologie introduite dans [95],  $V(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho})$  est un plan discret de caractéristiques  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ , de borne inférieure  $\rho$  et d'épaisseur arithmétique  $\omega = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ . Un tel plan discret est dit standard.

*Preuve.* Un vecteur  $\mathbf{y}$  appartenant à l'hyperface de cube unité associé à une face  $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i^*)$  de  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha},\rho}$  vérifie :

$$\mathbf{y} \in \left\{ \mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j, \lambda_j \in [0, 1] \right\}.$$

Si  $\mathbf{y}$  est un sommet, donc appartient à  $\mathbb{Z}^d$ , ceci assure l'existence d'un ensemble  $J \subset \{1, \dots, d\}$ ,  $i \notin J$ , tel que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i + \sum_{j \in J} \mathbf{e}_j.$$

On calcule alors :

$$\langle \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j \geq \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq \rho,$$

$$\langle \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + \alpha_i + \sum_{j \in J} \alpha_j \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + \sum_{k=1}^d \alpha_k < \rho + \sum_{k=1}^d \alpha_k,$$

ce qui prouve l'encadrement annoncé. Inversement, si cet encadrement est vérifié, alors on peut donc définir le plus petit entier  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que :

$$\langle \mathbf{y} - \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{y} - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{e}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

ce qui montre, en posant  $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \sum_{k=1}^i \alpha_k$ , qu'on a bien  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$ .  $\square$

Notons aussi que les paramètres d'un plan en escalier vérifient la propriété suivante :

**Proposition 3.3** Soit  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathcal{P}_{\lambda \boldsymbol{\alpha}, \rho} = \mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \frac{\rho}{\lambda}}.$$

### 3.1.2 Image par une application duale

Le théorème suivant, bien qu'un peu technique, est fondamental. Il caractérise l'action des applications duales sur les plans en escalier.

**Théorème 3.4** Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire et  $E_1^*(\sigma)$  l'application duale qui lui est associée. Soit  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Si  $M_\sigma^\top \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$ , alors  $E_1^*(\sigma)$  envoie le plan en escalier  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$  sur le plan en escalier  $\mathcal{P}_{M_\sigma^\top \boldsymbol{\alpha}, \rho}$ . Si, par contre,  $M_\sigma^\top \boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{R}_+^d$ , alors  $E_1^*(\sigma)$  envoie le plan en escalier  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$  sur une fonction qui n'est pas binaire.

*Preuve.* Considérons la fonction  $\mathcal{E} = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho})$ . Fixons  $(\mathbf{y}, j) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  et calculons  $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j)$ . Soit  $l$  la longueur de  $\sigma(j)$ . On note :  $\sigma(j) = u_1 \dots u_l$ . Chaque élément  $(\mathbf{x}, i)$  de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  tel que  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$  contribue à :

- incrémenter la valeur de  $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j)$  de 1 si et seulement si il existe  $k \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $u_k = i$  et  $\mathbf{y} = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(u_1 \dots u_{k-1}))$ ;
- décrémenter la valeur de  $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j)$  de 1 si et seulement si il existe  $k \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $u_k = i^{-1}$  et  $\mathbf{y} = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(u_1 \dots u_{k-1}) + \mathbf{e}_i)$ .

En introduisant  $\mathbf{r}_k = M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(u_1 \dots u_k)$ , pour  $0 \leq k \leq l$ , le premier cas donne :

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(i) = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(u_k) = \mathbf{r}_k,$$

tandis que le second cas donne :

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{k-1} - \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(i^{-1}) = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{f}(u_k) = \mathbf{r}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{k-1}.$$

Puisque  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$  si et seulement si  $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , on calcule alors :

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = \text{Card}(\{k \mid \langle \mathbf{r}_{k-1} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{r}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle\}) - \text{Card}(\{k \mid \langle \mathbf{r}_k | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{r}_{k-1} | \boldsymbol{\alpha} \rangle\}).$$

Une récurrence sur  $l = |\sigma(j)|$  montre alors que, si  $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , on a :

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement, si  $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , on a :

$$\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = \begin{cases} -1 & \text{si } \langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \rho \geq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, remarquons qu'on a :

$$\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle M_\sigma \mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{y} | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(\sigma(i)) | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle M_\sigma (\mathbf{y} + \mathbf{e}_i) | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{y} + \mathbf{e}_i | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle.$$

Nous pouvons maintenant conclure. Si  ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$ , alors  $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , et ce qui précède montre que  $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = 1$  si et seulement si  $\langle \mathbf{y} | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{y} + \mathbf{e}_i | {}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha}, \rho}$ . Inversement,  ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{R}_+^d$  entraîne qu'il existe  $i$  tel que  $\langle \mathbf{r}_0 | \boldsymbol{\alpha} \rangle > \langle \mathbf{r}_l | \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , et ce qui précède montre alors qu'il existe une face  $(\mathbf{y}, j^*)$  telle que  $\mathcal{E}(\mathbf{y}, j) = -1$ . En particulier, ceci assure que  $\mathcal{E}$  n'est pas binaire.  $\square$

La figure 3.2 illustre ce théorème. Soulignons qu'une application duale envoie chaque face sur une combinaison linéaire de faces - notamment avec des coefficients possiblement négatifs. Ce sont des phénomènes d'annulation ou de compensation entre les coefficients de ces faces qui font que, finalement, on obtient bien un plan en escalier (sous la condition exprimée dans l'énoncé du théorème).

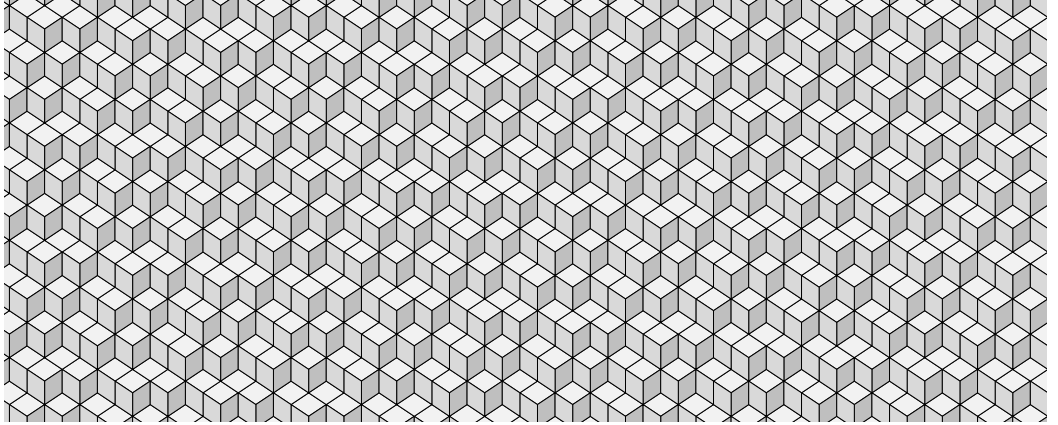


FIG. 3.2 – Le théorème 3.4 assure que l'application duale du morphisme unimodulaire  $\beta : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2^{-2}1, 3 \mapsto 3$  envoie le plan en escalier  $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$  de la figure 3.1 sur le plan en escalier  $\mathcal{P}_{(9,6,10),0}$ , dont l'interprétation géométrique est ici représentée.

Soulignons également qu'il découle du théorème 3.4 que l'action d'une application duale sur un plan en escalier ne dépend que de sa matrice d'incidence. Ainsi, si

$\sigma$  et  $\tau$  sont deux morphismes unimodulaires tels que  $M_\sigma = M_\tau$ , ils agiront exactement de la même manière sur les plans en escalier, bien qu'ils agissent différemment sur les faces de ces plans (ceci découle de la définition d'une application duale).

La remarque suivante propose une analogie utile avec le cas continu :

**Remarque 3.5** Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ . On a :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle M_\sigma^{-1} \mathbf{x} | {}^t M_\sigma \alpha \rangle = 0.$$

En d'autres termes, la matrice  $M_\sigma^{-1}$  envoie un hyperplan réel de vecteur normal  $\alpha$  sur un hyperplan réel de vecteur normal  ${}^t M_\sigma \alpha$ . Il y a donc une analogie entre l'action d'une application duale d'un morphisme  $\sigma$  sur les plans en escaliers (Théorème 3.4 et celle de l'application linéaire  $M_\sigma^{-1}$  sur les plans réels. Intuitivement, l'application duale  $E_1^*(\sigma)$  est ainsi une sorte de discrétisation de l'application linéaire  $M_\sigma^{-1}$ . Rappelons d'ailleurs que la matrice  $M_\sigma^{-1}$  joue un rôle clé dans la caractérisation de l'action de  $E_1^*(\sigma)$  (voir la formule 2.6 et la proposition 2.8, Chap. 2).

Notons qu'on peut aussi donner du théorème 5.3 une formulation simplifiée ; peut-être plus parlante :

**Théorème 3.6** Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire. Si l'image par  $E_1^*(\sigma)$  d'un plan en escalier est binaire, alors c'est un plan en escalier. En d'autres termes :

$$E_1^*(\sigma)(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}.$$

Pour finir ce paragraphe, soulignons que si  $\sigma$  est un morphisme dont la matrice d'incidence est positive - ce qui est notamment le cas quand  $\sigma$  est une substitution - alors tout vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  est envoyé par  ${}^t M_\sigma$  sur un vecteur de  $\mathbb{R}_+^d$ . On déduit donc du théorème 3.4 :

**Corollaire 3.7** Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire dont la matrice d'incidence est positive. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors, l'application duale  $E_1^*(\sigma)$  envoie le plan en escalier  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  sur le plan en escalier  $\mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \alpha, \rho}$ .

## 3.2 Développement de Brun d'un vecteur

Ce paragraphe est consacré à présenter l'algorithme de Brun et quelques-unes de ses propriétés élémentaires (notamment la caractérisation des développements finis). Le lecteur peut consulter [22] ou [102] pour un exposé plus complet des propriétés de cet algorithme.

### 3.2.1 Algorithme de Brun vectoriel

**Définition 3.8** L'application de Brun, notée  $T$ , est l'application de  $[0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  dans  $[0, 1]^d$  définie en  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  par :

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, \frac{1}{\alpha_i} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_i} \right\rfloor, \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_d}{\alpha_i} \right),$$

où  $i = \min\{j \mid \alpha_j = \|\alpha\|_\infty\}$ .

**Remarque 3.9** Dans le cas  $d = 1$ , l'application de Brun n'est rien d'autre que la classique application de Gauss, définie de  $]0, 1[$  dans  $[0, 1]$  par :

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Rappelons que l'application de Gauss permet de définir le développement en fraction continue d'un réel. De la même manière, l'application de Brun permet de définir une extension multi-dimensionnelle de ce développement :

**Définition 3.10** Le développement de Brun d'un vecteur réel  $\alpha \in [0, 1]^d$  est la suite  $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{N}^* \times \{1, \dots, d\}$  définie, tant que  $T^n(\alpha) \neq \mathbf{0}$ , par :

$$a_n = \lfloor \|T^n(\alpha)\|_\infty^{-1} \rfloor \quad \text{et} \quad i_n = \min\{j \mid \langle T^n(\alpha) | e_j \rangle = \|T^n(\alpha)\|_\infty\}.$$

On écrit :  $\alpha = [(a_0, i_0), (a_1, i_1), \dots]$ .

**Exemple 3.11** Un développement de Brun peut être fini, (ultimement) périodique ou apériodique, comme le montrent les développements suivant dans le cas  $d = 2$  :

$$\left( \frac{3}{19}, \frac{25}{76} \right) = [(3, 2), (6, 1), (4, 1), (1, 2)],$$

$$\left( \sqrt{2} - 1, \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) = [(2, 1), (2, 1), (1, 2), (1, 2), \overline{(1, 1), (4, 1)}],$$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right) = [(1, 2), (1, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1) \dots].$$

**Remarque 3.12** Notons qu'avec le formalisme général introduit au paragraphe 1.2.3, l'algorithme de Brun est celui défini par la partition dénombrable  $X_0 \cup (X_{a,i})_{(a,i) \in \mathbb{N}^* \times \{1, \dots, d\}}$  de l'ensemble  $X = [0, 1]^d$ , définie par  $X_0 = \{\mathbf{0}\}$  et :

$$(x_1, \dots, x_d) \in X_{a,i} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i > x_j \text{ pour } j < i, \\ x_i \geq x_j \text{ pour } j > i, \\ \lfloor 1/x \rfloor = a. \end{cases}$$

Comme pour les fractions continues classiques, un vecteur de  $[0, 1]^d$  est entièrement caractérisé par son développement de Brun. On sait aussi caractériser les vecteurs ayant un développement fini :

**Théorème 3.13** *Un vecteur  $\alpha \in [0, 1]^d$  admet un développement de Brun fini si et seulement si toutes ses coordonnées sont rationnelles.*

*Preuve.* L'équivalence suivante se déduit facilement de la définition 3.8 :

$$T(\alpha) \in \mathbb{Q}^d \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}^d.$$

Donc si  $\alpha \in [0, 1]^d$  admet un développement de Brun fini, alors toutes ses coordonnées sont rationnelles. Inversement, soit  $\alpha \in [0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$ . Montrons qu'il existe une valeur de  $n$  tel que  $T^n(\alpha) = \mathbf{0}$ . Tant que  $\|T^n(\alpha)\|_\infty < 1$ , le lemme 3.14 (ci-dessous) assure que la suite des plus petits communs multiples des dénominateurs de  $T^n(\alpha)$  décroît strictement. Or, si le plus petit commun multiple des dénominateurs de  $T^n(\alpha)$  vaut 1, alors  $T^n(\alpha) \in \{0, 1\}^d$ , et donc  $\|T^n(\alpha)\|_\infty = 1$ . Donc, pour  $n$  assez grand, on a  $\|T^n(\alpha)\|_\infty = 1$ . Ensuite, il n'est pas difficile de voir que si  $\|T^n(\alpha)\|_\infty = 1$ , alors  $T^{n+1}(\alpha)$  aura une coordonnée nulle de plus que  $T^n(\alpha)$  (la première qui vaut 1 dans  $T^n(\alpha)$ ). De plus, si la  $j$ -ème coordonnée de  $T^n(\alpha)$  est nulle, alors la  $j$ -ème coordonnée de  $T^{n+1}(\alpha)$  l'est aussi. Donc il y a au plus  $d$  valeurs de  $n$  telles que  $\|T^n(\alpha)\|_\infty = 1$ , et donc on a bien  $T^n(\alpha) = \mathbf{0}$  pour  $n$  assez grand.  $\square$

**Lemme 3.14** *Soit  $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ . On suppose que  $\alpha$ , et donc  $T(\alpha)$ , n'ont que des coordonnées rationnelles, et on note  $p(\alpha)$  (resp.  $p(T(\alpha))$ ) le plus petit commun multiple des dénominateurs des coordonnées de  $\alpha$  (resp.  $T(\alpha)$ ). Alors, on a :*

$$p(T(\alpha)) \leq \|\alpha\|_\infty p(\alpha).$$

*Preuve.* On note  $p_j/q_j$  la  $j$ -ème coordonnée de  $\alpha$ , pour  $j = 1, \dots, d$ . Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $\alpha_i = \|\alpha\|_\infty$ . Comme, par définition,  $q_i$  divise  $p(\alpha)$ , remarquons d'abord que  $\|\alpha\|_\infty p(\alpha) = p_i p(\alpha)/q_i$  est un entier, multiple de  $p_i$ . Considérons alors la  $i$ -ème coordonnée de  $T(\alpha)$ . Elle vaut :

$$\frac{q_i}{p_i} - \left\lfloor \frac{q_i}{p_i} \right\rfloor,$$

dont le dénominateur divise  $p_i$ , et donc divise le multiple de  $p_i$  qu'est  $\|\alpha\|_\infty p(\alpha)$ . Considérons maintenant la  $j$ -ème coordonnée de  $T(\alpha)$ , pour  $j \neq i$ . Elle vaut :

$$\frac{p_j q_i}{q_j p_i}.$$

Notons que comme  $q_j$  divise  $p(\alpha)$ , la décomposition en facteurs premiers de  $p(\alpha)/q_i$  contient tous les facteurs de  $q_j$  sauf ceux communs entre  $q_j$  et  $q_i$ . Or la décomposition

en facteurs premiers du dénominateur de  $q_i/q_j$  est justement formée des facteurs de  $q_j$  moins ceux communs entre  $q_j$  et  $q_i$ . Donc le dénominateur de  $q_i/q_j$  divise  $p(\boldsymbol{\alpha})/q_i$ . On en déduit que le dénominateur de la  $j$ -ème coordonnée de  $T(\boldsymbol{\alpha})$  divise  $p_i p(\boldsymbol{\alpha})/q_i$ , c'est-à-dire divise  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty p(\boldsymbol{\alpha})$ . Le résultat suit.  $\square$

### 3.2.2 Formulation matricielle

Soit  $(a, i) \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, d\}$ . Introduisons la matrice  $(d+1) \times (d+1)$  définie par :

$$B_{a,i} = \begin{pmatrix} a & & 1 & & \\ & I_{i-1} & & & \\ 1 & & 0 & & \\ & & & & I_{d-i} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où  $I_p$  désigne la matrice identité  $p \times p$  et où tous les coefficients non précisés sont implicitement égaux à zéro. On vérifie facilement que  $B_{a,i}$  appartient au groupe linéaire  $GL(d+1, \mathbb{Z})$  (son déterminant vaut  $-1$ ).

Considérons maintenant un vecteur  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Un calcul simple montre qu'en posant  $i = \min\{j \mid \alpha_j = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\}$  et  $a = \lfloor \alpha_i^{-1} \rfloor$ , on a :

$$(1, \boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty B_{a,i}(1, T(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.2)$$

où, si  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $(1, \mathbf{u})$  désigne le vecteur  $(1, u_1, \dots, u_n)$ . Notons que comme  $B_{a,i}$  est inversible, on peut aussi écrire l'équation précédente ainsi :

$$(1, T(\boldsymbol{\alpha})) = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^{-1} B_{a,i}^{-1}(1, \boldsymbol{\alpha}). \quad (3.3)$$

Ces formules permettent donc de définir matriciellement l'application de Brun  $T$ .

En particulier, si  $\boldsymbol{\alpha}$  admet un développement de Brun  $(a_n, i_n)_n$ , l'équation (3.2) donne, pour tout indice  $n$  du développement :

$$(1, \boldsymbol{\alpha}) = \mu_n B_n(1, T^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})), \quad (3.4)$$

où  $\mu_n = \|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty$  et  $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$ . Ceci permet de préciser les notions de *convergence faible* et de *convergent* dans le cas des développements de Brun. Une preuve de la proposition suivante est donnée dans [22] :

**Proposition 3.15** *Si  $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$ , alors son développement de Brun  $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$  est faiblement convergent, c'est-à-dire qu'il vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ s.t. } (n \geq N, \mathbf{u} \in [0, 1]^d) \Rightarrow \|(1, \boldsymbol{\alpha}) - \mu_n B_n(1, \mathbf{u})\| \leq \varepsilon,$$

où  $\mu_n = \|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty$  et  $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$ .

La faible convergence permet d'approximer un vecteur réel par une suite de vecteurs rationnels dont toutes les coordonnées ont le même dénominateur (on parle d'*approximation simultanée*). En effet, si  $\alpha \in [0, 1]^d$  a pour développement de Brun la suite  $(a_n, i_n)_n$ , son *n-ème convergent* est le vecteur de  $\mathbb{Z}^{d+1}$  défini par :

$$(q_n, \mathbf{p}_n) = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}(1, \mathbf{0}). \quad (3.5)$$

La proposition 3.15 assure alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(q_n, \mathbf{p}_n) = (1, \alpha). \quad (3.6)$$

On en déduit, en divisant les  $d$  dernières coordonnées par  $\mu_n q_n$  (qui tend vers 1) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p}_n}{q_n} = \alpha.$$

**Exemple 3.16** Le 12<sup>ème</sup> convergent de  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$  est  $(1533, 1084, 1204)$ . On vérifie :

$$\left\| \left( \frac{1084}{1533}, \frac{1204}{1533} \right) - \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right) \right\|_{\infty} \leq 10^{-5}.$$

### 3.3 Développement de Brun d'un plan

#### 3.3.1 Substitutions de Brun

**Définition 3.17** Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \{1, \dots, d\}$ . La substitution de Brun associée au couple  $(a, i)$ , notée  $\beta_{a,i}$ , est définie sur les mots sur  $\{1, \dots, d+1\}$  par :

$$\beta_{a,i} : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^a \cdot (i+1), \\ (i+1) & \mapsto 1, \\ j & \mapsto j. \end{cases}$$

On vérifie que la matrice d'incidence de  $\beta_{a,i}$  est la matrice  $B_{a,i}$  introduite par l'équation (3.1). Il s'agit donc d'une substitution unimodulaire, et on calcule :

$$E_1^*(\beta_{a,i}) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1^*) & \mapsto (\mathbf{0}, (i+1)^*) + \sum_{k=0}^{a-1} (-k \mathbf{e}_{i+1}, 1^*), \\ (\mathbf{0}, (i+1)^*) & \mapsto (-a \mathbf{e}_{i+1}, 1^*), \\ (\mathbf{0}, j^*) & \mapsto (\mathbf{0}, j^*). \end{cases}$$

La figure 3.3 illustre l'action de ces applications duales.

L'équation suivante découle alors directement du théorème 3.4 et de l'équation (3.2), en remarquant que  $B_{a,i}$  est symétrique :

$$E_1^*(\beta_{a,i})(\mathcal{P}_{\|\alpha\|_{\infty}(1, T(\alpha)), \rho}) = \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}. \quad (3.7)$$

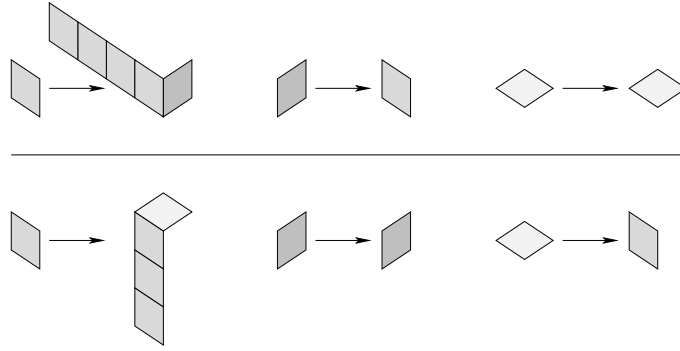


FIG. 3.3 – Action des l’applications duales  $E_1^*(\beta_{4,1})$  (en haut) et  $E_1^*(\beta_{3,2})$  (en bas) sur les faces  $(\mathbf{0}, 1^*)$ ,  $(\mathbf{0}, 2^*)$  et  $(\mathbf{0}, 3^*)$ .

La proposition 2.13 permet également de déduire de l’équation (3.4) :

$$E_1^*(\beta_n)(\mathcal{P}_{\mu_n(1, T^{n+1}(\alpha)), \rho}) = \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}, \quad (3.8)$$

où  $\mu_n = \|T^0(\alpha)\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\alpha)\|_\infty$  et  $\beta_n = \beta_{a_n, i_n} \circ \dots \circ \beta_{a_0, i_0}$ .

De plus, soulignons que les substitutions de Brun sont inversibles. En effet, on calcule :

$$\beta_{a,i}^{-1} : \begin{cases} 1 & \mapsto (i+1), \\ (i+1) & \mapsto (i+1)^{-a} \cdot 1, \\ j & \mapsto j. \end{cases}$$

L’application duale associée est alors :

$$E_1^*(\beta_{a,i}^{-1}) : \begin{cases} (\mathbf{0}, 1^*) & \mapsto (a\mathbf{e}_1, (i+1)^*), \\ (\mathbf{0}, (i+1)^*) & \mapsto (\mathbf{0}, 1^*) - \sum_{k=1}^a (k\mathbf{e}_1, (i+1)^*), \\ (\mathbf{0}, j^*) & \mapsto (\mathbf{0}, j^*). \end{cases}$$

Toujours grâce au théorème 3.4, l’équation (3.3) donne alors :

$$\mathcal{P}_{\|\alpha\|_\infty(1, T(\alpha)), \rho} = E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}). \quad (3.9)$$

Les équations ci-dessus montrent donc que l’action de l’application de Brun  $T$  sur un vecteur  $\alpha$  peut être interprétée comme l’action d’une application duale sur un plan en escalier de vecteur normal  $(1, \alpha)$ .

### 3.3.2 Paliers d’un plan

Introduisons la notion de *palier* d’une fonction binaire (Déf. 2.6) :

**Définition 3.18** Soit  $i \neq j$  deux entiers de  $\{1, \dots, d\}$ . Un  $(i, j)$ -palier d’une fonction binaire  $\mathcal{B}$  est une suite maximale de faces adjacentes de type  $i$ , alignées dans

la direction  $\mathbf{e}_j$ , et dont l'interprétation géométrique est incluse dans celle de  $\mathcal{B}$ . Un  $(i, j)$ -palier s'écrit donc :

$$\sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*),$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{Z}$ . On note alors respectivement  $a_{i,j}^-(\mathcal{P})$  et  $a_{i,j}^+(\mathcal{P})$  l'infimum et le supremum des tailles des  $(i, j)$ -paliers de  $\mathcal{P}$ .

Dans la suite de ce paragraphe, on considère les paliers de plans en escalier. La figure 3.4 illustre cela. Soulignons qu'un  $(i, j)$ -palier peut être de taille infinie ; par exemple, on vérifie que tous les  $(1, i)$ -paliers d'un plan en escalier de vecteur normal  $(1, \mathbf{0})$  sont infinis. On a donc, *a priori*,  $a_{i,j}^\pm(\mathcal{P}) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

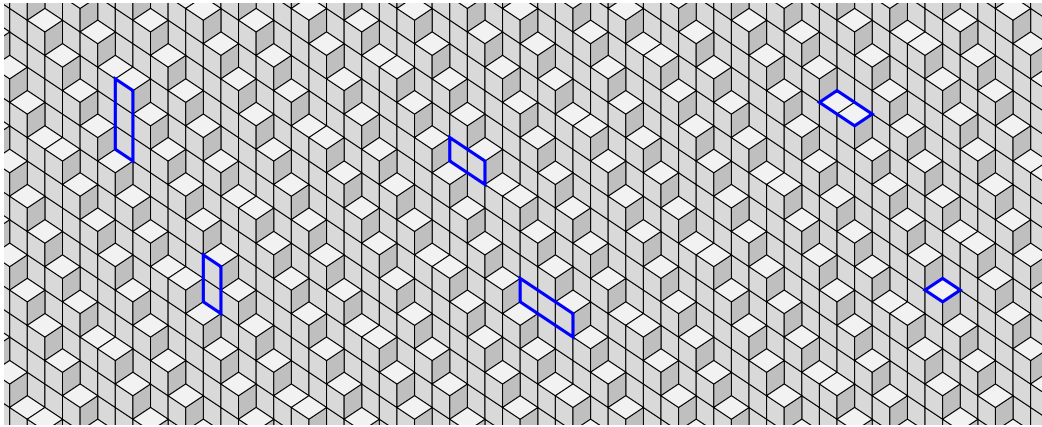


FIG. 3.4 – Ce plan en escalier a des  $(1, 3)$ -paliers de taille 2 ou 3 (encadrés, à gauche), des  $(1, 2)$ -paliers de taille 2 ou 3 (au centre) et des  $(3, 2)$ -paliers de taille 1 ou 2 (à droite). Tous les autres paliers sont de taille 1.

L'intérêt des paliers est qu'ils permettent de "lire" directement sur un plan en escalier des informations sur son vecteur normal. Plus précisément, on montre :

**Proposition 3.19** Soit  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Pour  $\alpha_j \neq 0$ , on a :

$$a_{i,j}^-(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}) = \max(\lfloor \alpha_i / \alpha_j \rfloor, 1) \quad \text{et} \quad a_{i,j}^+(\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}) = \max(\lceil \alpha_i / \alpha_j \rceil, 1)$$

*Preuve.* Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  et  $I \subset \mathbb{Z}$  tels que la fonction  $\mathcal{K}$  définie ci-dessous soit un  $(i, j)$ -palier de  $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \rho}$  :

$$\mathcal{K} = \sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*).$$

Supposons que  $I$  contienne un intervalle  $[a, b]$ , de longueur  $b - a + 1$ . On a alors :

$$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_j, i) = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + a\alpha_j < \rho \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + a\alpha_j + \alpha_i,$$

$$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_j, i) = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + b\alpha_j < \rho \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + b\alpha_j + \alpha_i.$$

On en déduit :

$$(b - a)\alpha_j < \rho - \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \alpha_i,$$

soit, pour  $\alpha_j \neq 0$  :

$$b - a + 1 < \frac{\alpha_i}{\alpha_j} + 1.$$

Ce qui majore la longueur de  $I$ . On peut donc écrire  $I = [a, b]$ . On a alors :

$$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_j, i) = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + (a - 1)\alpha_j < \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + a\alpha_j < \rho,$$

et on en déduit :

$$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x} + (a - 1)\mathbf{e}_j, i) = 0 \Rightarrow \rho > \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + (a - 1)\alpha_j + \alpha_i.$$

De même, on montre :

$$\rho \leq \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle + (b + 1)\alpha_j + \alpha_i.$$

Finalement, on a :

$$(a - 1)\alpha_j + \alpha_i < \rho - \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq (b + 1)\alpha_j,$$

soit, pour  $\alpha_j \neq 0$  :

$$b - a + 1 > \frac{\alpha_i}{\alpha_j} - 1.$$

La longueur de  $I$  est donc minorée. En conclusion, on a montré :

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} - 1 < a_{i,j}^-(\mathcal{P}_{\alpha, \rho}) \leq a_{i,j}^+(\mathcal{P}_{\alpha, \rho}) < \frac{\alpha_i}{\alpha_j} + 1.$$

Le résultat annoncé en découle (le maximum découlant de la définition d'un palier, qui est nécessairement de taille au moins 1 par maximalité).  $\square$

En particulier, cette proposition assure que, pour  $i$  et  $j$  fixés, la taille des  $(i, j)$ -paliers prend au plus deux valeurs. Ceci généralise un résultat analogue bien connu pour les droites discrètes.

### 3.3.3 Algorithme de Brun géométrique

On montre ici que la notion de palier définie au paragraphe précédent permet de définir directement sur un plan en escalier de normale  $(1, \alpha)$  une application permettant de calculer le développement de Brun du vecteur  $\alpha$ .

Introduisons d'abord les deux sous-ensembles de  $\mathfrak{P}$  suivants :

$$\mathfrak{P}_{\exists} = \{\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho} \mid \alpha \in [0, 1]^d, \rho \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_{\forall} = \{\mathcal{P}_{(1, 0), \rho} \mid \rho \in \mathbb{R}\}.$$

On déduit aisément de l'équation (3.9) que ces deux ensembles peuvent aussi s'écrire :

$$\mathfrak{P}_{\exists} = \{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} \mid \exists a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{P}) \in \mathfrak{P}\},$$

$$\mathfrak{P}_{\forall} = \{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} \mid \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{P}) \in \mathfrak{P}\}.$$

Ceci explique notamment le choix des notations  $\mathfrak{P}_{\exists}$  et  $\mathfrak{P}_{\forall}$ .

On utilise ensuite les paliers pour définir deux fonctions particulières sur  $\mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$  :

**Définition 3.20** Soit  $\mathcal{P}$  un plan en escalier  $\mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$ . On définit :

$$i(\mathcal{P}) = \min_{1 \leq i \leq d} \{i \mid \max_{1 \leq j \leq d} a_{j+1, i+1}^+(\mathcal{P}) \geq 1\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}) = a_{1, i(\mathcal{P})+1}^-(\mathcal{P}).$$

La proposition suivante se déduit alors facilement de la proposition 3.19, et assure notamment que les fonctions  $a$  et  $i$  sont bien définies sur tout  $\mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$  :

**Proposition 3.21** Soit  $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

$$i(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\alpha\|_{\infty}\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = \lfloor \|\alpha\|_{\infty}^{-1} \rfloor.$$

**Exemple 3.22** Soit  $(1, \alpha, \beta)$  le vecteur normal (inconnu) du plan en escalier  $\mathcal{P}$  de la figure 3.4. On "lit" sur le plan  $\mathcal{P}$  :

$$a_{2,2}^-(\mathcal{P}) = 1, \quad a_{2,3}^-(\mathcal{P}) = 0, \quad a_{3,2}^-(\mathcal{P}) = 1, \quad a_{3,3}^-(\mathcal{P}) = 1.$$

On en déduit  $i(\mathcal{P}) = 2$ , puis  $a(\mathcal{P}) = a_{1,3}^-(\mathcal{P}) = 2$ , c'est-à-dire  $\alpha < \beta$  et  $\lfloor \beta^{-1} \rfloor = 2$ .

Les fonctions  $a$  et  $i$  ont donc deux propriétés remarquables. D'une part, leur définition sur un plan repose uniquement sur les paliers de ce plan et non sur son vecteur normal. D'autre part, l'information qu'elles donnent sur le vecteur normal d'un plan est exactement celle nécessaire à calculer l'image de ce vecteur par l'application de Brun  $T$  (Déf. 3.8). On définit alors :

**Définition 3.23** L'application de Brun géométrique, notée  $\tilde{T}$ , est l'application définie sur un plan en escalier  $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$  par :

$$\tilde{T}(\mathcal{P}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{P}), i(\mathcal{P})}^{-1})(\mathcal{P}).$$

La proposition 3.21 et l'équation (3.9) assurent alors que  $\tilde{T}$  est à valeurs dans  $\mathfrak{B}_\exists$ . Plus précisément, on a :

**Proposition 3.24** *Soit  $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :*

$$\tilde{T}(\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}) = \mathcal{P}_{\|\alpha\|_\infty T(1,\alpha),\rho}.$$

Ainsi, l'application  $\tilde{T}$  permet de calculer le développement d'un vecteur  $\alpha$  à partir d'un plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$ . En effet, si  $(a_n, i_n)_n$  désigne le développement de Brun de  $\alpha$ , on a, pour tout  $\rho \in \mathbb{R}$  :

$$a_n = a(\tilde{T}^n(\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho})) \quad \text{et} \quad i_n = i(\tilde{T}^n(\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho})). \quad (3.10)$$

Par extension, on appelle aussi *développement de Brun* du plan  $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$  la suite  $(a_n, i_n)_n$ . Soulignons que, contrairement à un vecteur, un plan n'est pas totalement caractérisé par son développement de Brun (à cause du paramètre  $\rho$ ). La figure 3.5 illustre le calcul du développement de Brun d'un plan en escalier.

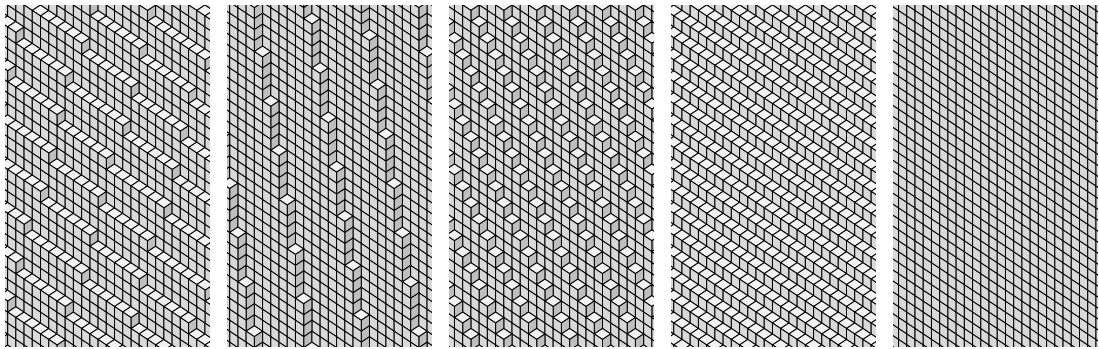


FIG. 3.5 – Applications itérées de  $\tilde{T}$  sur un plan en escalier  $\mathcal{P}$  (de gauche à droite). Le développement de Brun de  $\mathcal{P}$  est alors la suite définie par  $(a(\tilde{T}^n(\mathcal{P})), i(\tilde{T}^n(\mathcal{P})))_n$ . Ici, on obtient le même développement que celui du vecteur  $(1/19, 25/76)$  : on en déduit que le plan  $\mathcal{P}$  est un plan de vecteur normal  $(1, 1/19, 25/76)$ .

# Chapitre 4

## Flips : des plans aux surfaces

Ce chapitre joue le rôle de charnière entre le chapitre précédent et le chapitre suivant. On commence par rappeler la notion de *surface en escalier*, introduite par D. Jamet dans [70] et on montre quelques propriétés élémentaires associées. On définit alors la notion de *flip* en utilisant le formalisme introduit aux chapitres précédents. On montre alors que toute surface en escalier peut être obtenue comme une suite de flips effectués sur un plan en escalier (Th. 4.16). Nous avons publié ce résultat dans l'article [3]. On introduit une nouvelle variante du flip, le *pseudo-flip*, qui conduit à des résultats proches de ceux concernant les flips, mais plus simples à montrer et suffisant pour les besoins du chapitre suivant (Th. 4.20 et 4.21). Ceci a été décrit dans l'article [15] (soumis).

### 4.1 Surfaces en escalier

#### 4.1.1 Pavages canoniques de codimension un

La propriété suivante découle facilement de la définition d'un plan en escalier (Déf. 3.1) et de son interprétation géométrique :

**Proposition 4.1** *Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors, le plan en escalier  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  est la somme des faces dont l'interprétation géométrique est incluse dans la "tranche" de  $\mathbb{R}^d$  définie par :*

$$\rho + \alpha^\perp + [0, 1]^d.$$

Autrement dit, un plan en escalier peut être vu comme une discrétisation par des faces d'hypercubes d'une coupe de  $\mathbb{R}^d$  par un espace affine de codimension 1. On montre également (voir [19]) :

**Proposition 4.2** *Soit  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors, la projection orthogonale sur  $\mathbf{u}^\perp$ , notée  $\pi$ , est un homéomorphisme de l'interprétation géométrique du plan en escalier  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  sur l'hyperplan  $\mathbf{u}^\perp$ .*

Notamment, il découle de la proposition précédente qu'en projetant l'interprétation géométrique de tout plan en escalier par  $\pi$ , on obtient un pavage de l'hyperplan  $\mathbf{u}^\perp$  par les proto-tuiles  $T_1, \dots, T_d$ , où  $T_i$  est le compact obtenu en projetant par  $\pi$  l'interprétation géométrique de la face  $(\mathbf{0}, i^*)$ . Plus précisément, le pavage obtenu est un pavage canonique de codimension 1, ou encore, un pavage  $d \rightarrow d - 1$  (voir Déf. 1.9). Par exemple, la figure 3.1 peut être vue comme un pavage par trois proto-tuiles en forme de losange (identiques à rotation d'angle  $2\pi/3$  près).

Cependant, soulignons qu'il est clair qu'on ne peut obtenir tous les pavages canoniques de codimension 1 comme des projections de plan en escalier (de telles projections sont très régulières, ce qui n'est pas nécessairement le cas d'un pavage canonique). Ceci conduit à généraliser la notion de plan en escalier par celle de *surface en escalier*, introduite dans [70] comme suit :

**Définition 4.3** Soit  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$ . Une surface en escalier est une fonction binaire  $\mathcal{S}$  dont l'interprétation géométrique est homéomorphe à  $\mathbf{u}^\perp$  par la projection orthogonale sur  $\mathbf{u}^\perp$ , notée  $\pi$ .

Un plan en escalier est donc un cas particulier de surface en escalier. La figure 4.1 représente une surface en escalier dont il est facile de se convaincre que ce n'est pas un plan en escalier. On peut résumer ceci par la chaîne d'inclusions (strictes) suivante :

$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}.$$

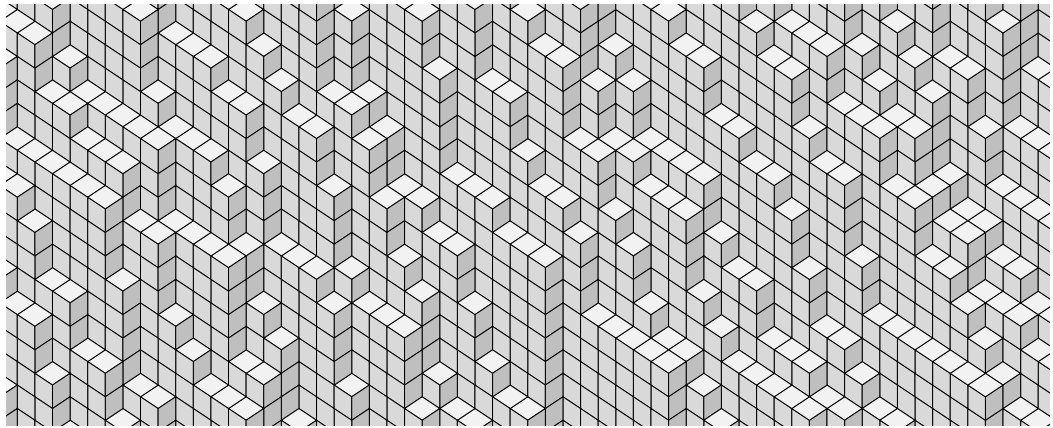


FIG. 4.1 – Interprétation géométrique d'une surface en escalier de  $\mathbb{R}^3$  (qui n'est pas un plan en escalier). En projetant sur l'hyperplan  $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^\perp$ , on obtient un pavage du plan par trois types de losanges (proto-tuiles).

Intuitivement, un plan en escalier correspond aux faces d'hypercubes unités obtenues en prenant une "tranche droite" de  $\mathbb{R}^d$  (c'est le sens de la proposition 4.1)

alors qu'une surface en escalier correspond à une "tranche courbe" de  $\mathbb{R}^d$ .

Notons qu'on montre alors, en s'inspirant des travaux de Thurson dans le cas fini (voir [107], que tout pavage canonique de codimension 1 par les proto-tuiles  $T_1, \dots, T_d$ , où  $T_i$  est le compact obtenu en projetant par  $\pi$  de l'interprétation géométrique de la face  $(\mathbf{0}, i^*)$ , s'obtient comme projection par  $\pi$  d'une surface en escalier (unique à translation selon  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$  près). Plus précisément si  $\mathcal{T}$  est un tel pavage, on définit sur les sommets de ce pavage (c'est-à-dire les sommets des tuiles) une fonction  $h_{\mathcal{T}}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}^d$ , appelée *fonction de hauteur*, en posant  $h_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0) = 0$  pour un sommet  $\mathbf{x}_0$  fixé (quelconque) de  $\mathcal{T}$  et, pour tous sommets  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathcal{T}$  reliés par une arête qui est la projection d'un vecteur  $\mathbf{e}_i$  (toutes les arêtes du pavage sont de ce type),  $h_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}) - h_{\mathcal{T}}(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i$ . On vérifie que cette définition est cohérente par induction sur la taille d'un cycle d'arêtes du pavage. Une preuve plus détaillée de ceci est donnée dans [3].

### 4.1.2 Propriétés élémentaires

Commençons par définir les *sommets* d'une surface en escalier :

**Définition 4.4** *Soit  $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$  une surface en escalier. Alors, l'ensemble des sommets de  $\mathcal{S}$ , noté  $V(\mathcal{S})$ , est l'ensemble des sommets des faces de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire les vecteurs entiers appartenant à l'interprétation géométrique de  $\mathcal{S}$ .*

On montre (voir, par exemple, [3]) :

**Proposition 4.5** *Une surface en escalier  $\mathcal{S}$  est entièrement caractérisée par l'ensemble  $V(\mathcal{S})$  de ses sommets.*

La propriété suivante, plus délicate, sera souvent utile :

**Proposition 4.6** *Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux sommets distincts d'une surface en escalier, alors  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  n'est ni strictement positif ni strictement négatif.*

*Preuve.* Supposons que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  soient deux sommets d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$  tels que  $\mathbf{y} - \mathbf{x} > 0$  (le cas  $\mathbf{y} - \mathbf{x} < 0$  étant similaire). Une surface étant connexe, il n'est pas difficile de voir qu'il existe une suite  $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$  de sommets de  $\mathcal{S}$  tels que  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}$  et, pour tout  $n$ ,  $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = \mathbf{e}_{i_{n+1}}$ , pour  $i_n \in \{1, \dots, d\}$ . On déduit de  $\mathbf{y} - \mathbf{x} > 0$  qu'on a :

$$\{i_1, \dots, i_N\} = \{1, \dots, d\}.$$

Considérons alors la suite croissante d'entiers  $(r(k))_{1 \leq k \leq d}$ , où  $r(k)$  est défini par :

$$r(k) = \min\{n \mid \text{Card}(\{i_1, \dots, i_n\}) = k\}.$$

Montrons qu'on peut supposer sans restriction de généralité que  $r(d) = d$ . On montre qu'on peut supposer que pour  $k = 1, \dots, d$ , on peut supposer  $r(k) = k$ . Par définition,  $r(1) = 1$ . Pour  $d = 2$ , quitte à remplacer  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{x}_{r(2)-2}$ , qui vérifie aussi  $\mathbf{y} - \mathbf{x}_{r(2)-2} > 0$ , on peut supposer  $r(2) = 2$ . Supposons maintenant qu'on ait  $r(k) < k$ . Quitte à prendre un  $k$  plus petit, on peut en fait supposer  $r(k) = k - 1$ . Considérons alors les trois sommets de  $\mathcal{S}$  suivants :

$$\mathbf{x}_{r(k)-2}, \quad \mathbf{x}_{r(k)-1} = \mathbf{x}_{r(k)-2} + \mathbf{e}_{i_{r(k)-1}}, \quad \mathbf{x}_{r(k)} = \mathbf{x}_{r(k)-2} + \mathbf{e}_{i_{r(k)-1}} + \mathbf{e}_{i_{r(k)}}.$$

La définition de  $r(k)$  assure qu'on a  $i_{r(k)-1} \neq i_{r(k)}$ . On vérifie alors que le sommet suivant est aussi un sommet de  $\mathcal{S}$  (c'est le quatrième sommet d'une "sous-face" de dimension 2 d'une face de  $\mathcal{S}$  – rappelons qu'on est ici dans le cas  $d \geq 3$ ) :

$$\mathbf{x}_{r(k)-2} + \mathbf{e}_{i_{r(k)}}.$$

En remplaçant  $\mathbf{x}_{r(k)-1}$  par ce point, ce qui revient à échanger  $\mathbf{e}_{i_{r(k)-1}}$  et  $\mathbf{e}_{i_{r(k)}}$ , on obtient une nouvelle suite de sommets de  $\mathcal{S}$  reliant  $\mathbf{x}_0$  à  $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}$  qui vérifie  $r(k) = k$ . En procédant ainsi pour  $k = 1, \dots, d$ , on obtient finalement un chemin tel que  $r(d) = d$ . On a alors  $\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{i_d} = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_d$ , et donc  $\pi(\mathbf{x}_d) = \pi(\mathbf{x}_0)$ . Ceci montre que  $\pi$  n'est pas injective sur  $\mathcal{S}$ , ce qui contredit la définition d'une surface en escalier. Le résultat en découle.  $\square$

**Définition 4.7** La hauteur d'un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  est le réel  $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{u} \rangle$ . Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux vecteurs entiers tels que  $\pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{y})$ , on dit alors que  $\mathbf{x}$  est au-dessus de  $\mathbf{y}$  si  $h(\mathbf{x}) \geq h(\mathbf{y})$  et en dessous si  $h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{y})$ .

En particulier, notons que la proposition 4.6 entraîne que deux sommets distincts d'une surface en escalier ne sont jamais l'un au-dessus de l'autre. On dit alors que  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  est au-dessus d'une surface en escalier s'il est au-dessus d'un sommet de cette surface, et qu'une surface en escalier est au-dessus d'une autre si chacun des sommets de la première surface est au-dessus de la seconde surface. Comme, de plus, deux faces distinctes ne peuvent s'intersecter que sur leurs frontières, ceci permet de définir deux opérations simples sur les surfaces en escalier :

**Définition 4.8** Soit  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux surfaces en escalier. On note  $\mathcal{S} \wedge \mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$  les surfaces en escalier dont les sommets sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S} \wedge \mathcal{S}') &= \{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S}) \cup V(\mathcal{S}') \mid \mathbf{x} \text{ est en dessous de } \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{S}'\}, \\ V(\mathcal{S} \vee \mathcal{S}') &= \{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S}) \cup V(\mathcal{S}') \mid \mathbf{x} \text{ est au-dessus de } \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{S}'\}. \end{aligned}$$

Plus intuitivement, l'interprétation géométrique de  $\mathcal{S} \wedge \mathcal{S}'$  (resp.  $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ ) est ce qu'on voit si on regarde "du dessous" (resp. "du dessus") les interprétations géométriques de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{S}'$  (représentées sur une même figure). La figure 4.2 illustre l'opération  $\wedge$ .

On introduit alors les surfaces particulière suivantes (voir Fig. 4.3) :

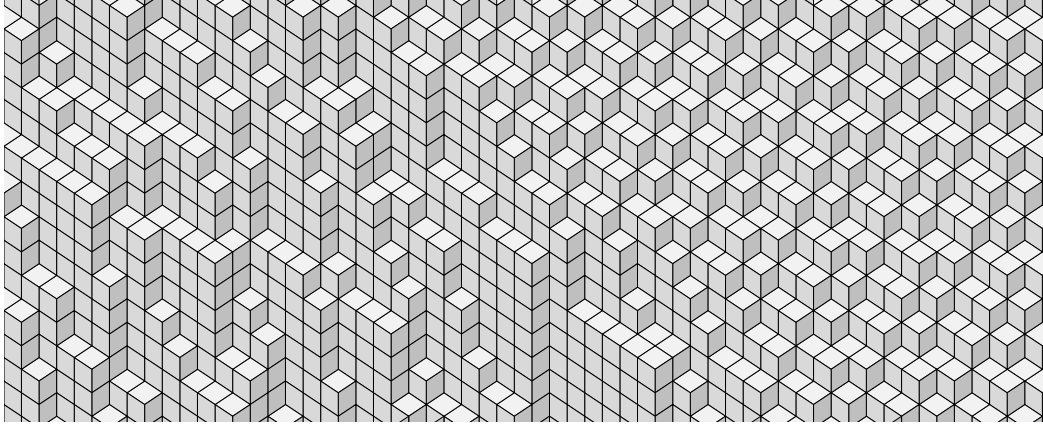


FIG. 4.2 – Interprétation géométrique de la surface en escalier  $\mathcal{P} \wedge \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  sont les surfaces en escalier respectivement représentés par les figures 3.2 et 4.1.

**Définition 4.9** Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ . Soit  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$  et  $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$  les surfaces en escalier définies par :

$$\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq d} \mathcal{P}_{\mathbf{e}_i, x_i} \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} = \bigvee_{1 \leq i \leq d} \mathcal{P}_{\mathbf{e}_i, x_i}.$$

Ces surfaces sont respectivement appelées coin sortant et coin rentrant.

En particulier,  $\mathbf{x}$  est un sommet de  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$  et  $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ . De plus, on déduit de la proposition 4.6 que toute surface en escalier dont  $\mathbf{x}$  est un sommet est à la fois au-dessus de  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$  et en dessous de  $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$ . Toute surface en escalier  $\mathcal{S}$  vérifie donc l'équation :

$$\mathcal{S} = \bigvee_{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S})} \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} = \bigwedge_{\mathbf{x} \in V(\mathcal{S})} \check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}. \quad (4.1)$$

Ceci permet d'ailleurs de montrer que la réciproque de la proposition 4.6 est vraie : si deux vecteurs entiers  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont tels que  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  n'est ni strictement positif ni strictement négatif, alors ce sont des sommets d'une surface en escalier puisque, par exemple, la surface  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}} \vee \hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{y}}$  convient.

Pour conclure cette section, montrons que  $\mathfrak{S}$  est fermé dans  $\mathfrak{F}$  pour la topologie induite par la distance  $d_{\mathfrak{F}}$  (Déf. 2.9) :

**Proposition 4.10** L'ensemble  $\mathfrak{S}$  des surfaces en escalier est fermé.

*Preuve.* Soit  $(\mathcal{S}_n)_n$  une suite convergente de surfaces en escalier de limite  $\mathcal{S}$ . Pour tout  $R \geq 0$ , il existe  $N \geq 0$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{S}$  coïncide sur  $B_R = \{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\} \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$ . En particulier,  $\pi$  est donc un homéomorphisme de la restriction de  $\mathcal{S}$  à  $B_R$  sur son image, qui contient une boule de  $\mathbf{u}^\perp$

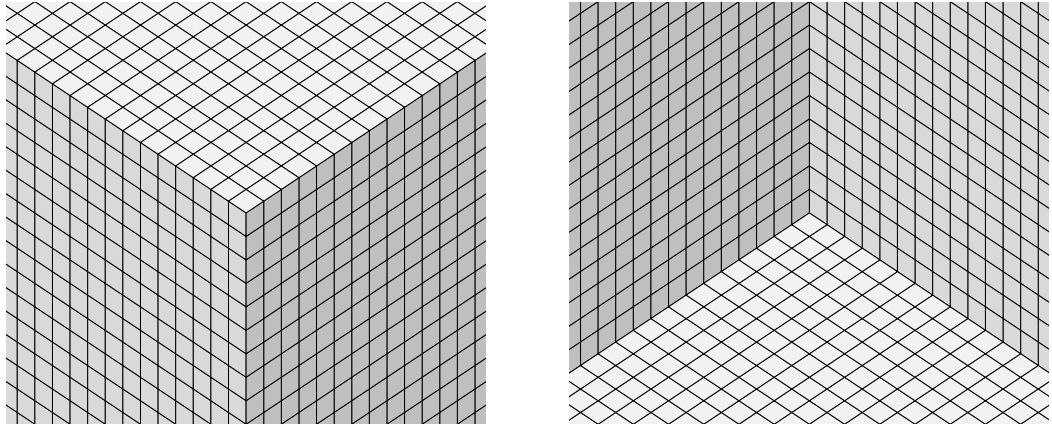


FIG. 4.3 – Le coin sortant  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$  (à gauche) et le coin rentrant  $\check{\mathcal{C}}_{\mathbf{x}}$  (à droite). Le vecteur  $\mathbf{x}$  est un sommet de ces coins, plus précisément c'est “le sommet” (au sens usuel du terme) de chacun de ces coins.

de rayon  $R$ . Ceci valant pour tout  $R$ , on en déduit que  $\pi$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbf{u}^\perp$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{S}$  est une surface en escalier.  $\square$

*A contrario*, soulignons que l'ensemble des plans en escalier n'est pas fermé, comme l'illustre la figure 4.4.

## 4.2 Flips

### 4.2.1 Flip-accessibilité

On utilise ici le formalisme des fonctions de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  dans  $\mathbb{Z}$  (c'est-à-dire l'ensemble  $\mathfrak{F}$ ) pour donner un équivalent en termes de surfaces en escalier de la notion de flip, définie au chapitre 1. Plus précisément, on définit :

**Définition 4.11** *Le flip localisé en  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  est la fonction  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}} \in \mathfrak{F}$  définie par :*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^d (\mathbf{x}, i^*) - \sum_{i=1}^d (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i, i^*).$$

On dit alors qu'on *fait un flip ascendant* (resp. *descendant*) en  $\mathbf{x}$  sur une surface en escalier  $\mathcal{S}$  si on ajoute (resp. soustrait)  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$  à  $\mathcal{S}$  de telle sorte que la fonction  $\mathcal{S} \pm \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$  obtenue soit binaire. Comme  $\pi$  est clairement un homéomorphisme de  $(\mathbf{x}, 1^*) + \dots + (\mathbf{x}, d^*)$  sur  $(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1, 1^*) + \dots + (\mathbf{x} - \mathbf{e}_d, d^*)$ , la fonction obtenue est alors

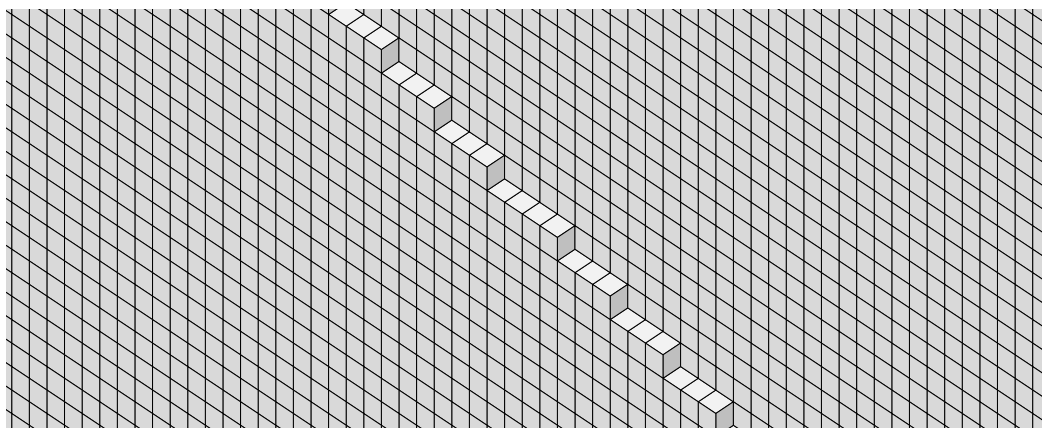


FIG. 4.4 – La suite de plans  $(\mathcal{P}_{n,1,\pi}, 0)_{n \geq 1}$  converge vers la surface en escalier représentée ici, qui n'est pas un plan en escalier.

en fait encore une surface en escalier. On en déduit que l'ensemble des surfaces en escalier est stable par flips. Soulignons que faire un flip sur une surface en escalier correspond bien à faire un flip classique sur le pavage canonique de codimension 1 associé cette surface en escalier (voir, par exemple, Fig. 4.5).

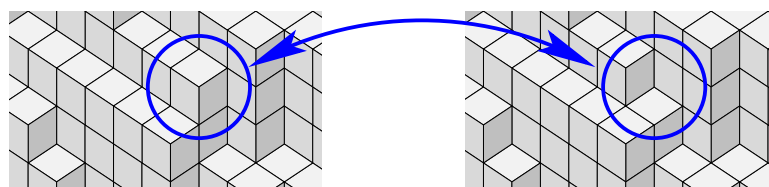


FIG. 4.5 – Faire un flip ascendant (resp. descendant) sur une surface en escalier, c'est ajouter (resp. retrancher) une fonction  $\mathcal{F}_x$  de sorte à obtenir une nouvelle surface (ici, flip ascendant de gauche à droite, descendant dans l'autre sens).

Définissons maintenant la notion de *flip-accessibilité* en s'inspirant de la notion correspondante introduite sur les pavages :

**Définition 4.12** Une surface en escalier  $\mathcal{S}'$  est dite flip-accessible à partir d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$  s'il existe une suite  $(\mathcal{S}_n)_n$  de surfaces en escalier telle que :

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n \in \{\mathcal{F}_x \mid x \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}'.$$

Si  $(\mathcal{S}_n)_n$  est finie, alors  $\mathcal{S}'$  est dite finiment flip-accessible à partir de  $\mathcal{S}$ .

Soulignons que cette notion de flip-accessibilité n'est pas restreinte aux suites *finies* de flips, mais vaut aussi pour des suites *infinies*, ce qui est rendu possible par la notion de convergence définie par la distance  $d_{\mathfrak{F}}$  (Déf. 2.9). Il n'est pas très difficile de voir que cette notion de flip-accessibilité est *asymétrique*, c'est à dire qu'une surface peut être flip-accessible à partir d'une autre sans que la réciproque ne soit vraie (la figure 4.6, ci-dessous, donne un exemple). Il est donc naturel de chercher à *caractériser* la flip-accessibilité entre deux surfaces données. C'est à cet effet qu'on introduit la notion d'*ombre* :

**Définition 4.13** Soit  $\pi_i$  la projection de  $\mathbb{R}^d$  sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  définie par :

$$\pi_i(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

La  $i^{\text{ème}}$ -ombre d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$  est alors l'image par  $\pi_i$  de l'interprétation géométrique de  $\mathcal{S}$ , notée  $\pi_i(\mathcal{S})$ .

Les ombres de  $\mathcal{S}$  sont donc des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Notons que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  et tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , on a :

$$\pi_i(\mathbf{x}, j^*) = \pi_i(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j, j^*)$$

On en déduit que faire un flip ascendant ou descendant sur une surface en escalier ne modifie pas ses ombres. Ceci reste valable pour un nombre fini de flips, mais pas nécessairement pour un nombre infini de flips. En effet, on a seulement (voir aussi Fig. 4.6) :

**Proposition 4.14** Si  $\mathcal{S}'$  est une surface en escalier flip-accessible à partir d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$ , alors chaque ombre de  $\mathcal{S}'$  est incluse dans l'ombre correspondante de  $\mathcal{S}$ .

*Preuve.* Un point dans une ombre de  $\mathcal{S}'$  est de la forme  $\pi_i(\mathbf{z})$ , où  $\mathbf{z}$  est un point de l'interprétation géométrique de  $\mathcal{S}'$ . Par définition de la flip-accessibilité, pour toute boule de taille fixée, il existe une séquence finie de flips telle que  $\mathcal{S}$  soit transformée en une surface en escalier qui coïncide avec  $\mathcal{S}'$  sur cette boule. En particulier, en considérant une boule contenant  $\mathbf{z}$ , l'invariance des ombres par un nombre fini de flips assure que  $\pi_i(\mathbf{z})$  est aussi dans l'ombre  $\pi_i(\mathcal{S})$ . Le résultat annoncé en découle.  $\square$

En fait, on montre que la condition nécessaire donnée par la proposition 4.14 est une condition suffisante. Commençons par le lemme suivant :

**Lemme 4.15** Soit  $\mathcal{S}$  une surface en escalier et  $\mathbf{x}$  un vecteur entier au-dessus (resp. en dessous) de  $\mathcal{S}$ . Si, pour  $i = 1, \dots, d$ ,  $\pi_i(\mathbf{x}) \in \pi_i(\mathcal{S})$ , alors la surface  $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$  (resp.  $\mathcal{S} \wedge \check{C}_{\mathbf{x}}$ ) est finiment flip-accessible à partir de  $\mathcal{S}$ .

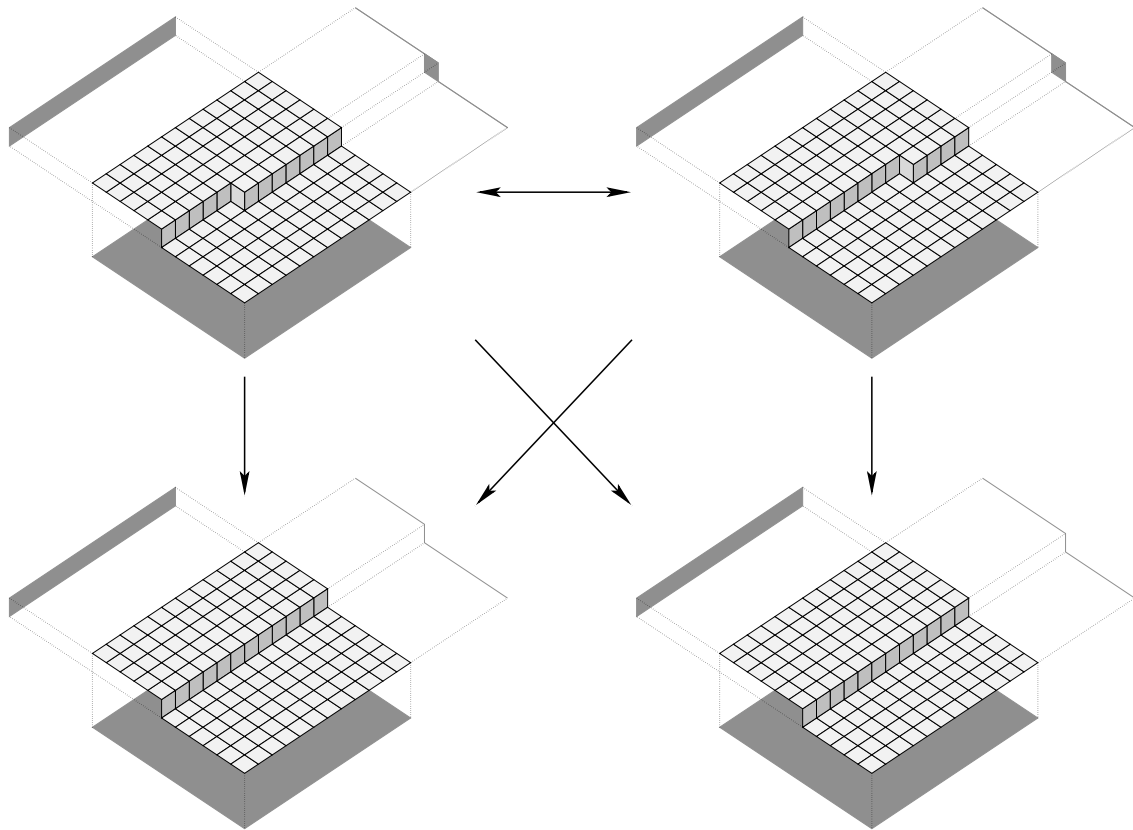


FIG. 4.6 – Quatre surfaces en escalier, avec une flèche d'une surface à une autre si cette dernière est flip-accessible à partir de la première. Les ombres de ces surfaces sont représentées (en sombre). D'après le théorème 4.16 (ci-dessous), il y a flip-accessibilité exactement quand il y a inclusion des ombres.

*Preuve.* Supposons, par exemple, que  $\mathbf{x}$  est au-dessus de  $\mathcal{S}$  (l'autre cas étant similaire). Les hypothèses assurent que, pour  $i = 1, \dots, d$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{x} - \lambda_i \mathbf{e}_i$  soit un sommet de  $\mathcal{S}$ . Introduisons le vecteur  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \lambda_1 \mathbf{e}_1 - \dots - \lambda_d \mathbf{e}_d$ . On déduit alors de la proposition 4.6 et de la définition de  $\hat{C}_{\mathbf{x}}$  qu'un vecteur  $\mathbf{y}$  au-dessus de  $\mathcal{S}$  et strictement en dessous de  $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$  vérifie  $\mathbf{z} \leq \mathbf{y} < \mathbf{x}$ . En particulier, il y a un nombre fini  $N$  de tels vecteurs. Raisonnons alors par récurrence sur  $N$ . Si  $N = 0$ , on a  $\mathcal{S} = \mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$  et il n'y a pas besoin de faire de flips. Sinon, soit  $\mathbf{y}_0$  le vecteur de hauteur minimale (Déf. 4.7) parmi ceux au-dessus de  $\mathcal{S}$  et strictement en dessous de  $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$ . Il n'est pas difficile de voir qu'un tel vecteur est nécessairement un sommet de  $\mathcal{S}$ , car sinon on pourrait le remplacer par  $\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_d$ , qui a une hauteur strictement inférieure. De plus, pour  $i = 1, \dots, d$ ,  $\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_i$  n'est pas un sommet de  $\mathcal{S}$  (car ce vecteur a aussi une hauteur strictement inférieure à celle de  $\mathbf{y}_0$ ). On en déduit que les sommets de  $\mathcal{S}$  voisins de  $\mathbf{y}_0$  sont  $\mathbf{y}_0 + \mathbf{e}_i$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , et donc  $\mathcal{S}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_i, i) = 1$ , pour  $i = 1, \dots, d$ . En ajoutant  $\mathcal{F}_{\mathbf{y}_0}$  à  $\mathcal{S}$  on obtient donc une surface  $\mathcal{S}'$ , qui est telle qu'il y a  $N - 1$  vecteurs au-dessus d'elle et strictement en dessous de  $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$  (les  $N$  précédents moins  $\mathbf{y}_0$ ). Par hypothèse de récurrence,  $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}}$  et finiment flip-accessible à partir de  $\mathcal{S}'$ , donc à partir de  $\mathcal{S}$  avec le flip  $\mathcal{F}_{\mathbf{y}_0}$ .  $\square$

Ainsi, le lemme précédent montre comment transformer par flips une surface en escalier de façon à ce que la surface obtenue ait pour sommet un vecteur fixé. On utilise alors ce résultat pour montrer :

**Théorème 4.16** *Une surface en escalier  $\mathcal{S}'$  est flip-accessible à partir d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$  si et seulement si chaque ombre de  $\mathcal{S}'$  est incluse dans l'ombre correspondante de  $\mathcal{S}$  :*

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\text{flips}} \mathcal{S}' \Leftrightarrow \forall i, \pi_i(\mathcal{S}') \subset \pi_i(\mathcal{S}).$$

*Preuve.* Notons  $V(\mathcal{S}') = \{\mathbf{x}_n \mid n \geq 1\}$  de telle sorte que si  $\mathbf{x}_m$  a une norme supérieure à  $\mathbf{x}_n$ , alors  $m \geq n$ . D'après le lemme 4.15, en supposant, par exemple, que  $\mathbf{x}_1$  est au-dessus de  $\mathcal{S}$ , on transforme  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}_1}$ , qui est une surface dont  $\mathbf{x}_1$  est un sommet, en effectuant un nombre fini de flips. Supposons alors qu'on ait transformé  $\mathcal{S}$  en une surface  $\mathcal{S}_n$  dont  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  sont des sommets, en effectuant un nombre fini de flips. Toujours d'après le lemme 4.15, en supposant, par exemple, que  $\mathbf{x}_{n+1}$  est au-dessus de  $\mathcal{S}_n$ , on transforme  $\mathcal{S}_n$  en une surface  $\mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S} \vee \hat{C}_{\mathbf{x}_1}$  dont  $\mathbf{x}_{n+1}$  est un sommet. De plus, la preuve du lemme montre que ces flips sont tous localisés en dessous du coin  $\hat{C}_{\mathbf{x}_1}$ . Or la proposition 4.6 assure que  $\mathbf{x}_{n+1}$  n'est ni strictement inférieur ni strictement supérieur à aucun des sommets  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . On en déduit qu'en transformant  $\mathcal{S}_n$  en  $\mathcal{S}_{n+1}$ , aucun flip localisé en  $\mathbf{x}_i$ , avec  $i \leq n$ , n'est fait. Donc  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$  sont tous des sommets de  $\mathcal{S}_{n+1}$ . Par récurrence, on obtient une suite de surfaces en escalier convergeant vers une surface qui a les mêmes sommets que  $\mathcal{S}'$  : il s'agit donc de  $\mathcal{S}'$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

La figure 4.6 illustre ce théorème. Un cas particulier intéressant est celui des plans en escalier. En effet, ceux-ci ont des ombres particulières :

**Proposition 4.17** *Un plan en escalier de  $\mathfrak{P}_d$  dont le vecteur n'a que des coordonnées strictement positives n'a que des ombres complètes, c'est-à-dire égales à  $\mathbb{R}^{d-1}$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{P}$  un plan en escalier de vecteur normal  $\boldsymbol{\alpha} > 0$  et d'intercept  $\rho$ . Soit  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  un vecteur dont la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est nulle. On peut écrire  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ , avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  et  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  ayant tous les deux une  $i^{\text{ème}}$  coordonnée nulle. La suite  $(\langle \mathbf{x} + k\mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle)_k$  est strictement croissante car la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $\boldsymbol{\alpha}$  est strictement positive. Donc il existe  $k$  tel que :

$$\langle \mathbf{x} + k\mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \mathbf{x} + k\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle,$$

c'est-à-dire  $\mathcal{P}(\mathbf{x}, i) = 1$ . En particulier, le vecteur  $\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i + \mathbf{z}$ , dont l'image par  $\pi_i$  est  $\mathbf{y}$ , appartient à l'interprétation géométrique de  $\mathcal{P}$  (ceci découle de la définition de l'interprétation géométrique d'une face, voir Déf. 2.5, Chap. 2). Ceci prouve que l'ombre  $\pi_i(\mathcal{P})$  est complète.  $\square$

On déduit alors immédiatement du théorème 4.16 :

**Corollaire 4.18** *Si  $\mathcal{P}$  est un plan en escalier de  $\mathfrak{P}_d$  dont le vecteur n'a que des coordonnées strictement positives, alors toute surface en escalier de  $\mathfrak{S}_d$  est flip-accessible à partir de  $\mathcal{P}$ .*

Par exemple, la surface en escalier de la figure 4.1 peut être obtenue en faisant des flips sur le plan en escalier de la figure 3.1 (Chap. 3).

### 4.2.2 Pseudo-flip-accessibilité

La notion de flip-accessibilité introduite dans le paragraphe précédent pour les surfaces en escalier est directement inspirée de la notion correspondante pour les pavages. Cependant, soulignons que la définition d'un flip comme une fonction de  $\mathfrak{F}$  (Déf. 4.11) permet de dépasser le cadre des surfaces en escalier (et donc la correspondance avec les pavages). Plus précisément, on peut définir la notion suivante de flip-accessibilité, appelée *pseudo-flip-accessibilité* pour la distinguer de la précédente :

**Définition 4.19** *Une fonction  $\mathcal{E}' \in \mathfrak{F}$  est dite pseudo-flip-accessible à partir d'une fonction  $\mathcal{E} \in \mathfrak{F}$  s'il existe une suite  $(\mathcal{E}_n)_n$  de fonctions de  $\mathfrak{F}$  telle que :*

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n \in \{\mathcal{F}_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n = \mathcal{E}'.$$

*Si  $(\mathcal{E}_n)_n$  est finie, alors  $\mathcal{E}'$  est dite finiment pseudo-flip-accessible à partir de  $\mathcal{E}$ .*

Soulignons qu'une surface flip-accessible à partir d'une autre surface est, *a fortiori*, pseudo-flip-accessible à partir de cette surface. La réciproque est en général fautive, puisque le théorème suivant montre qu'il y a en fait toujours pseudo-flip-accessibilité entre deux surfaces en escalier :

**Théorème 4.20** *Si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont deux surfaces en escalier, alors  $\mathcal{S}'$  est pseudo-flip-accessible à partir de  $\mathcal{S}$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  deux surfaces en escalier. Soit  $\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$  la fonction de  $\mathbb{Z}^d$  dans  $\{-1, 0, 1\}$  définie par :

$$\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au-dessus de } \mathcal{S} \text{ et strictement en dessous de } \mathcal{S}' \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est en dessous de } \mathcal{S} \text{ et strictement au-dessus de } \mathcal{S}' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit alors  $\{\mathbf{x}_n \mid n \geq 1\}$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{Z}^d$  envoyés dans  $\{-1, 1\}$  par  $\varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ . On suppose que cet ensemble est indexé de telle sorte que si  $i \leq j$ , alors  $\mathbf{x}_i$  a une norme inférieure à  $\mathbf{x}_j$ . Ceci assure la convergence de la suite de fonction  $(\mathcal{S}_n)_n$  définie par :

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S} + \sum_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\mathbf{x}_k) \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}.$$

On vérifie alors que cette suite converge en fait vers  $\mathcal{S}'$ , qui est donc pseudo-flip-accessible à partir de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

La pseudo-flip-accessibilité est donc une notion strictement plus puissante que celle de flip-accessibilité. On peut se demander quel intérêt a cette notion, qui semble trop détachée d'une quelconque interprétation géométrique. Le théorème suivant montre cependant que cette notion peut être utile pour décider si une fonction binaire est une surface en escalier. Ce théorème sera notamment utilisé dans la suite (Chap. 5) pour relier l'action des applications duales sur les surfaces en escalier (Chap. 5) à leur action sur les plans en escalier (Chap. 3).

**Théorème 4.21** *Une fonction binaire pseudo-flip-accessible à partir d'une surface en escalier est elle-même une surface en escalier.*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{B}$  une fonction binaire  $\omega$ -pseudo-flip-accessible à partir d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$ . Il existe donc une suite  $(\mathbf{x}_n, \varepsilon_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{Z}^d \times \{-1, 1\}$  telle que :

$$\mathcal{B} = \mathcal{S} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \varepsilon_n \mathcal{F}_{\mathbf{x}_n}.$$

De plus, on peut supposer que  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$  pour  $i \neq j$  (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de flip ajouté puis retranché). Fixons alors  $R \geq 0$ . Il existe  $N \geq 0$  tel que  $\mathcal{B}$  et

$\mathcal{S} + \varepsilon_1 \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1} + \dots + \varepsilon_N \mathcal{F}_{\mathbf{x}_N}$  soient égales sur  $\{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\} \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$ . On peut alors réordonner les flips  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \mathcal{F}_{\mathbf{x}_N}$  de telle sorte qu'on ait :

$$\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j \Rightarrow \begin{cases} i \leq j & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_j = 1, \\ i \geq j & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_j = -1. \end{cases}$$

Montrons alors par récurrence qu'en appliquant successivement les flips dans l'ordre  $\varepsilon_1 \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \varepsilon_N \mathcal{F}_{\mathbf{x}_N}$ , on obtient, à chaque étape, une surface en escalier. C'est vrai par hypothèse si on ne fait aucun flip. Supposons que ce soit vrai à l'étape  $n < N$ . Supposons aussi que  $\varepsilon_{n+1} = 1$  (le cas  $\varepsilon_{n+1} = -1$  est similaire). Si  $\mathcal{S}_{n+1}$  n'est pas binaire, c'est que l'ajout flip  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_{n+1}}$  a donné un coefficient négatif à une face  $(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{e}_i, i^*)$  ou plus grand que deux à une face  $(\mathbf{x}_{n+1}, i^*)$  (ceci découle de la définition d'un flip). Considérons le premier cas, le second étant similaire. Comme  $\mathcal{S}_N$  est binaire sur  $\{(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\} \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$ , le coefficient négatif d'une face  $(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{e}_i, i^*)$  devra être modifié par un flip ultérieur, mettons  $\varepsilon_{n'} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_{n'}}$ , avec  $n' > n+1$ . Si  $\varepsilon_{n'} = 1$ , alors  $\mathbf{x}_{n'} = \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{e}_i$ , ce qui est impossible vu la manière dont sont ordonnés les flips. Si  $\varepsilon_{n'} = -1$ , alors  $\mathbf{x}_{n'} = \mathbf{x}_{n+1}$ , ce qui est exclu car les  $\mathbf{x}_i$  sont distincts. Donc  $\mathcal{S}_{n+1}$  est binaire. Or, une fonction binaire obtenue en ajoutant un flip à une surface en escalier restant une surface en escalier, on en déduit que  $\mathcal{S}_{n+1}$  est une surface en escalier. Par récurrence,  $\mathcal{S}_N$  est une surface en escalier. Finalement, la fonction  $\mathcal{B}$  coïncide sur des boules arbitrairement grandes avec une surface en escalier. On en déduit que  $\mathcal{B}$  est une surface en escalier (rappelons que  $\mathfrak{S}$  est fermé).  $\square$



# Chapitre 5

## Développement de surface en escalier

Ce chapitre est en quelque sorte l'extension du chapitre 3 au cas des surfaces en escalier. On commence par caractériser l'action des applications duales sur les surface en escalier. Plus précisément, nous donnons une condition nécessaire et suffisante simple pour que l'image d'un plan en escalier par l'application duale d'un morphisme soit un plan en escalier (Th. 5.3). Ce résultat a été publié dans [3] dans le cas d'une application duale d'une substitution, puis détaillé dans [15] (soumis), dans le cas général d'une application duale d'un morphisme. On montre ensuite que le procédé consistant à calculer le développement d'un plan grâce à ses paliers (voir Chap. 3) peut être étendu aux surfaces en escalier, ceci bien qu'une surface en escalier n'ait généralement pas de vecteur normal, contrairement à un plan en escalier. Enfin, on caractérise en termes de *quasi-plans* les surfaces en escalier ayant le même développement qu'un vecteur réel donné (Th. 5.14 et 5.21). Une version partielle de ce dernier résultat se trouve dans l'article [15] (soumis).

### 5.1 Action des applications duales

#### 5.1.1 Cas général

Le point clé pour étendre l'action des applications duales des plans aux surfaces en escaliers est la notion de flip introduite dans le chapitre 4 (Déf 4.11). Plus précisément, la proposition suivante est fondamentale :

**Proposition 5.1** *Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire. Alors, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ , l'application duale  $E_1^*(\sigma)$  envoie le flip localisé en  $\mathbf{x}$  sur le flip localisé en  $M_\sigma^{-1}\mathbf{x}$  :*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d, \quad E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\mathbf{x}}) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1}\mathbf{x}}.$$

*Preuve.* Rappelons que pour  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ , on a :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})(\mathbf{y}, j) = \sum_{i|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(p), i) - \sum_{i|\sigma(j)=p \cdot i^{-1} \cdot s} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_i, i).$$

Notons  $\sigma(j) = u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_l^{\varepsilon_l}$ , avec, pour  $k = 0, \dots, l$ ,  $u_k \in \{1, \dots, d\}$  et  $\varepsilon_k = \pm 1$ . Introduisons alors, pour  $k = 0, \dots, l$  :

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{f}(u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_k^{\varepsilon_k}).$$

En remarquant de plus que  $\mathbf{f}(p) - \mathbf{e}_i = \mathbf{f}(p \cdot i^{-1})$ , on peut alors réécrire  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})(\mathbf{y}, j)$  :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F})(\mathbf{y}, j) = \sum_{\varepsilon_k > 0} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{r}_{k-1}, u_k) - \sum_{\varepsilon_k < 0} \mathcal{F}(M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{r}_k, u_k).$$

Prenons maintenant pour  $\mathcal{F}$  un flip  $\mathcal{F}_x$  (Déf. 4.11). Notons respectivement  $A$  et  $B$  la première et la seconde somme de l'équation ci-dessus. On a  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = A - B$ , et on calcule :

$$A = \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_{u_k}\},$$

$$B = \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_k = \mathbf{x}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - \mathbf{e}_{u_k}\}.$$

Notons que pour  $\varepsilon_k > 0$  (resp.  $\varepsilon_k < 0$ ), on a  $\mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{e}_{u_k} = \mathbf{r}_k$  (resp.  $\mathbf{r}_k + \mathbf{e}_{u_k} = \mathbf{r}_{k-1}$ ). Ceci permet de réécrire  $A$  et  $B$  :

$$A = \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k > 0 \mid \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\},$$

$$B = \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k < 0 \mid \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\}.$$

On obtient alors (en regroupant les termes croisés de  $A$  et  $B$ ) :

$$A - B = \text{Card}\{\varepsilon_k \mid \mathbf{r}_{k-1} = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\} - \text{Card}\{\varepsilon_k \mid \mathbf{r}_k = \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y}\}.$$

On en déduit :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = A - B = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y} = \mathbf{r}_0, \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} - M_\sigma \mathbf{y} = \mathbf{r}_l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En remarquant que  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{r}_l = \mathbf{f}(\sigma(j)) = M_\sigma \mathbf{e}_j$ , on obtient finalement :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{y} = M_\sigma^{-1} \mathbf{x}, \\ -1 & \text{si } \mathbf{y} = M_\sigma^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{e}_j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_x)(\mathbf{y}, j) = \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1} \mathbf{x}}(\mathbf{y}, j)$ . Ceci prouve le résultat annoncé.  $\square$

Ainsi, les applications duales agissent de manière simple sur les flips : elles ne font que les déplacer. Les résultats du chapitre 4, notamment les théorèmes 4.20 et 4.21, vont alors permettre d'étendre aux surfaces en escalier le théorème 3.4, qui caractérise l'action des application duales sur les plans en escalier.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.2** *Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire. S'il existe une surface en escalier  $\mathcal{S}$  telle que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$  soit une fonction binaire, alors il existe un vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  tel que  ${}^t M_\sigma \alpha \in \mathbb{R}_+^d$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S}$  une surface en escalier telle que  $E_1^*(\sigma) \in \mathfrak{B}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{S}_n$  la fonction binaire définie par :

$$\mathcal{S}_n : (\mathbf{x}, e_i^*) \mapsto \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbf{x}, e_i^*) & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Géométriquement,  $\mathcal{S}_n$  est la restriction de  $\mathcal{S}$  à la boule de rayon  $n$  centrée en  $\mathbf{0}$ . Notons que, pour  $n$  assez grand, on a  $|\mathcal{S}_n| > 0$ . Par ailleurs, comme la suite  $(\mathcal{S}_n)_n$  tend vers  $\mathcal{S}$  et que  $E_1^*(\sigma)$  est continue sur  $\mathfrak{F}$ , la suite  $(E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n))_n$  tend vers  $\mathfrak{B}$ . En particulier, il n'est pas difficile de voir que ceci implique, pour  $n$  assez grand,  $|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)| > 0$ . On peut donc, pour  $n$  assez grand, définir les deux vecteurs réels positifs et non nuls suivant :

$$\alpha_n = \frac{1}{|\mathcal{S}_n|} (|\mathcal{S}_n|_1, \dots, |\mathcal{S}_n|_d) \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|} (|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|_1, \dots, |E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|_d).$$

D'après la proposition 2.12, on a alors  ${}^t M_\sigma \alpha_n = \lambda_n \beta_n$ , avec :

$$\lambda_n = \frac{|E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}_n)|}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{\|{}^t M_\sigma \mathbf{f}(\mathcal{S}_n)\|_1}{\|\mathbf{f}(\mathcal{S}_n)\|_1}.$$

Comme  $\|\alpha_n\|_1 = \|\beta_n\|_1 = 1$  et  $0 \leq \lambda_n \leq \|{}^t M_\sigma\|$ , par compacité, on peut extraire des suites  $(\alpha_n)_n$ ,  $(\beta_n)_n$  et  $(\lambda_n)_n$  des suites convergentes de limites respectives  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$ . Par continuité de  $M_\sigma$ , on a encore  ${}^t M_\sigma \alpha = \lambda \beta$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Soulignons qu'il existe des morphismes unimodulaires dont les applications duales n'envoient aucune surface en escalier sur une fonction binaire. C'est le cas, par exemple, de tout morphisme dont la matrice d'incidence est négative.

Par ailleurs, notons que la réciproque de ce lemme est vraie. En effet, si un vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  vérifie  ${}^t M_\sigma \alpha \in \mathbb{R}_+^d$ , alors le théorème 3.4 assure que la surface en escalier  $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\alpha,0}$  est envoyée sur la fonction binaire  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \alpha,0}$ .

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de ce paragraphe, qui étend le théorème 3.6 au cas des surfaces en escalier :

**Théorème 5.3** *Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire. Si l'image par  $E_1^*(\sigma)$  d'une surface en escalier est binaire, alors c'est une surface en escalier. En d'autres termes :*

$$E_1^*(\sigma)(\mathfrak{S}) \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}.$$

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S}$  une surface en escalier telle que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$  soit binaire. D'après le lemme 5.2, il existe donc un vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  tel que  ${}^t M_\sigma \in \mathbb{R}_+^d$ . Le théorème 4.20 permet alors d'écrire  $\mathcal{S}$  comme suit :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\alpha,0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k},$$

où, pour tout  $k$ ,  $\varepsilon_k = \pm 1$  et  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{Z}^d$ . Comme  $E_1^*(\sigma)$  est continue sur  $\mathfrak{F}$  (Prop. 2.11), on obtient en appliquant  $E_1^*(\sigma)$  :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,0}) + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k E_1^*(\sigma)(\mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}).$$

D'après le théorème 3.4 et la proposition 5.1, on en déduit :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \alpha, 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{M_\sigma^{-1} \mathbf{x}_k}.$$

La fonction binaire  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$  est donc  $\omega$ -pseudo-flip-accessible à partir du plan en escalier  $\mathcal{P}_{\alpha,0}$ , et le théorème 4.21 assure alors que c'est une surface en escalier.  $\square$

### 5.1.2 Cas positif

**Lemme 5.4** *Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire. Alors, pour toute surface en escalier  $\mathcal{S}$ ,  $E_1^*(\mathcal{S})$  est une fonction binaire.*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S}$  une surface en escalier. Supposons que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$  ne soit pas binaire. Comme les faces de  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$  ont des coefficients positifs, c'est qu'il existe deux faces  $(\mathbf{x}_1, i_1^*)$  et  $(\mathbf{x}_2, i_2^*)$  de  $\mathcal{S}$  dont les images se chevauchent, c'est-à-dire telles que, pour un entier  $j \in \{1, \dots, d\}$ , on ait :

$$\sigma(j) = p_1 \cdot i_1 \cdot s_1 = p_2 \cdot i_2 \cdot s_2 \quad \text{et} \quad M_\sigma^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{f}(p_1)) = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}(p_2)).$$

Notons que  $(\mathbf{x}_1, i_1^*) \neq (\mathbf{x}_2, i_2^*)$  entraîne  $p_1 \neq p_2$ . Supposons, par exemple, que  $p_2$  soit plus court que  $p_1$ . On déduit donc de ce qui précède :

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(p_1) - \mathbf{f}(p_2) \geq \mathbf{f}(i_2) = \mathbf{e}_{i_2}.$$

Introduisons alors les deux vecteurs suivants :

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_{i_2}.$$

Ce sont des sommets respectivement de  $(\mathbf{x}_1, i_1^*)$  et  $(\mathbf{x}_2, i_2^*)$ , et ils vérifient :

$$\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = \left( \mathbf{x}_1 + \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i \right) - \left( \mathbf{x}_2 + \mathbf{e}_{i_2} \right) = \underbrace{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_{i_2})}_{\geq \mathbf{0}} + \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i.$$

En d'autres termes,  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  sont des sommets de  $\mathcal{S}$  tels que  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$  a toutes ses coordonnées strictement positives. Ceci est en contradiction avec la proposition 4.6. On en déduit que  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{S})$  est binaire.  $\square$

Ce lemme permet alors de déduire du théorème 5.3 le théorème suivant, qui généralise le corollaire 3.7 dans le cas des surfaces en escalier :

**Théorème 5.5** *L'application duale d'une substitution unimodulaire envoie toute surface en escalier sur une surface en escalier.*

## 5.2 Développement de Brun d'une surface

On montre ici comment étendre aux surfaces en escalier la notion de développement de Brun d'un plan en escalier.

### 5.2.1 Surface cohérente

Le point clé consiste à remarquer que la notion de palier (Déf. 3.18) peut aussi être utilisée pour les surfaces en escalier. Par exemple, la figure 5.1 représente quelques paliers d'une surface en escalier.

Rappelons que les paliers permettent de "lire" sur un plan une information partielle sur son vecteur normal (Prop. 3.19). Notamment, deux fonctions  $a$  et  $i$  ont été définies sur les plans en escalier (Déf. 3.20), qui vérifient, pour tout  $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  et tout  $\rho \in \mathbb{R}$  (Prop. 3.21) :

$$i(\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), \rho}) = \lfloor \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^{-1} \rfloor.$$

Dans le cas plus général d'une surface, il est plus difficile d'interpréter l'information donnée par les paliers, puisque la notion même de vecteur normal perd son sens. Cependant, en notant ici aussi respectivement  $a_{i,j}^-(\mathcal{S})$  et  $a_{i,j}^+(\mathcal{S})$  l'infimum et le supremum des tailles des  $(i, j)$ -paliers d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$ , on s'aperçoit que les formules définissant les fonctions  $a$  et  $i$  sur les plans restent valables sur presque toutes les surfaces. Plus précisément, introduisons la notion suivante :

**Définition 5.6** *Une surface en escalier  $\mathcal{S}$  est dite cohérente s'il existe un entier  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que :*

$$\min_{1 \leq j \leq d} a_{i+1, j+1}^-(\mathcal{S}) \geq 1.$$

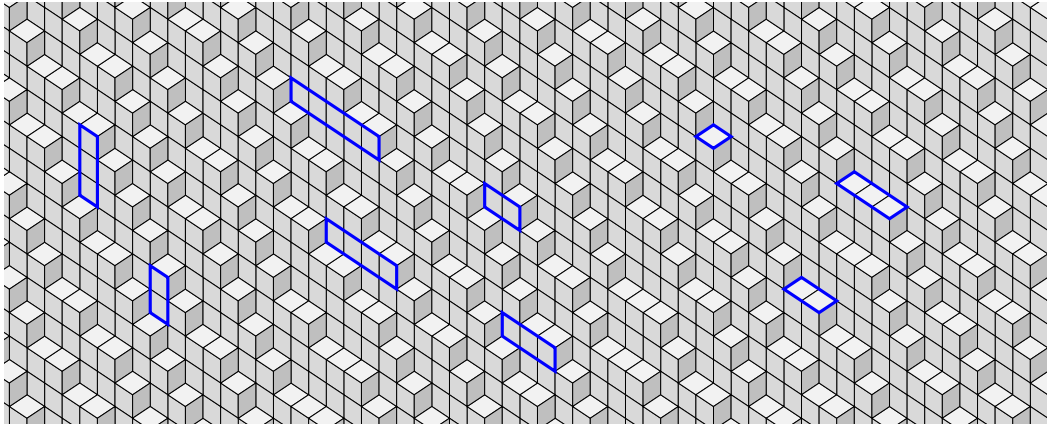


FIG. 5.1 – Cette surface en escalier a des  $(1, 3)$ -paliers de taille 2 ou 3 (encadrés, à gauche), des  $(1, 2)$ -paliers de taille 2, 3 ou 4 (au centre) et des  $(3, 2)$ -paliers de taille 1, 2 ou 3 (à droite).

Les formules définissant les fonctions  $a$  et  $i$  sur un plan les définissent alors aussi sur toute surface  $\mathcal{S}$  cohérente :

$$i(\mathcal{S}) = \min_{1 \leq i \leq d} \{i \mid \max_{1 \leq j \leq d} a_{j+1, i+1}^+(\mathcal{S}) \leq 1\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{S}) = a_{1, i(\mathcal{S})+1}^-(\mathcal{S}).$$

Notons qu'une surface est cohérente si et seulement si elle ne contient pas à la fois un  $(i+1, j+1)$ -palier et un  $(j+1, i+1)$ -palier qui soient tous les deux de taille supérieure à 2. Par exemple, on vérifie aisément que la surface en escalier représentée sur la figure 4.1 n'est pas cohérente, alors que celle représentée sur la figure 5.1 l'est.<sup>1</sup> En particulier, on en déduit qu'une surface qui n'est pas cohérente ne peut pas être un plan, car sinon on déduirait de la proposition 3.19 que le vecteur normal d'un tel plan aurait deux coordonnées  $\alpha_{i+1}$  et  $\alpha_{j+1}$  vérifiant :

$$\alpha_{i+1} < \alpha_{j+1} \quad \text{et} \quad \alpha_{j+1} < \alpha_{i+1}.$$

Cependant, soulignons qu'une surface cohérente n'est pas nécessairement un plan. Ceci explique la raison pour laquelle on a introduit la notion de cohérence : on veut discriminer les surfaces qui sont "potentiellement planes" de celles qui sont "clairement non planes".

### 5.2.2 Algorithme de Brun géométrique

Le paragraphe précédent a montré que les fonctions  $a$  et  $i$ , initialement introduites pour déduire d'un plan l'information nécessaire à calculer son développement

<sup>1</sup>Du moins, la partie finie qui en est représentée n'exclut pas qu'elle soit cohérente.

de Brun, sont en fait définies sur toute surface en escalier cohérente. Montrons que cela permet de prolonger naturellement l'application  $\tilde{T}$  (Déf. 3.23) aux surfaces.

Rappelons que  $\tilde{T}$  a été définie (Déf. 3.23) sur un sous-ensemble  $\mathfrak{P}_\exists \setminus \mathfrak{P}_\forall$  de  $\mathfrak{P}$ , c'est-à-dire l'ensemble des plans en escalier dont le vecteur normal peut s'écrire  $(1, \boldsymbol{\alpha})$ , avec  $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$ . Par analogie, introduisons les deux sous-ensembles de  $\mathfrak{S}$  définis par :

$$\mathfrak{S}_\exists = \{\mathcal{S} \in \mathfrak{S} \mid \exists a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}\},$$

$$\mathfrak{S}_\forall = \{\mathcal{S} \in \mathfrak{S} \mid \forall a \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, d\}, E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}\}.$$

Notons qu'on a alors :

$$\mathfrak{P}_\exists = \mathfrak{S}_\exists \cap \mathfrak{P} \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_\forall = \mathfrak{S}_\forall \cap \mathfrak{P}.$$

En particulier,  $\mathfrak{P}_\exists \setminus \mathfrak{P}_\forall$  est inclus dans  $\mathfrak{S}_\exists \setminus \mathfrak{S}_\forall$ . Par ailleurs, rappelons qu'un plan en escalier est toujours cohérent (Déf. 5.6). L'application  $\tilde{T}$  se prolonge donc naturellement sur toute surface cohérente de  $\mathfrak{S}_\exists \setminus \mathfrak{S}_\forall$  en posant :

$$\tilde{T}(\mathcal{S}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})}^{-1})(\mathcal{S}). \quad (5.1)$$

Soulignons que l'intérêt de la définition initiale de l'application  $\tilde{T}$  était de calculer le développement de Brun d'un plan en escalier. En particulier, cela suppose que  $\tilde{T}$  puisse être itérée, c'est-à-dire qu'elle envoie un plan sur un plan. Si on veut, par analogie, calculer le développement de Brun d'une surface en escalier, il faut donc que  $\tilde{T}$ , prolongée, puisse aussi être itérée, c'est-à-dire qu'elle envoie une surface sur une surface. La proposition suivante montre que c'est bien le cas :

**Proposition 5.7** *L'image par  $\tilde{T}$  d'une surface cohérente de  $\mathfrak{S}_\exists \setminus \mathfrak{S}_\forall$  est une surface en escalier.*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S}$  une surface cohérente. Les entiers  $a(\mathcal{S})$  et  $i(\mathcal{S})$  sont donc bien définis. Soit alors  $\mathcal{B}$  la fonction binaire définie, pour tout vecteur  $\boldsymbol{x}$  de  $\mathbb{Z}^{d+1}$ , par :

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, 1) = \mathcal{S}(B_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})} \boldsymbol{x}, i(\mathcal{S}) + 1),$$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, i(\mathcal{S}) + 1) = \mathcal{S}(B_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})} \boldsymbol{x} - a \boldsymbol{e}_{i(\mathcal{S})+1}, 1),$$

et, pour  $j \notin \{1, i(\mathcal{S}) + 1\}$  :

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, j) = \mathcal{S}(B_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})} \boldsymbol{x}, j).$$

Soulignons que la définition de  $a(\mathcal{S})$  et  $i(\mathcal{S})$  assure que si  $\mathcal{S}(\boldsymbol{y}, i(\mathcal{S}) + 1) = 1$ , alors  $\mathcal{S}(\boldsymbol{y} - k \boldsymbol{e}_{i(\mathcal{S})+1}, 1) = 1$ , pour  $k = 0, \dots, a(\mathcal{S}) - 1$  (taille minimale d'un  $(1, i(\mathcal{S}) + 1)$ -palier). On en déduit que l'image de  $\mathcal{B}$  par  $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})})$  est la surface en escalier  $\mathcal{S}$  (voir Déf. 3.17). On en déduit :

$$\tilde{T}(\mathcal{S}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{S}), i(\mathcal{S})}^{-1})(\mathcal{S}) = \mathcal{B} \in \mathfrak{B}.$$

Le théorème 5.3 permet alors de conclure que  $\tilde{T}(\mathcal{S})$  est une surface en escalier.  $\square$

On définit alors le développement de Brun d'une surface en escalier par analogie avec le cas d'un plan en escalier (voir Fig. 5.2 et 5.3) :

**Définition 5.8** *Le développement de Brun d'une surface en escalier  $\mathcal{S}$  est la suite  $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$  définie, tant que  $\tilde{T}^n(\mathcal{S})$  est cohérente et appartient à  $\mathfrak{S}_{\exists} \setminus \mathfrak{S}_{\forall}$ , par :*

$$a_n = a(\tilde{T}^n(\mathcal{S})) \quad \text{et} \quad i_n = i(\tilde{T}^n(\mathcal{S})).$$

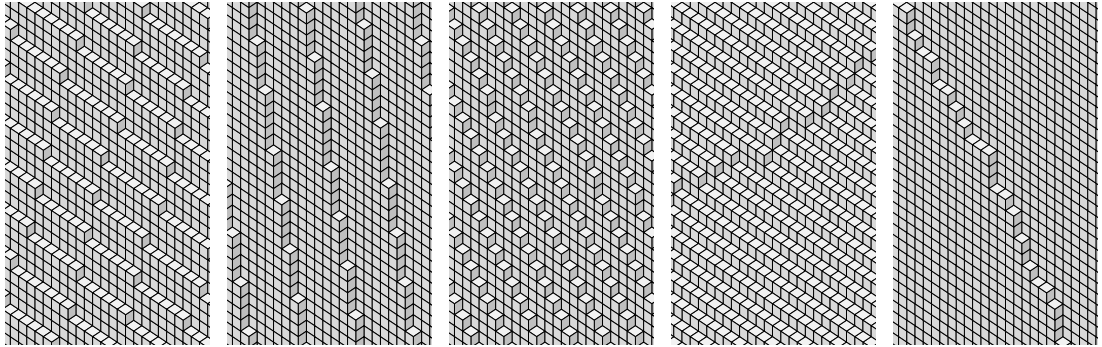


FIG. 5.2 – Applications itérées de  $\tilde{T}$  sur une surface en escalier (de gauche à droite). Cette surface a le même développement de Brun que le plan de la figure 3.5, mais la dernière itération tombe dans  $\mathfrak{S}_{\forall} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$  (et, de plus, n'est pas cohérente).

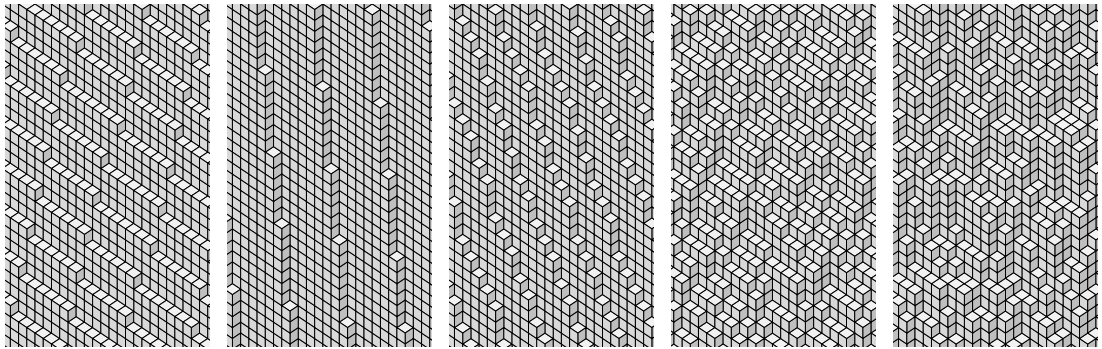


FIG. 5.3 – Applications itérées de  $\tilde{T}$  sur une surface en escalier (de gauche à droite). Cette surface a également le même développement de Brun que plan de la figure 3.5, mais la dernière itération tombe hors de  $\mathfrak{S}_{\exists}$  (et, de plus, n'est pas cohérente).

Pour conclure ce paragraphe, soulignons que si un plan en escalier a le même développement de Brun qu'un vecteur  $\alpha$  si et seulement si ce plan admet  $(1, \alpha)$

pour vecteur normal, il est par contre *a priori* difficile de caractériser les surfaces qui ont le même développement de Brun qu'un vecteur donné. On s'intéresse à ce problème au paragraphe suivant.

## 5.3 Développements communs

### 5.3.1 Quasi-plan en escalier

Ce paragraphe étudie une classe de surfaces en escalier utile pour la suite :

**Définition 5.9** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Un quasi-plan en escalier de vecteur normal  $\alpha$  et d'intercept  $\rho$  et de défaut  $D$  est une surface en escalier  $\mathcal{S}$  de la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\alpha, \rho} + \sum_{x \in D} \mathcal{F}_x,$$

où  $D$  est un sous-ensemble du réseau  $D_{\alpha, \rho}$  défini par :

$$D_{\alpha, \rho} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle = \rho\}.$$

Dans la suite, on note  $\mathcal{S} \simeq \mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  pour signifier que  $\mathcal{S}$  est un quasi-plan en escalier de paramètres  $\alpha$  et  $\rho$  (et de défaut quelconque). Soulignons qu'un plan est un cas particulier de quasi-plan. La figure 5.4 illustre cette notion.

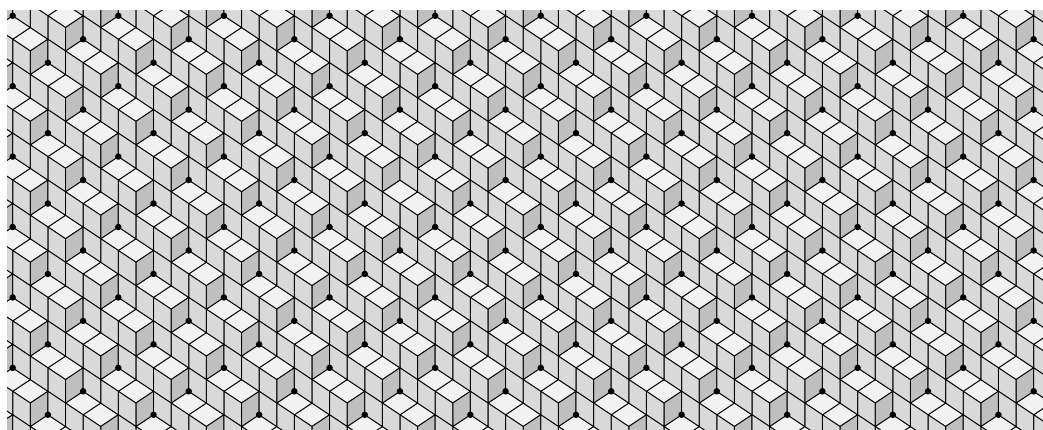


FIG. 5.4 – Un quasi-plan de paramètres  $\alpha$  et  $\rho$  se déduit du plan  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  en ajoutant des flips localisés dans le réseau  $D_{\alpha, \rho}$  (ici de rang 2, représenté par des points noirs).

Par ailleurs, il n'est pas très difficile de montrer qu'une limite de plan est un quasi-plan :

**Proposition 5.10** Soit respectivement  $(\alpha_n)_n$  et  $(\rho_n)_n$  deux suites de  $\mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $\mathbb{R}$  de limites  $\alpha \neq 0$  et  $\rho$ . Si la suite  $(\mathcal{P}_{\alpha_n, \rho_n})_n$  converge dans  $\mathfrak{F}$ , alors sa limite est un quasi-plan en escalier de paramètres  $\alpha$  et  $\rho$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\alpha_n, \rho_n} \simeq \mathcal{P}_{\alpha, \rho}.$$

Soulignons, d'une part, que la convergence des paramètres d'une suite de plan n'entraîne pas la convergence de cette suite, d'autre part que la limite d'une suite de plan n'est pas nécessairement un plan. Notons aussi que la réciproque de la proposition précédente est clairement fausse. La figure 5.5 représente deux quasi-plans de défauts différents – un seul des deux étant une limite de plans.

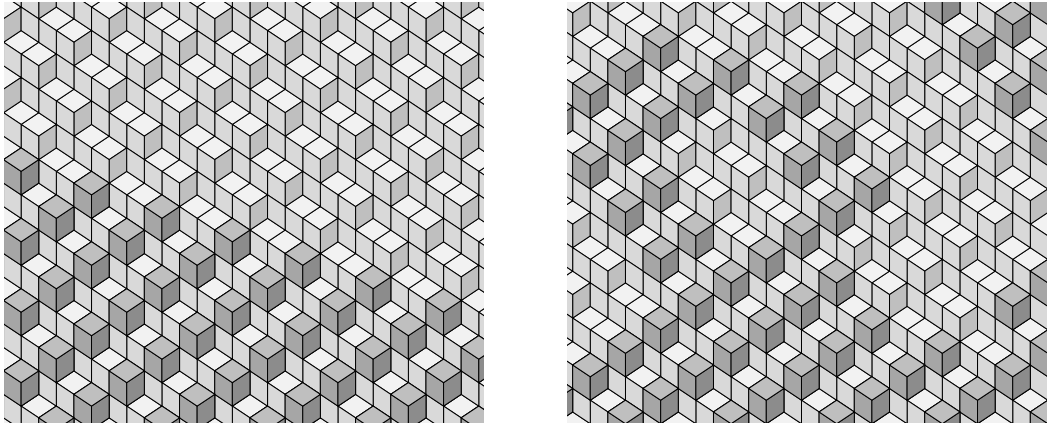


FIG. 5.5 – La limite d'une suite de plans en escalier, si elle existe, est un quasi-plan en escalier (à gauche - les flips du défaut foncés). Inversement, un quasi-plan en escalier qui n'est pas toujours la limite d'une suite de plans en escalier (à droite).

Soulignons également qu'ajouter à un plan  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  des flips localisés dans un défaut  $D \subset D_{\alpha, \rho}$  ne conduit pas nécessairement à un quasi-plan : il faut en effet, par définition, que la fonction obtenue soit une surface en escalier. La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas :

**Proposition 5.11** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  et  $D \subset D_{\alpha, \rho}$ . On définit  $\mathcal{Q} \in \mathfrak{F}$  par :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\alpha, \rho} + \sum_{x \in D} \mathcal{F}_x.$$

Alors,  $\mathcal{Q}$  est un quasi-plan si et seulement si on a, pour tout  $i$  :

$$\langle \alpha | e_i \rangle = 0 \Rightarrow D \subset D + e_i.$$

*Preuve.* Soit  $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ . On calcule :

$\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i)$	$\mathbf{x} \in D?$	$\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in D?$	$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, i)$
0	non	non	0
0	non	oui	-1
0	oui	non	1
0	oui	oui	0
1	non	non	1
1	non	oui	0
1	oui	non	2
1	oui	oui	1

Si  $\mathcal{Q}$  est un quasi-plan en escalier, alors c'est une fonction binaire. On a donc bien  $D \subset D + \mathbf{e}_i$ , sauf éventuellement à la sixième ligne. Dans ce cas,  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$  entraîne  $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho$ , et  $\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in D$  entraîne  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$ . On en déduit que  $\langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_i \rangle$  n'est pas nul. Inversement, si  $D \subset D + \mathbf{e}_i$ , alors  $\mathcal{Q}$  est binaire, sauf éventuellement à la deuxième ou à la septième ligne. Dans le premier cas,  $\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \in D$  entraîne  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$ , et  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$  entraîne  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle \leq \rho$ . On en déduit que  $\langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_i \rangle$  est nul. Le second cas est en fait impossible, car  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}(\mathbf{x}, i) = 1$  entraîne  $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle < \rho$ , alors que  $\mathbf{x} \in D$  entraîne  $\langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \rho$ . On en conclut que  $\mathcal{Q}$  est binaire. Comme  $\mathcal{Q}$  est  $\omega$ -pseudo-flip-accessible depuis un plan, le théorème 4.20 assure alors que c'est bien une surface.  $\square$

En particulier, on déduit de la proposition précédente que les  $(1, i)$ -paliers d'un quasi-plan de vecteur normal  $\mathbf{e}_1$  sont tous infinis ( $i \neq 1$ ). En effet, si  $(\mathbf{x}, 1^*)$  est une face d'un quasi-plan de paramètres  $\mathbf{e}_1$  et  $\rho$  et de défaut  $D$ , alors soit  $\mathbf{x} \in D$ , auquel cas, pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathbf{x} - k\mathbf{e}_i \in D$ , et la face  $(\mathbf{x}, 1^*)$  fait partie du  $(1, i)$ -palier infini définie par :

$$\sum_{k \geq 0} (\mathbf{x} - k\mathbf{e}_i, 1^*),$$

soit  $\mathbf{x} \notin D$ , auquel cas, pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i \notin D$ , et la face  $(\mathbf{x}, 1^*)$  fait partie du  $(1, i)$ -palier infini définie par :

$$\sum_{k \geq 0} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_i, 1^*).$$

Ceci conduit à une nouvelle caractérisation de l'ensemble  $\mathfrak{S}_\vee$  (introduit au début du paragraphe 5.2.2) :

**Proposition 5.12** *L'ensemble des quasi-plans de vecteur normal  $\mathbf{e}_1$  est égal à  $\mathfrak{S}_\vee$ .*

Enfin, une preuve calquée sur celle du théorème 3.4 montre facilement :

**Théorème 5.13** *Soit  $\sigma$  un morphisme unimodulaire. Si l'image par  $E_1^*(\sigma)$  d'un quasi-plan en escalier de paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\rho$  et de défaut  $D$  est binaire, alors c'est un quasi-plan en escalier de paramètres  ${}^t M_\sigma \boldsymbol{\alpha}$  et  $\rho$  et de défaut  ${}^t M_\sigma D$ .*

### 5.3.2 Une condition nécessaire

Ce paragraphe donne une condition nécessaire pour qu'une surface et un vecteur aient le même développement de Brun, dans le cas où celui-ci est infini. Plus précisément, on prouve :

**Théorème 5.14** *Si une surface en escalier  $\mathcal{S}$  et un vecteur  $\alpha \in [0, 1]^d$  ont le même développement de Brun infini, alors  $\mathcal{S}$  un quasi-plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$ .*

La preuve de ce théorème nécessite plusieurs lemmes techniques. L'idée directrice est que, à cause de la convergence faible de l'algorithme de Brun, itérer l'application  $\tilde{T}$  sur une surface formée de flips ajoutés à un plan aura tendance à concentrer ces flips. Localement, la surface deviendra donc de plus en plus "tordue", jusqu'à sortir de  $\mathfrak{S}_\exists$ . La figure 5.3 illustre assez bien cela. Pour qu'on puisse itérer à l'infini  $\tilde{T}$  sur une surface, celle-ci ne doit donc différer d'un plan que par des flips qui "échappent" à cette effet de concentration. Il s'avère qu'une telle surface est alors un quasi-plan.

**Lemme 5.15** *Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur entier ni strictement positif ni strictement négatif. Alors, l'enveloppe convexe de  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$  contient un vecteur réel orthogonal à  $\mathbf{x}$ .*

*Preuve.* Notons  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ . S'il existe  $i$  tel que  $x_i = 0$ , alors  $\mathbf{e}_i$  convient. Sinon, soit  $i$  et  $j$  tels que  $x_i > 0$  et  $x_j < 0$ . On vérifie alors que  $\frac{x_i}{|x_i - x_j|}\mathbf{e}_j - \frac{x_j}{|x_i - x_j|}\mathbf{e}_i$  convient.  $\square$

Dans ce qui suit, on note  $d(\mathbf{x}, \mathbb{R}\alpha)$  (resp.  $d(\mathbf{x}, \alpha^\perp)$ ) la distance d'un vecteur  $\mathbf{x}$  à la droite  $\mathbb{R}\alpha$  (resp. à l'hyperplan de vecteur normal  $\alpha$ ). Le lemme suivant, soit se voit géométriquement (en termes d'angles de cônes d'axe  $\mathbb{R}\alpha$ ), soit se démontre par un calcul (voir [15]) :

**Lemme 5.16** *Soit  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux vecteurs réels orthogonaux. Alors, on a :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{d(\mathbf{x}, \mathbb{R}\alpha)}{d(\mathbf{x}, \alpha^\perp)} \leq a \Rightarrow \frac{d(\mathbf{y}, \mathbb{R}\alpha)}{d(\mathbf{y}, \alpha^\perp)} \geq \frac{1}{a}$$

**Lemme 5.17** *Soit  $\alpha \in [0, 1]^d$  et  $r \geq 0$ . Alors, il existe un entier  $N$  tel que :*

$$(n \geq N, \mathbf{x} \in S, \langle B_n^{-1}\mathbf{x} | (1, \alpha) \rangle \neq 0) \Rightarrow \|B_n^{-1}\mathbf{x}\| \geq r,$$

où  $(a_n, i_n)_{n \geq 0}$  est le développement de Brun de  $\alpha$ ,  $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$  et  $S$  est l'ensemble des vecteurs entiers ni strictement positifs ni strictement négatif.

*Preuve.* Introduisons le nombre réel positif suivant :

$$a_r = \min\{d(\mathbf{y}, (1, \alpha)^\perp) \mid \mathbf{y} \in S, \langle \mathbf{y} | (1, \alpha) \rangle \neq 0, \|\mathbf{y}\| \leq r\}.$$

Soulignons que les hypothèses assurent que ce nombre est non nul. Notons alors, premièrement, que la faible convergence de l'algorithme de Brun assure qu'il existe un entier  $N$  tel que :

$$(n \geq N, \mathbf{u} \in \text{Conv}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\})) \Rightarrow \frac{d(B_n \mathbf{u}, \mathbb{R}(1, \boldsymbol{\alpha}))}{d(B_n \mathbf{u}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp)} < \frac{a_r}{r},$$

où  $\text{Conv}(A)$  désigne l'enveloppe convexe de  $A$ . Notons, deuxièmement, que le lemme 5.15 permet d'associer à tout vecteur  $\mathbf{x} \in S$  un vecteur  $\mathbf{u} \in \text{Conv}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d+1}\})$  qui lui est orthogonal (en particulier, pour tout  $n$ , on a  $\langle B_n^{-1} \mathbf{x} | B_n \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{u} \rangle = 0$ ). Le lemme 5.16 relie alors les deux points précédents et assure :

$$(n \geq N, \mathbf{x} \in S, \langle B_n^{-1} \mathbf{x} | (1, \boldsymbol{\alpha}) \rangle \neq 0) \Rightarrow \frac{d(B_n^{-1} \mathbf{x}, \mathbb{R}(1, \boldsymbol{\alpha}))}{d(B_n^{-1} \mathbf{x}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp)} \geq \frac{r}{a_r}.$$

Soulignons que si  $\|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \leq r$ , alors on a  $d(B_n^{-1} \mathbf{x}, \mathbb{R}(1, \boldsymbol{\alpha})) \leq \|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \leq r$  et  $d(B_n^{-1} \mathbf{x}, (1, \boldsymbol{\alpha})^\perp) \geq a_r$ . On en déduit que l'inégalité du membre droit de l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée que si  $\|B_n^{-1} \mathbf{x}\| \geq r$ . Ceci prouve le résultat annoncé.  $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 5.14 :

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}_3$  et  $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d$  partageant le même développement de Brun  $(a_n, i_n)_n$ , infini. D'après le théorème 4.20, on peut écrire, pour tout  $n$  :

$$\tilde{T}^n(\mathcal{S}) = \mathcal{P}_{\mu_n^{-1} B_n^{-1}(1, \boldsymbol{\alpha}), 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{k,n} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_{k,n}},$$

où  $\mu_n = \|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^n(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty$  et  $B_n = B_{a_0, i_0} \dots B_{a_n, i_n}$ . On a alors :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{k,n} \mathcal{F}_{B_n^{-1} \mathbf{x}_{k,n}}.$$

Comme deux surfaces égales à translation près ont le même développement de Brun, on peut supposer sans restriction de généralité que  $\mathbf{0}$  est un sommet de  $\mathcal{S}$ . On en déduit, d'après la proposition 4.6, que pour tous  $k$  et  $n$ ,  $B_n^{-1} \mathbf{x}_{k,n}$  n'est ni strictement positif ni strictement négatif. On déduit alors du lemme 5.17 :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}), 0} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{y}_k},$$

où, pour tout  $k$ ,  $\langle \mathbf{y}_k | (1, \boldsymbol{\alpha}) \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{y}_k \in D_{(1, \boldsymbol{\alpha}), 0}$ . Remarquons qu'on a en fait  $\varepsilon_k = 1$ , sinon  $\mathcal{S}$  ne serait pas binaire. On conclut donc finalement que  $\mathcal{S}$  est un quasi-plan de vecteur normal  $(1, \boldsymbol{\alpha})$ .  $\square$

### 5.3.3 Cas réductible

On s'intéresse ici à la réciproque du théorème 5.14, c'est-à-dire à la question de savoir si tout quasi-plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$  a le même développement de Brun que le vecteur  $\alpha$ . L'exemple suivant montre que c'est, en général, faux :

**Exemple 5.18** Soit  $\alpha = (\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$  et  $\rho = 0$ . Notons que les coordonnées de  $\alpha$  sont liées sur  $\mathbb{Q}$ . Un calcul montre que  $\alpha$  admet le développement infini  $[(1, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1)]$ . Par ailleurs, on a :

$$D_{(1, \sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2}), 0} = \mathbb{Z}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3).$$

On vérifie alors qu'un quasi-plan de vecteur normal  $(1, \sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$  n'a le même développement que  $(\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$  que si son défaut est de la forme :

$$D_a = \{k(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \mid k \leq a\},$$

où  $a \in \mathbb{Z}$ . En effet, si ce n'est pas le cas, on vérifie que la deuxième itération de  $\tilde{T}$  tombe hors de  $\mathfrak{S}_3$ . En particulier, notons que si le défaut est de la forme :

$$D'_a = \{k(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \mid k \geq a\},$$

alors on a affaire à un quasi-plan qui peut s'obtenir comme une limite de plans, mais dont le développement de Brun n'est pourtant pas le même que celui de son vecteur normal. La figure 5.6 illustre cet exemple.

Un cas, cependant, où la réciproque s'avère vraie est celui d'un vecteur normal totalement irrationnel :

**Proposition 5.19** Soit  $\alpha \in [0, 1]^d$  un vecteur totalement irrationnel, c'est-à-dire tel que  $\dim_{\mathbb{Q}}(\alpha) = d + 1$ . Alors, tout quasi-plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$  a le même développement de Brun que  $\alpha$ .

*Preuve.* Soit  $(a_n, i_n)_n$  le développement de  $\alpha$ . Soit  $\mathcal{S} \simeq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$ . Notons que comme  $\alpha$  est, en particulier, libre sur  $\mathbb{Q}$ , il existe au plus un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\langle \mathbf{x} | \alpha \rangle = \rho$ . Le défaut de  $\mathcal{S}$  comporte donc au plus un flip. Si ce flip n'est pas dans le défaut, alors  $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$ , et le résultat est acquis. Sinon, comme  $(1, \alpha)$  est libre sur  $\mathbb{Q}$ , le lemme 5.20 ci-dessous montre que ce flip ne modifie pas, globalement, les tailles des paliers de  $\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$ . On a donc  $a_0 = a(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = a(\mathcal{S})$  et  $i_0 = i(\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}) = i(\mathcal{S})$ . Comme on a encore  $\dim_{\mathbb{Q}} T(\alpha) = d + 1$ , on en déduit le résultat par induction.  $\square$

**Lemme 5.20** Soit  $\alpha$  un vecteur dont les coordonnées sont libres sur  $\mathbb{Q}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Supposons qu'il existe  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\langle \mathbf{x} | \alpha \rangle = \rho$ . Alors,  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho} + \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$  est un quasi-plan qui, pour tout  $i$  et tout  $j$ , a les mêmes tailles de  $(i, j)$ -paliers que  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ .

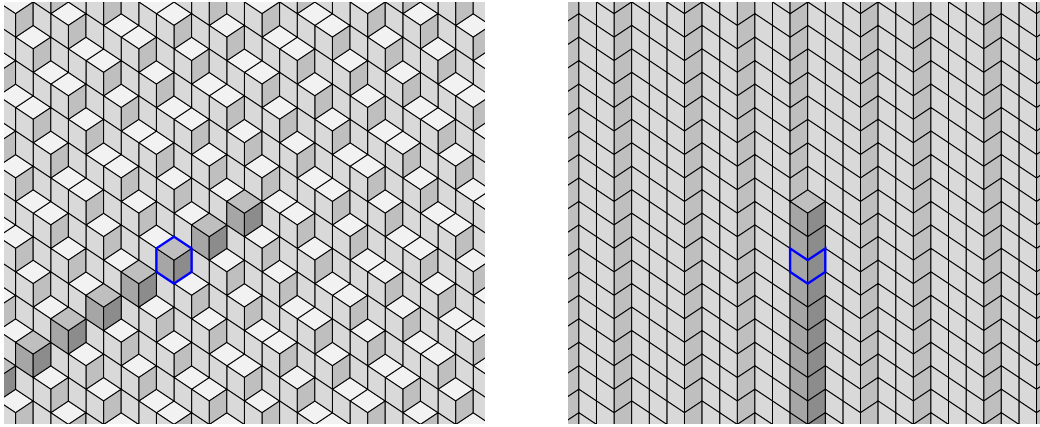


FIG. 5.6 – Un quasi-plan de vecteur normal  $(\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2})$  (à gauche - flips du défaut foncés) n'a pas forcément un développement infini comme son vecteur normal. En effet, la troisième itération de  $\tilde{T}$  montre que le défaut doit avoir une forme bien particulière (à droite - flips du défaut foncés. Le flip encadré à droite est l'image du flip encadré à gauche : son absence rendrait la fonction non binaire).

*Preuve.* Fixons  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, d\}$  et notons  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ . Remarquons d'abord qu'il y a deux tailles distinctes de  $(i, j)$ -paliers, car sinon on déduirait de la proposition 3.19 que  $\alpha_i/\alpha_j \in \mathbb{Z}$ . Le palier dont la taille est décrémenté par le flip est de la forme :

$$\sum_{k=0}^a (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i + k\mathbf{e}_j, i^*).$$

Comme c'est un palier de  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$ , on a en particulier :

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{e}_i + a\mathbf{e}_j | \alpha \rangle > \rho.$$

Or, on calcule :

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{e}_i + a\mathbf{e}_j | \alpha \rangle = \langle \mathbf{x} | \alpha \rangle - \alpha_i + a\alpha_j = \rho - \alpha_i + a\alpha_j.$$

On a donc  $a > \alpha_i/\alpha_j$ , et on déduit de la proposition 3.19 que c'est un grand palier.<sup>2</sup> Similairement, le palier dont la taille est incrémenté par le flip est de la forme :

$$\sum_{k=0}^a (\mathbf{x} - k\mathbf{e}_j, i^*).$$

<sup>2</sup>Rappelons qu'un plan en escalier a toujours au plus deux tailles de paliers (exactement deux dans le cas irrationnel ici étudié). On appelle naturellement "grand palier" le plus grand des deux, et "petit palier" l'autre.

Comme c'est un palier de  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ , on a en particulier :

$$\langle \mathbf{x} - a\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq \rho.$$

Or, on calcule :

$$\langle \mathbf{x} - a\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i | \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha} \rangle - a\alpha_j + \alpha_i = \rho - a\alpha_j + \alpha_i.$$

On a donc  $a \leq \alpha_i/\alpha_j$ , et même  $a < \alpha_i/\alpha_j$  puisque  $\alpha_i/\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ . On déduit alors de la proposition 3.19 que c'est un petit palier. Finalement, ce flip incrémente la taille d'un petit palier et décrémente celle d'un grand palier. On en déduit le résultat.  $\square$

La figure 5.7 illustre le lemme précédent.

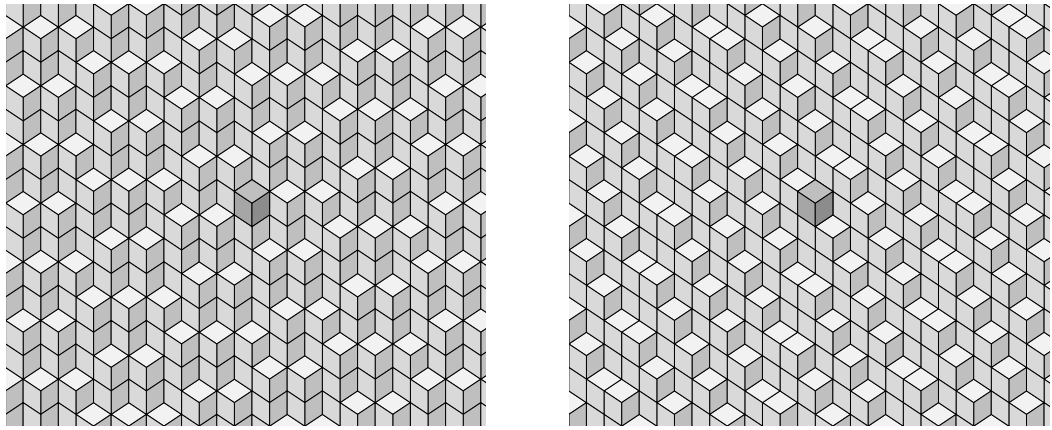


FIG. 5.7 – Un quasi-plan dont le vecteur normal  $(1, \boldsymbol{\alpha})$  est libre sur  $\mathbb{Q}$  a globalement les mêmes tailles de paliers qu'un plan de même vecteur normal (à gauche - l'unique flip du défaut étant foncé). Si, de plus, on a  $\dim_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}) = d + 1$ , alors cette propriété se conserve en appliquant  $\tilde{T}$ . Soulignons que c'est en général faux pour un vecteur normal quelconque (à droite - un flip du défaut, foncé, modifie les tailles des paliers).

À l'opposé du cas totalement irrationnel précédent, examinons brièvement le cas d'un vecteur rationnel, c'est-à-dire de dimension nulle sur  $\mathbb{Q}$ . Soit  $\boldsymbol{\alpha} \in [0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$  et soit  $(a_n, i_n)_{0 \leq n \leq N}$  son développement de Brun (fini). Alors, une surface en escalier  $\mathcal{S}$  a le même développement que  $\boldsymbol{\alpha}$  si  $\tilde{T}^n(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}_{exists} \setminus \mathfrak{S}_{\forall}$  pour  $k \leq N$  et si  $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$  vérifie une des trois conditions suivantes : dans trois cas :

1.  $\tilde{T}^N(\mathcal{S}) \in \mathfrak{S}_{\forall}$  (c'est donc un quasi-plan de vecteur normal  $(1, T^N(\boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{e}_1$ );
2.  $\tilde{T}^N(\mathcal{S}) \notin \mathfrak{S}_{\exists}$ ;
3.  $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$  n'est pas  $i$ -cohérente.

Notons que le dernier cas pouvant en fait se combiner aux deux précédents, il y a véritablement cinq cas au total. Si on se restreint au premier cas, on déduit de la proposition 5.11 et du théorème 5.13 que  $\mathcal{S}$  a le même développement que  $\alpha$  si et seulement si c'est un quasi-plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$  dont le défaut  $D$  vérifie :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad D \subset D + B_N \mathbf{e}_{i+1},$$

où  $B_N = B_{a_0, i_0} \times B_{a_N, i_N}$ . La figure 5.8 illustre cette condition, pas forcément évidente au premier coup d'œil.

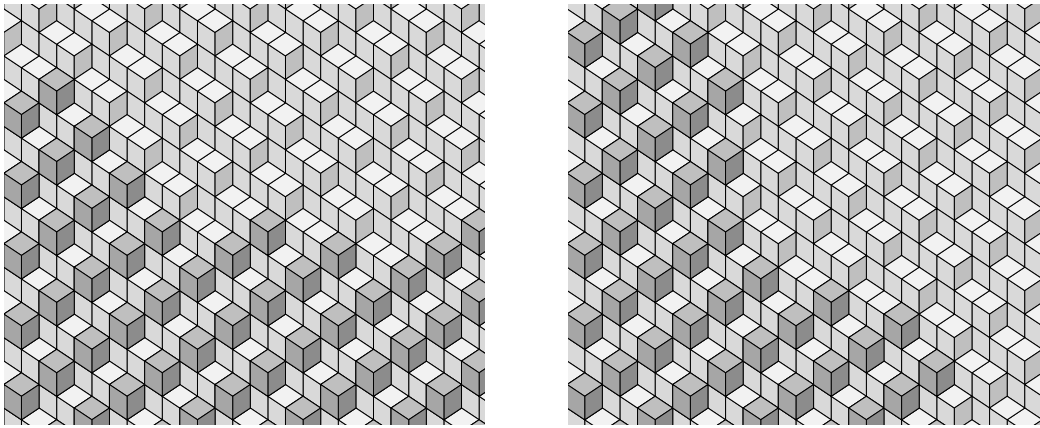


FIG. 5.8 – Deux quasi-plans de vecteur normal  $(1, 1/3, 2/3)$ . La dernière itération de  $\tilde{T}$  sur le premier (à gauche) est dans  $\mathfrak{S}_v$ , mais pas sur le second (à droite).

Entre le cas rationnel et le cas totalement irrationnel, la situation est plus délicate. La suite de ce paragraphe étudie le cas des vecteurs irrationnels *réductibles*.

Rappelons qu'un vecteur  $\alpha$  est dit *réductible au rang  $N$*  si le nombre de coordonnées non nulles de  $T^N(\alpha)$  est égal à la dimension de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$ . En particulier, le théorème 3.13 montre que tout vecteur rationnel est réductible. Soulignons, cependant, que tout vecteur n'est pas réductible. Considérons l'exemple suivant, tiré de [22]. Soit  $\alpha \in [0, 1]^3$  défini par :

$$\alpha = \left( \frac{1}{2 - \lambda^2}, \frac{1 - \lambda}{2 - \lambda^2}, \frac{\lambda}{2 - \lambda^2} \right),$$

où  $\lambda$  est la racine réelle de  $X^3 - 3X + 1$  ( $\lambda \simeq 0.3473$ ). Un calcul montre alors que  $T^6(\alpha) = \alpha$ . On en déduit que  $T^n(\alpha)$  n'a jamais de coordonnée nulle. Comme la dimension sur  $\mathbb{Q}$  de  $\alpha$  vaut 2, on conclut que  $\alpha$  n'est pas réductible.

Le cas des développements infinis réductibles ressemble alors à une combinaison du cas rationnel et du cas totalement irrationnel :

**Théorème 5.21** *Soit  $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \mathbb{Q}^d$  un vecteur réductible au rang  $N$ . Alors, une surface en escalier  $\mathcal{S}$  a le même développement de Brun que  $\alpha$  si et seulement si son image par  $\tilde{T}^N$  est un quasi-plan de vecteur normal  $(1, T^N(\alpha))$ .*

*Preuve.* Si  $\mathcal{S}$  a le même développement (infini) que  $\alpha$ , on sait que c'est un quasi-plan de vecteur normal les développements de Brun de  $\mathcal{S}$  et  $\alpha(1, \alpha)$ , et le résultat découle alors du théorème 5.13. Inversement, supposons que  $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$  soit un quasi-plan de vecteur normal  $(1, T^N(\alpha))$ . Comme  $\alpha$  est réductible au rang  $N$ , on peut supposer que  $T^N(\alpha)$  s'écrit  $(\beta, \mathbf{0})$ , où  $\beta$  est un vecteur totalement irrationnel de taille  $\dim_{\mathbb{Q}} \alpha$ . On déduit alors aisément de la proposition 5.11 et du lemme 5.20 que  $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$  a globalement les mêmes tailles de palier que le plan de vecteur normal  $(1, T^N(\alpha))$ . Comme pour  $n \geq N$ ,  $T^n(\alpha)$  s'écrit aussi de la même manière, on en déduit alors par induction que  $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$  a le même développement de Brun que  $T^N(\alpha)$ . Donc les développements de Brun de  $\mathcal{S}$  et  $\alpha$  sont identiques à partir du  $N + 1$ -ème terme. Par ailleurs, le théorème 5.14 assure que  $\mathcal{S}$  est un quasi-plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$ . Or le développement d'un vecteur étant unique, le fait que  $\tilde{T}^N(\mathcal{S})$  soit un quasi-plan de vecteur normal  $(1, T^N(\alpha))$  montre que les développements de Brun de  $\mathcal{S}$  et  $\alpha$  partagent les mêmes  $N$  premiers termes. Finalement, ceci montre que les développements de Brun de  $\mathcal{S}$  et  $\alpha$  sont égaux.  $\square$

La figure 5.6 illustre ce théorème dans le cas où  $\dim_{\mathbb{Q}} \alpha = 2$  et  $D_{(1, \alpha), \rho}$  est de rang 1. Notons qu'illustrer un cas où  $D_{(1, \alpha), \rho}$  est de rang 2 ne peut se faire qu'en dimension au moins 3.

En résumé, si toute surface en escalier ayant le même développement de Brun qu'un vecteur  $\alpha$  est nécessairement un quasi-plan de vecteur normal  $(1, \alpha)$ , seuls certains quasi-plans de vecteur normal  $(1, \alpha)$  ont le même développement de Brun que le vecteur  $\alpha$ , et on sait caractériser ces quasi-plans dans le cas où le développement de  $\alpha$  est réductible.

# Chapitre 6

## Génération et reconnaissance de plan

Dans ce chapitre 6, nous montrons comment appliquer les résultats des chapitres précédents en géométrie discrète, plus précisément en ce qui concerne les problèmes de la génération et de la reconnaissance de plans discrets (rôle joué par les plans en escalier). On commence par introduire les *morceaux de plans en escalier* et étudie l'action des applications duales sur ces morceaux (paragraphe 6.1). On expose ensuite, au paragraphe 6.2, trois techniques différentes pour engendrer un plan en escalier. La première consiste à itérer une application duale sur un morceau fini de plan en escalier, et à engendrer ainsi – sous certaines conditions – des morceaux de plus en plus grands de ce plan (Th. 6.9). Ce résultat a été publié dans [55]. La seconde technique repose sur les résultats du chapitre 5 : en itérant une application duale adéquate sur une surface en escalier, on obtient – sous certaines conditions – une suite de surfaces en escalier convergeant vers le plan en escalier désiré (Th. 6.10). Enfin, la dernière technique consiste à engendrer un plan dont le vecteur normal a des coordonnées rationnelles à partir d'un *domaine fondamental*, c'est-à-dire d'un morceau de plan fini engendrant tout ce plan par périodicité. On montre comment construire un domaine fondamental de taille minimal grâce aux applications duales associées au développement en fraction continues du vecteur normal du plan que l'on veut engendrer (6.14). Ce résultat a été récemment soumis, dans [56]. En ce qui concerne la reconnaissance de plan, étudiée au paragraphe 6.3, on décrit un algorithme qui généralise la méthode de reconnaissance de droite exposée au chapitre 1 : on calcule le développement d'une fonction binaire et on en déduit sa nature – plan en escalier ou non (Th. 6.25). La complexité d'un tel algorithme est discutée, bien que nous ne proposons pour l'instant qu'une borne théorique sans doute très large. Ce résultat a également été récemment soumis, dans [56].

## 6.1 Morceau de plan et application duale

**Définition 6.1** Soit  $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$  un plan en escalier. Un morceau de  $\mathcal{P}$  est une fonction binaire inférieure à  $\mathcal{P}$ . En particulier, l'interprétation géométrique d'un morceau de plan est incluse dans celle du plan en question.

Rappelons que selon la terminologie habituelle propre aux fonctions à valeur dans un ensemble ordonné – ce qui concerne en particulier les plans en escalier et les fonctions binaires – une fonction est *inférieure* (ou *supérieure*) à une autre si, en chaque point, la valeur de la première est inférieure (ou supérieure) à la valeur de la seconde. La figure 6.1 représente un morceau de plan.

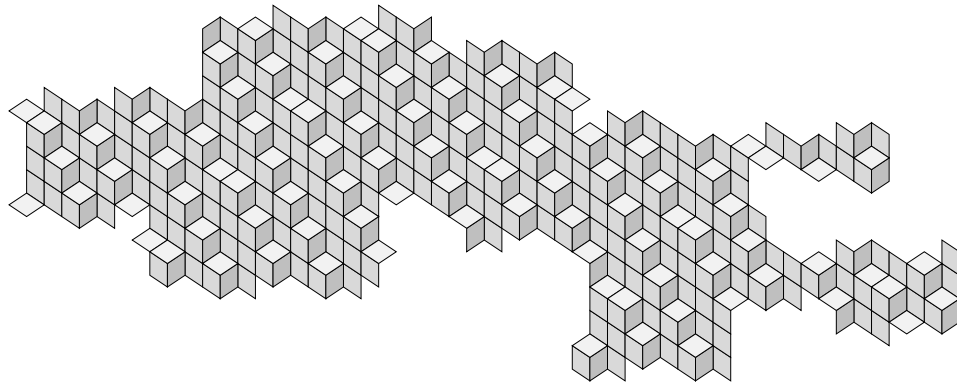


FIG. 6.1 – Un morceau fini (de taille 405) du plan en escalier de la figure 3.1.

Une application duale étant définie sur tout l'ensemble  $\mathfrak{F}$ , elle est en particulier définie sur les morceaux de plan. Cependant, si  $\sigma$  est un morphisme unimodulaire quelconque, alors l'image d'un morceau de plan par  $E_1^*(\sigma)$  comporte généralement des faces à coefficients négatifs et n'est donc pas un morceau de plan. La suite de ce paragraphe est dédiée à deux cas particuliers qui seront utiles par la suite.

Le premier cas particulier est celui des substitutions. On a alors :

**Proposition 6.2** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . L'application duale d'une substitution unimodulaire  $\sigma$  envoie un morceau du plan en escalier  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$  sur un morceau du plan en escalier  $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\alpha,\rho}$ .

*Preuve.* Soit  $\mathcal{B}$  un morceau de  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$ . Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions positives de  $\mathfrak{F}$  est stable par l'application duale d'une substitution. Le morceau  $\mathcal{B}$  étant positif, son image  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{B})$  l'est aussi. De même, la fonction  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho} - \mathcal{B}$  est positive (c'est le morceau de  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$  complémentaire de  $\mathcal{B}$ ), donc son image  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,\rho} - \mathcal{B})$  l'est aussi. Or on a :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,\rho} - \mathcal{B}) = E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\alpha,\rho}) - E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}) = \mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\alpha,\rho} - E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}).$$

On en déduit :  $0 \leq E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}) \leq \mathcal{P}_{t_{M\sigma\alpha,\rho}}$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

Notamment, en itérant une application duale de substitution sur un morceau de plan, on obtient une suite de morceaux de plans, généralement de taille croissante puisque chaque face est envoyée sur une combinaison linéaire à coefficients *positifs* de faces (voir Fig. 6.2). Ceci explique le terme de *substitution généralisée* parfois employé pour les applications duales de substitution.

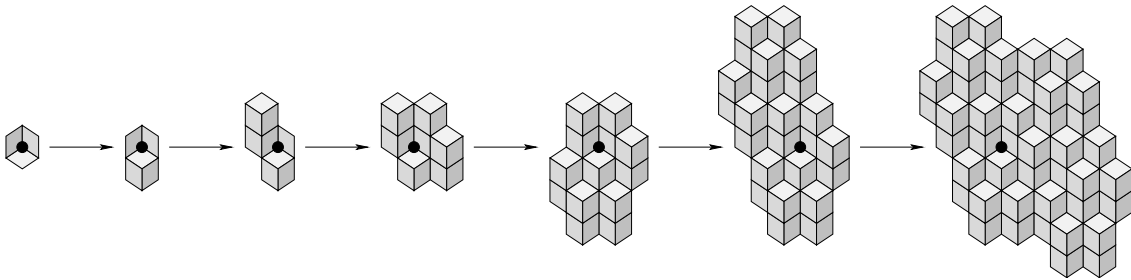


FIG. 6.2 – En itérant l'application duale de substitution sur un morceau de plan, on obtient une suite de morceaux de taille croissante (de gauche à droite).

Le second cas particulier est celui des *désstitutions*, c'est-à-dire des morphismes inverses d'une substitution. Introduisons d'abord la notion de  $\sigma$ -pavage :

**Définition 6.3** Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire. Soit  $\mathcal{B}$  une fonction binaire. Un  $\sigma$ -pavage de  $\mathcal{B}$  est un sous-ensemble  $E \subset \mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  tel que :

$$\mathcal{B} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*).$$

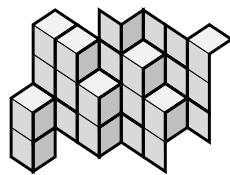


FIG. 6.3 – Fonction binaire admettant un  $\beta_{2,2}$ -pavage, où  $\beta_{2,2}$  est une substitution de Brun (Déf. 3.17, voir aussi Fig. 3.3). On peut voir ce  $\beta_{2,2}$ -pavage comme un pavage par trois types de tuiles (encadrés en noir).

La figure 6.3 illustre cette notion. Le terme *pavage* vient du fait que si  $E$  est un  $\sigma$ -pavage d'une fonction binaire  $\mathcal{B}$ , alors les interprétations géométriques de  $\mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*)$ , pour  $\mathbf{x} \in E$ , forment un pavage de  $\mathcal{B}$  (au sens le plus général d'un pavage, tel que rappelé au chapitre 1). La proposition suivante montre qu'un  $\sigma$ -pavage, s'il existe, est unique :

**Proposition 6.4** *Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire inversible. Alors, toute fonction binaire admet au plus un  $\sigma$ -pavage.*

*Preuve.* Supposons que  $\mathcal{B}$  admette un  $\sigma$ -pavage  $E$  :

$$\mathcal{B} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*).$$

On calcule alors :

$$\mathcal{B} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i^*) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} E_1^*(\sigma)(M_\sigma \mathbf{x}, i^*) = E_1^*(\sigma) \left( \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} (M_\sigma \mathbf{x}, i^*) \right).$$

On en déduit :

$$E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{B}) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} (M_\sigma \mathbf{x}, i^*).$$

On a donc :

$$(\mathbf{x}, i) \in E \Leftrightarrow E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{B})(M_\sigma \mathbf{x}, i) = 1,$$

ce qui montre que  $E$  est entièrement caractérisé par  $\mathcal{B}$ .  $\square$

La notion de  $\sigma$ -pavage permet notamment de donner une caractérisation des morceaux de plan qui se désubstituent en morceaux de plan :

**Proposition 6.5** *Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire inversible. L'image d'un plan en escalier  $\mathcal{P}$  par  $E_1^*(\sigma^{-1})$  est un plan si et seulement si  $\mathcal{P}$  est  $\sigma$ -pavable. De plus, si c'est le cas, alors l'image d'un morceau  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}$  est un morceau de  $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P})$  si et seulement si  $\mathcal{B}$  admet un  $\sigma$ -pavage inclus dans celui de  $\mathcal{P}$ .*

*Preuve.* Supposons que  $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P})$  soit un plan et notons  $E'$  son support.<sup>1</sup> En appliquant  $E_1^*(\sigma)$ , on obtient :

$$\mathcal{P} = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E'} E_1^*(\sigma)(\mathbf{x}, i) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E'} M_\sigma^{-1} \mathbf{x} + E_1^*(\sigma)(\mathbf{0}, i),$$

ce qui montre que  $E = \{(M_\sigma^{-1} \mathbf{x}, i) \mid (\mathbf{x}, i) \in E'\}$  est un pavage de  $\mathcal{P}$ . Inversement, supposons que  $E$  soit un pavage de  $\mathcal{P}$ . On calcule alors :

$$E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P}) = \sum_{(\mathbf{x}, i) \in E} M_\sigma^{-1} \mathbf{x} + (\mathbf{0}, i^*).$$

L'image de  $\mathcal{P}$  par  $E_1^*(\sigma^{-1})$  est donc binaire : le théorème 3.6 assure alors que c'est un plan en escalier. Considérons maintenant un morceau  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}$ . Si son image par

<sup>1</sup>C'est-à-dire, selon la définition 2.4, le sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  où ce plan (qui est une fonction de  $\mathfrak{F}$ ) ne s'annule pas.

$E_1^*(\sigma^{-1})$  est un morceau de plan, alors son support est inclus dans le support  $E'$  ci-dessus. On en déduit, en appliquant  $E_1^*(\sigma)$ , un  $\sigma$ -pavage inclus (au sens des parties de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$ , c.f. Def. 6.3) dans celui de  $\mathcal{P}$ . Inversement, si  $\mathcal{B}$  admet un  $\sigma$ -pavage inclus dans celui de  $\mathcal{P}$ , alors on en déduit que  $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{B})$  est inférieure à  $E_1^*(\sigma^{-1})(\mathcal{P})$ , et en est donc un morceau.  $\square$

Soulignons qu'un morceau de plan peut très bien admettre un  $\sigma$ -pavage sans que celui-ci soit inclus dans ce plan. On vérifie, par exemple, que le morceau de la figure 6.1 admet un  $\beta_{2,2}$ -pavage, mais que celui-ci ne peut être inclus dans le  $\beta_{2,2}$ -pavage du plan de la figure 3.1.

## 6.2 Génération de plan

### 6.2.1 Plan substitutif

Rappelons qu'un mot est dit *substitutif* si c'est l'image par un morphisme d'un mot  $u$  engendré par une substitution  $\sigma$ , c'est-à-dire s'écrivant :

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(v),$$

où  $v$  un mot fini (idéalement, une simple lettre). Soulignons que  $u$  est alors un point fixe de  $\sigma$ . Par analogie :

**Définition 6.6** *Un plan en escalier est dit substitutif si c'est l'image par une application duale de morphisme d'un plan en escalier  $\mathcal{P}$  engendré par une application duale de substitution, c'est-à-dire s'écrivant :*

$$\mathcal{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{B}),$$

où  $\mathcal{B}$  est un morceau fini de plan.

Soulignons qu'un plan substitutif est donc l'image d'un plan point fixe. Peut-on être plus précis ? Si l'on revient à l'analogie avec le continu introduite par la remarque 3.5, la question de l'engendrement d'un plan revient à déterminer si, étant donné un hyperplan réel  $P$  stable par  $M_\sigma^{-1}$ , il existe une substitution unimodulaire  $\sigma$  et une partie bornée  $B \subset P$  tels que :

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} M_\sigma^{-n} B.$$

Il n'est alors pas difficile de montrer qu'il y a engendrement si et seulement si le vecteur nul est dans l'intérieur de  $B$  (intérieur relatif à  $P$ ) et si  $P$  est un espace propre dilatant de  $M_\sigma^{-1}$ , c'est-à-dire que les valeurs propres de  $M_\sigma^{-1}$  associée à cet espace propre ont toute un module strictement supérieur à 1.

Notons qu'un espace propre dilatant de  $M_\sigma^{-1}$  est un espace propre *contractant* de  $M_\sigma$ , c'est-à-dire que les valeurs propres de  $M_\sigma$  associées à cet espace ont toutes un module strictement inférieur à 1. En particulier, si l'espace contractant est un hyperplan (comme c'est le cas ci-dessus) et si  $\sigma$  est unimodulaire, alors la valeur propre de  $M_\sigma$  qui n'est pas associée à un vecteur propre de l'espace propre contractant a nécessairement un module strictement supérieur à 1 (le produit des valeurs propres valant 1), et réelle puisque les valeurs propres complexes d'une matrice réelle sont deux à deux conjuguées. Il est donc naturel d'introduire la classe de substitutions suivante :

**Définition 6.7** Une substitution est dite *Pisot* si le spectre de sa matrice d'incidence s'écrit  $\{\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda\}$  avec  $0 < |\mu_1|, \dots, |\mu_k| < 1$  et  $\lambda > 1$ .

**Exemple 6.8** La substitution unimodulaire  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  a pour spectre  $\{\lambda, \mu, \bar{\mu}\}$ , où  $\lambda \simeq 1.83928$  et  $|\mu| \simeq 0.73735$ . Elle est donc *Pisot*.

On montre alors :

**Théorème 6.9** Un plan en escalier est substitutif si et seulement si c'est l'image par une application duale de morphisme d'un plan invariant par l'application duale d'une substitution *Pisot*.

La preuve de ce théorème est essentiellement une discrétisation du résultat analogue dans le cas continu. Mentionnons qu'il est possible d'estimer la taille du morceau  $\mathcal{B}$  initial (voir Déf. 6.6) en fonction du spectre de  $M_\sigma$ . Cependant, il faut quand même disposer d'un morceau de plan initial correct, ce qui n'est pas toujours évident d'un point de vue pratique. Un morceau idéal serait le morceau  $\mathcal{B}_0$  défini par :

$$\mathcal{B}_0 = \sum_{i=1}^d (-\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*).$$

En effet, on vérifie facilement que ce morceau est un morceau de *tout* plan en escalier. Malheureusement, exiger que  $\sigma$  soit *Pisot* ne suffit alors pas toujours à ce que ce morceau engendre le plan en escalier point fixe de  $E_1^*(\sigma)$ . Notons qu'une caractérisation en terme de numération (condition *F*) des substitutions pour lesquelles c'est le cas peut être trouvée dans [17].

Notons au passage que la théorie de Perron-Frobenius assure que la matrice d'incidence d'une substitution *Pisot* admet un unique vecteur propre positif. On en déduit que l'application duale d'une substitution *Pisot* admet un unique plan en escalier invariant : on parle de *son* point fixe. Pour finir ce paragraphe, mentionnons qu'au lieu d'engendrer un plan à partir d'un morceau fini, on peut aussi l'engendrer à partir d'une surface en escalier. Plus précisément, on montre (voir aussi Fig. 6.5) :

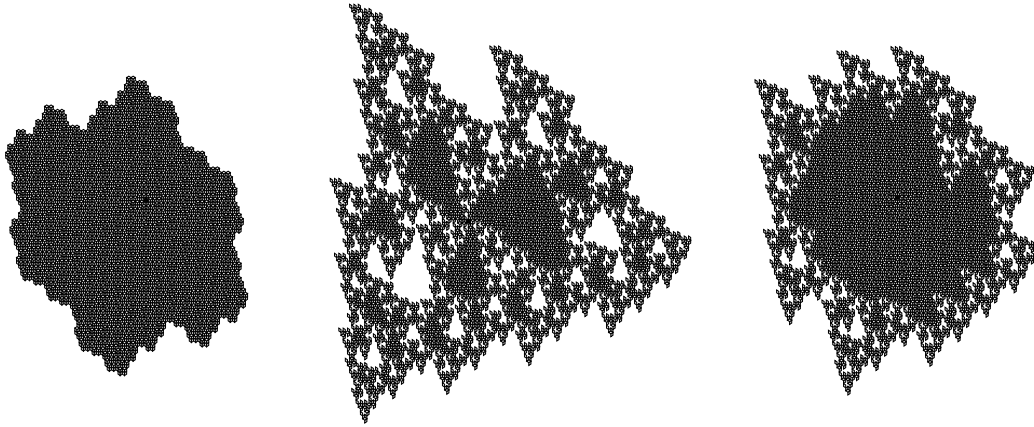


FIG. 6.4 – La substitution unimodulaire Pisot  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  et le morceau de plan  $\mathcal{B}_0$  engendrent tout le plan (à gauche, après quelques itérations). Par contre, la substitution unimodulaire Pisot  $\sigma' : 1 \mapsto 21, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  (qui a la même matrice d'incidence que  $\sigma$ ) et le morceau de plan  $\mathcal{B}_0$  n'engendrent pas tout le plan (au centre). Il existe cependant, d'après le théorème 6.9, un morceau de plan fini  $\mathcal{B}$  tel que  $\sigma'$  et  $\mathcal{B}$  engendrent tout le plan (à droite).

**Théorème 6.10** Soit  $\sigma$  une substitution unimodulaire Pisot. Soit  $\mathcal{P}$  le point fixe de  $E_1^*(\sigma)$ . Alors, pour tout surface en escalier  $\mathcal{S}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{S}) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P} + \mathcal{F}_0\}.$$

En d'autres termes, itérer  $E_1^*(\sigma)$  sur une surface en escalier fournit une suite de surfaces en escalier convergeant vers le point fixe de  $E_1^*(\sigma)$ .

*Preuve.* Soit  $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$ . D'après le théorème 4.20, on peut écrire :

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k},$$

où, pour tout  $k$ ,  $\varepsilon_k = \pm 1$  et  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{Z}^d$ . On a alors, par continuité de  $E_1^*(\sigma)$  et d'après la proposition 5.1 :

$$E_1^*(\sigma)^n(\mathcal{S}) = \mathcal{P} + \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \mathcal{F}_{M_\sigma^{-n} \mathbf{x}_k}.$$

Tout vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  peut s'écrire comme la somme d'un vecteur réel  $\mathbf{y}$  de l'espace dilatant de  $M_\sigma$  et d'un vecteur réel  $\mathbf{z}$  de l'espace contractant de  $M_\sigma$ . L'image par  $M_\sigma^{-n}$  de  $\mathbf{y}$  va tendre vers  $\mathbf{0}$  avec  $n$ . L'image par  $M_\sigma^{-n}$  de  $\mathbf{z}$  va diverger avec  $n$ , sauf si ce  $\mathbf{z}$  est nul, auquel cas  $\mathbf{x}$  est dans l'espace dilatant de  $M_\sigma$ . On a alors  $M_\sigma \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , donc  $\lambda \in \mathbb{Q}$  puisque  $\mathbf{x}$  et  $M_\sigma$  sont entiers. Ceci étant exclu, on peut conclure :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|M_\sigma^{-n} \mathbf{x}\| = +\infty$$

Les flips  $\mathcal{F}_{M_\sigma^{-n} \mathbf{x}_k}$  sont donc “rejetés” à l’infini, sauf éventuellement le flip  $\mathcal{F}_0$  (qui, lui, est stable), ce qui montre le résultat.  $\square$

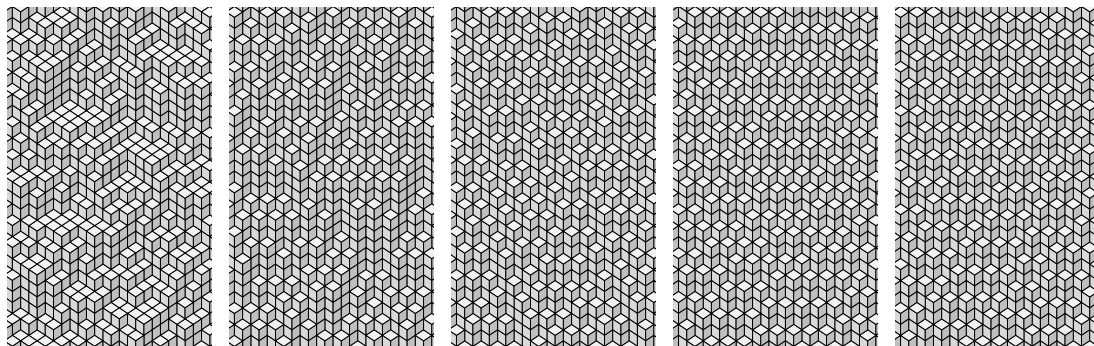


FIG. 6.5 – Itérer l’application duale d’une substitution Pisot sur une surface en escalier engendre une suite de surfaces convergeant vers un plan en escalier point fixe (avec éventuellement un flip en plus à l’origine). Ici, on a représenté quelques itérations pour la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  : le plan limite est le même que sur la figure 6.4.

### 6.2.2 Périodes Pisot

Le paragraphe précédent a montré qu’un plan substitutif ne pouvait être engendré que par une substitution Pisot. Cependant, aucun moyen n’a été donné permettant de déduire une telle substitution Pisot à partir des paramètres du plan que l’on veut construire. On montre ici que les développements de Brun apportent une réponse partielle. Donnons d’abord une condition nécessaire algébrique de substitutivité :

**Proposition 6.11** *Si un plan en escalier est substitutif, alors les coordonnées de son vecteur normal sont irrationnelles et appartiennent à une extension de corps  $\mathbb{Q}(\lambda)$ , où  $\lambda$  est un nombre algébrique de degré  $d$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{P}_{\alpha, \rho}$  un plan substitutif. C’est donc l’image par l’application duale d’un morphisme  $\mu$  d’un plan  $\mathcal{P}_{\alpha', \rho'}$  point fixe de l’application duale d’une substitution Pisot  $\sigma$ . D’après le théorème 3.4,  $\alpha'$  est alors un vecteur propre de la matrice  ${}^t M_\sigma$  :

$${}^t M_\sigma \alpha' = \lambda \alpha'.$$

De, plus, il est prouvé dans [27] que le fait que  $\sigma$  soit Pisot entraîne que le polynôme caractéristique de  $M_\sigma$  est irréductible. La valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $M_\sigma$  est donc un nombre algébrique de degré  $d$ . De plus, les coordonnées de  $\alpha'$  ne peuvent pas

être rationnelles car sinon  $\lambda$  serait lui aussi rationnel. Enfin, on a  $\alpha' \in \mathbb{Q}(\lambda)^d$ , et comme  $\alpha = {}^t M_\mu \alpha'$ , on conclut que  $\alpha$  est un vecteur irrationnel de  $\mathbb{Q}(\lambda)^d$ .  $\square$

En particulier, soulignons qu'un plan substitutif a un vecteur normal irrationnel, dont le développement de Brun est donc infini. Rappelons que dans le cas des fractions continues classiques, un nombre a un développement ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est quadratique (théorème de Lagrange). Malheureusement, si le sens direct de ce résultat s'étend sans difficulté en dimension supérieure (en remplaçant "quadratique" par "algébrique de degré  $d$ "), ce n'est pas le cas du sens réciproque. Examinons cependant le cas des développements de Brun ultimement périodiques.

Par ailleurs, rappelons qu'un plan substitutif est toujours l'image d'un point fixe d'une application duale de substitution. Or, on montre :

**Proposition 6.12** *Si un plan en escalier a un développement de Brun ultimement périodique, alors c'est l'image d'un point fixe d'une application duale de substitution.*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$  un plan en escalier admettant un développement de Brun  $(a_n, i_n)_n$  ultimement périodique de pré-période  $d$  et de période  $p$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \geq q, (a_{n+p}, i_{n+p}) = (a_n, i_n).$$

Alors, on déduit de l'équation (3.8) :

$$\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho} = E_1^*(\beta_q)(\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho}),$$

$$\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho} = E_1^*(\beta_p)(\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho}),$$

où  $\beta_q = \beta_{a_{q-1}, i_{q-1}} \circ \dots \circ \beta_{a_0, i_0}$  et  $\beta_p = \beta_{a_{q+p-1}, i_{q+p-1}} \circ \dots \circ \beta_{a_q, i_q}$  sont deux substitutions. Le plan  $\mathcal{P}_{\alpha,\rho}$  est donc l'image du point fixe  $\mathcal{P}_{(1,T^{q+1}(\alpha)),\rho}$ .  $\square$

La question est donc de savoir si la condition précédente est suffisante, c'est-à-dire si le produit  $\beta_p$  des matrices d'incidences des substitutions de Brun associées à la période du développement est Pisot. Notons que c'est clairement faux en général puisqu'une substitution de Brun n'est pas Pisot (pour  $d \geq 2$ ). Cependant, on vérifie expérimentalement qu'une substitution de la forme  $\beta_{a_{q+p-1}, i_{q+p-1}} \circ \dots \circ \beta_{a_q, i_q}$  est généralement Pisot si on a :

$$\{i_q, \dots, i_{q+p-1}\} = \{1, \dots, d\}.$$

Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, pour  $d = 3$ , un calcul montre que la matrice d'incidence de la substitution suivante a une valeur propre largement dominante ( $\lambda \simeq 1258$ ) et deux valeurs propres de modules strictement inférieurs à 1, mais aussi la valeur propre 1 :

$$\beta_{5,3} \circ \beta_{7,3} \circ \beta_{1,2} \circ \beta_{8,1} \circ \beta_{4,1} \circ \beta_{1,2}.$$

Cette substitution n'est donc pas Pisot. On montre que ceci n'arrive pas pour  $d = 1$ , tandis que le cas  $d = 2$  reste ouvert.

En conclusion, un plan dont le développement de Brun est ultimement périodique n'est pas toujours substitutif mais "souvent" (il resterait à donner un sens mathématique à ce "souvent" - notamment on peut se demander si c'est le cas sur tous les réels sauf sur un ensemble de mesure nulle). Inversement, un plan substitutif n'a pas nécessairement un développement ultimement périodique, ceci parce que le théorème de Lagrange sur les développement en fractions continues ultimement périodiques ne semble pas s'étendre aux développements de Brun.

### 6.2.3 Plan rationnel

On appelle *rationnel* un plan dont le développement de Brun est fini, c'est-à-dire dont le vecteur normal s'écrit  $(1, \alpha)$  avec  $\alpha \in \mathbb{Q}^d$ . En particulier, il résulte de la proposition 6.11 du paragraphe précédent qu'un plan rationnel ne peut pas être substitutif. On montre ici que ces plans peuvent cependant être facilement engendrés, grâce à la notion de *domaine fondamental*.

Rappelons que si  $\mathcal{F}$  est une fonction de  $\mathfrak{F}$  et  $\mathbf{u}$  un vecteur de  $\mathbb{Z}^d$ , alors  $\mathbf{u} + \mathcal{F}$  désigne la fonction  $(\mathbf{x}, i) \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x} - \mathbf{u}, i)$ . En particulier, si  $\mathcal{F}$  est binaire, alors l'interprétation géométrique de  $\mathbf{u} + \mathcal{F}$  se déduit de celle de  $\mathcal{F}$  par une translation de vecteur  $\mathbf{u}$ . On définit alors :

**Définition 6.13** Soit  $\mathcal{P}$  un plan en escalier. Si  $\mathcal{D}$  est un morceau fini de  $\mathcal{P}$  et  $L$  un réseau de  $\mathbb{Z}^d$  tels que :

$$\mathcal{P} = \sum_{\mathbf{u} \in L} \mathbf{u} + \mathcal{D},$$

alors on dit que  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental de  $\mathcal{P}$ , associé au réseau  $L$ .

Il n'est pas difficile de voir que, pour des raisons de périodicité, un plan admet un domaine fondamental si et seulement si c'est un plan rationnel. Géométriquement, un tel plan est engendré en translatant des copies d'un domaine fondamental suivant le réseau associé. Soulignons qu'un plan rationnel admet une infinité de domaines fondamentaux. Le résultat suivant, s'inspirant d'un résultat proche donné dans [6], montre comment construire l'un d'entre eux :

**Théorème 6.14** Soit  $\alpha \in [0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Le vecteur  $\alpha$  a un développement de Brun fini (Th. 3.13) qu'on note  $(a_n, i_n)_{0 \leq n \leq N}$ . Soit  $\mathcal{D}_{(1, \alpha), \rho}$  le morceau fini du plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho}$  défini par :

$$\mathcal{D}_{(1, \alpha), \rho} = E_1^*(\beta_{a_0, i_0}) \circ \dots \circ E_1^*(\beta_{a_N, i_N})(\lfloor \rho \rfloor \mathbf{e}_1, 1^*).$$

Alors,  $\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}$  est un domaine fondamental de  $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$ , associé au réseau défini par :

$$L_{(1,\alpha),\rho} = B_{a_0,i_0}^{-1} \cdots B_{a_N,i_N}^{-1} \sum_{k=2}^{d+1} \mathbb{Z}e_k.$$

*Preuve.* D'une part, on vérifie aisément que le morceau de plan ( $\lfloor \rho \rfloor e_1, e_1^*$ ) est un domaine fondamental du plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1,0),\rho}$ , associé au réseau  $\mathbb{Z}e_2 + \dots + \mathbb{Z}e_{d+1}$ . D'autre part, si  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental d'un plan  $\mathcal{P}$ , associé à un réseau  $L$ , alors pour tout substitution unimodulaire  $\sigma$ ,  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{D})$  est un domaine fondamental du plan  $E_1^*(\sigma)(\mathcal{P})$ , associé au réseau  $M_\sigma^{-1}L$ . On en déduit le résultat en considérant la substitution unimodulaire  $\sigma = \beta_{a_N,i_N} \circ \dots \circ \beta_{a_0,i_0}$ .  $\square$

**Exemple 6.15** Soit  $\alpha = (3/8, 5/12) \in [0, 1]^2$ . Le développement de  $\alpha$  est :

$$\left( \frac{3}{8}, \frac{5}{12} \right) = [(2, 2), (1, 1), (2, 2), (4, 1), (1, 2)].$$

Le dernier convergent de ce développement est  $(24, 9, 10)$ , proportionnel à  $(1, \alpha)$ . La figure 6.6 montre la génération du domaine fondamental  $\mathcal{D}_{(1,3/8,5/12),0}$  à partir des applications duales des substitutions de Brun associées au développement de  $\alpha$ . Notons que  $\mathcal{D}_{(1,3/8,5/12),0}$  est la somme de 24, 9 et 10 faces, respectivement de vecteur normal  $e_1$ ,  $e_2$  and  $e_3$ . Par ailleurs, on calcule :

$$L_{(1,3/8,5/12),0} = \mathbb{Z}(e_1 + 4e_2 - 6e_3) + \mathbb{Z}(2e_1 - 2e_2 - 3e_3).$$

La figure 6.7 illustre l'engendrement de  $\mathcal{P}_{(1,3/8,5/12),0} = \mathcal{P}_{(24,9,10),0}$  grâce à  $L$  et  $\mathcal{D}$ .

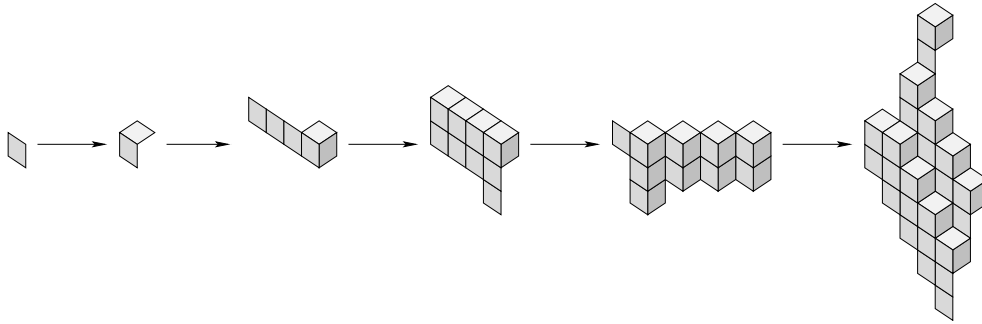


FIG. 6.6 – Génération d'un domaine fondamental du plan en escalier  $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$  par application de  $E_1^*(\beta_{1,2})$ ,  $E_1^*(\beta_{4,1})$ ,  $E_1^*(\beta_{2,2})$ ,  $E_1^*(\beta_{1,1})$  et  $E_1^*(\beta_{2,2})$  (de gauche à droite).

Notons que, intuitivement, un domaine fondamental est d'autant plus pratique qu'il est petit (donc facile à stocker) et compact (pour engendrer aisément des morceaux de plan de forme quelconque). À ce titre, il est naturel de vouloir comparer le domaine fondamental défini par le théorème 6.14 aux autres domaines fondamentaux envisageables. On montre alors :

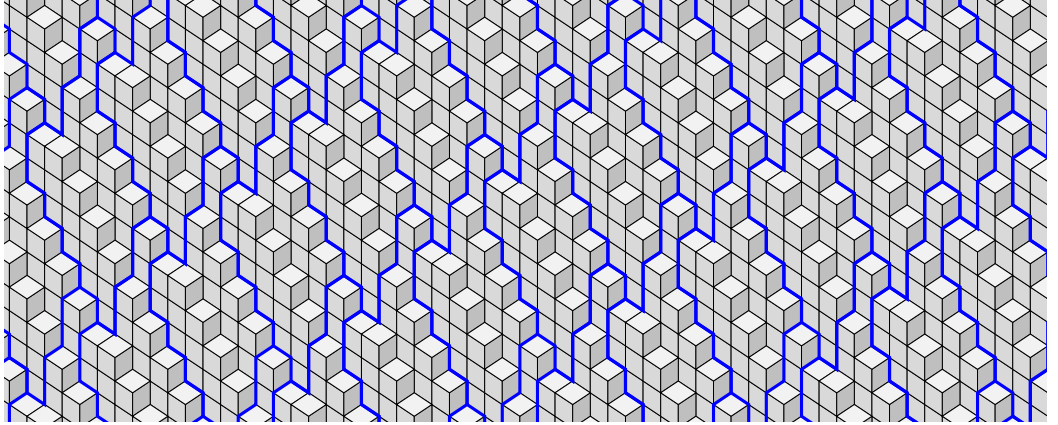


FIG. 6.7 – Des copies du domaine fondamental de la figure 6.6 translatées suivant le réseau  $\mathbb{Z}(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3) + \mathbb{Z}(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3)$  engendrent tout le plan  $\mathcal{P}_{(24,9,10),0}$ . Soulignons que ce domaine est de taille minimale (Prop. 6.16, ci-dessous).

**Proposition 6.16** *Le domaine fondamental  $\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}$  défini par le théorème 6.14 est de taille minimale parmi l'ensemble des domaines fondamentaux du plan  $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$ .*

*Preuve.* Soit  $(a_n, i_n)_{0 \leq n \leq N}$  le développement de Brun de  $\alpha$ . Rappelons que, d'après la proposition 2.12 (Chap. 2), si  $\sigma$  est une substitution unimodulaire et  $\mathcal{E} \in \mathfrak{F}$ , alors :

$$(|E_1^*(\sigma)(\mathcal{K})|_1, \dots, |E_1^*(\sigma)(\mathcal{K})|_d) = {}^t M_\sigma(|\mathcal{K}|_1, \dots, |\mathcal{K}|_d).$$

La taille de  $\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}$  vaut donc :

$$|\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}| = \|(q_N, \mathbf{p}_N)\|_1 = \|B_{a_0, i_0} \dots B_{a_N, i_N}(1, \mathbf{0})\|_1.$$

Or, d'après l'équation 3.6 de la fin du paragraphe précédent, on a :

$$\mu_N(q_N, \mathbf{p}_N) = (1, \alpha),$$

où  $\mu_N = \|T^0(\alpha)\|_\infty \times \dots \times \|T^N(\alpha)\|_\infty$ . D'où :

$$|\mathcal{D}_{(1,\alpha),\rho}| = q_N \|(1, \alpha)\|_1 = \frac{1}{\mu_N} \|(1, \alpha)\|_1. \quad (6.1)$$

Considérons maintenant un autre domaine fondamental de  $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$ , noté  $\mathcal{D}$ . Il n'est pas difficile de voir que le vecteur  $(|\mathcal{D}|_1, \dots, |\mathcal{D}|_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$  doit être proportionnel au vecteur normal de  $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$ . Il s'écrit donc  $k(1, \alpha)$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , et on a :

$$|\mathcal{D}| = k \|(1, \alpha)\|_1 \geq p(\alpha) \|(1, \alpha)\|_1, \quad (6.2)$$

où, pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{Q}^d$ ,  $p(\mathbf{u})$  désigne le plus petit commun multiple des dénominateurs des coordonnées de  $\mathbf{u}$ . Le lemme 3.14 montre alors :

$$p(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{p(T(\boldsymbol{\alpha}))}{\|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty} \geq \dots \geq \frac{p(T^{N+1}(\boldsymbol{\alpha}))}{\|T^0(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \times \dots \times \|T^N(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty} = \frac{p(\mathbf{0})}{\mu_N} = \frac{1}{\mu_N},$$

et on déduit des équations (6.1) et (6.2) que  $\mathcal{D}$  est plus grand que  $\mathcal{D}_{(1,\boldsymbol{\alpha},\rho)}$ .  $\square$

## 6.3 Reconnaissance de plan

Après la génération de plan, on s'intéresse ici au problème inverse qui est celui de la reconnaissance de plan et qui consiste à décider si une fonction binaire donnée est un morceau de plan en escalier ou non. De plus, si c'est le cas, on veut également déterminer l'ensemble des paramètres des plans en escalier dont cette fonction binaire est un morceau. Soulignons qu'il existe déjà de nombreux algorithmes pour résoudre ce problème (voir Chap. 1) : l'objectif est ici de montrer que en quoi les applications duales et l'algorithme de Brun peuvent apporter quelque chose de nouveau.

### 6.3.1 Principe

Le principe général est, étant donnée une fonction binaire, d'essayer de calculer le développement de Brun d'un plan en escalier dont elle serait morceau. Plus précisément, s'inspirant de ce qui a été fait pour les surfaces au chapitre 5, on voudrait prolonger la définition de l'application de Brun géométrique  $\tilde{T}$  aux fonctions binaires de telle sorte qu'on ait, pour tout plan en escalier  $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_\exists \setminus \mathfrak{P}_\forall$  et toute fonction binaire  $\mathcal{B}$  :

$$0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{T}(\mathcal{B}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}). \quad (6.3)$$

Ainsi, si en itérant  $\tilde{T}$  sur une fonction binaire on tombe sur un morceau d'un plan de vecteur normal  $\mathbf{e}_1$ , on saura que la fonction binaire initiale est un morceau de plan (dont on connaîtra en plus le développement de Brun).

Rappelons qu'étendre la définition de  $\tilde{T}$  aux surfaces en escalier a posé deux problèmes. D'une part, il a fallu lire sur une surface l'information suffisante à déterminer quelle application duale  $E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})$  utiliser. C'est le rôle joué par les fonctions  $a$  et  $i$  (Déf. 3.20) sous l'hypothèse de cohérence (Déf. 5.6). D'autre part, il a fallu s'assurer que l'application duale de la substitution de Brun retenue envoie bien une surface sur une surface (Prop. 5.7).

Il faut donc résoudre aussi ces deux problèmes dans le cas des morceaux de plan, ce à quoi sont respectivement consacrés les deux paragraphes suivants. Avant ceci,

examinons quelques propriétés propres aux morceaux de plan. Introduisons d'abord la notion suivante :

**Définition 6.17** Soit  $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{d+1}$  une fonction binaire. L'ensemble des paramètres acceptables de  $\mathcal{B}$ , noté  $p(\mathcal{B})$ , est le polytope de  $[0, 1]^d \times \mathbb{R}$  défini par :

$$P(\mathcal{B}) = \{(\boldsymbol{\alpha}, \rho) \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R} \mid \mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1, \boldsymbol{\alpha}, \rho)}\}.$$

En particulier, une fonction binaire  $\mathcal{B}$  est un morceau d'un plan de  $\mathfrak{P}_{\exists}$  si et seulement si  $P(\mathcal{B})$  est non vide. Soulignons que, dans ce cas,  $P(\mathcal{B})$  n'est généralement pas réduit à un singleton. Autrement dit, un morceau de plan ne caractérise pas un unique plan. Inversement, un ensemble de paramètres ne caractérise généralement pas un unique morceau de plan. Plus précisément, introduisons la relation d'équivalence suivante sur les morceaux de plan :

**Définition 6.18** Deux morceaux de plan en escalier  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont dits équivalents si, pour tout plan en escalier  $\mathcal{P}$ , on a :

$$\mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{B}' \leq \mathcal{P}.$$

La classe d'équivalence d'un morceau  $\mathcal{B}$  est notée  $\langle \mathcal{B} \rangle$ .

Alors, deux morceaux de plan équivalents ont le même ensemble de paramètres acceptables. Intuitivement, la classe d'équivalence d'un morceau est l'ensemble des morceaux qui contiennent exactement la même information sur les vecteurs normaux des plans dont ils sont des morceaux. Par exemple, la figure 6.8 représente un morceau de plan équivalent à celui de la figure 6.1.

On vérifie aisément que si deux morceaux de plan sont équivalents, alors le maximum de ces deux morceaux de plan est encore un morceau de plan, équivalent aux deux précédents (rappelons que l'interprétation géométrique du maximum de deux fonctions binaires est l'union de leurs interprétations géométriques). On vérifie également que la classe d'équivalence d'un morceau de plan fini ne comporte que des morceaux finis. On en déduit que l'opération maximum confère une structure de semi-treillis à la classe d'équivalence  $\langle \mathcal{B} \rangle$  d'un morceau de plan  $\mathcal{B}$  fini. Expérimentalement, on constate que ce supremum est très grand devant  $\mathcal{B}$ . Par exemple, dans le cas du morceau de la figure 6.1, un calcul sur ordinateur montre que le supremum est formé de plus de 7000 faces (ce n'est donc pas le morceau de la figure 6.8).

Par ailleurs, notons que le minimum de deux morceaux de plan équivalents est un morceau de plan qui ne leur est généralement pas équivalent (intuitivement, il contient moins d'information que ces deux plans). L'opération de minimum ne confère donc pas de structure de treillis à une classe d'équivalence.

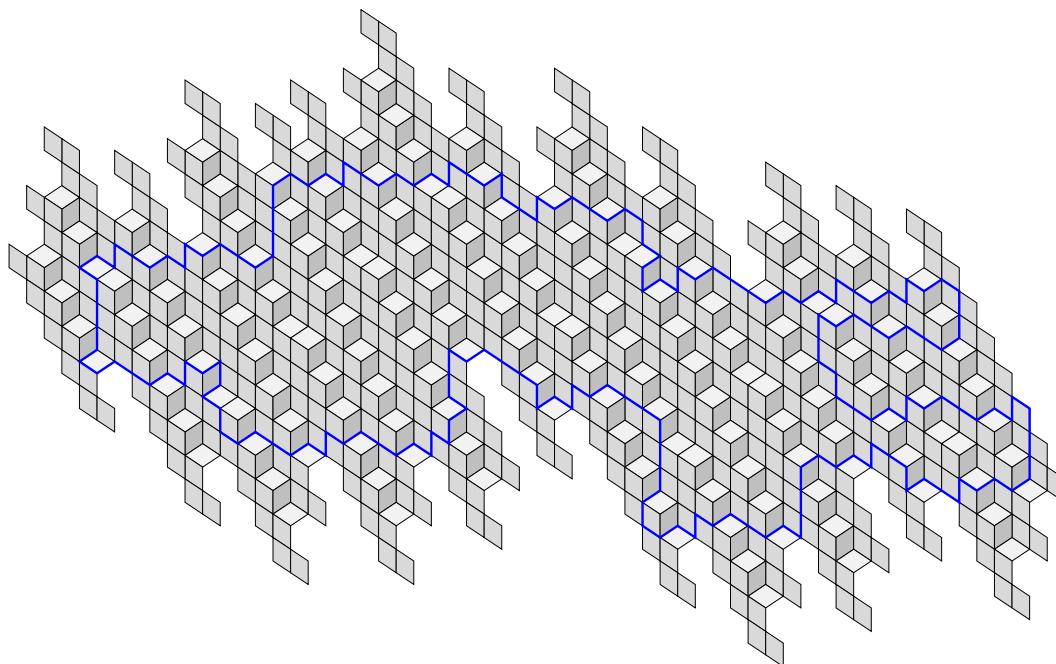


FIG. 6.8 – Un morceau de plan fini (de taille 786) équivalent à celui de la figure 6.1 (dont le contour est surligné). L'équivalence de ces deux morceaux peut se montrer simplement en raisonnant sur les tailles des paliers.

L'intérêt de cette relation d'équivalence est qu'elle montre qu'il existe une certaine liberté pour modifier un morceau de plan donné afin d'en obtenir un équivalent plus pratique. Comme le but est d'appliquer une application duale  $E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})$  bien choisie, les morceaux  $\beta_{a,i}$ -pavables sont particulièrement intéressants (Déf. 6.3, voir aussi Prop. 6.5).

### 6.3.2 Reconnaissabilité

La notion de palier (Déf. 3.18) a été définie pour n'importe quelle fonction binaire. En particulier, les quantités  $a_{i,j}^\pm$  restent définies de la même façon. Cependant, soulignons que si  $\mathcal{B}$  est un morceau d'un plan  $\mathcal{P}$ , alors les  $a_{i,j}^\pm$  peuvent être différents pour  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{P}$  à cause du fait qu'un palier de  $\mathcal{B}$  peut très bien n'être qu'un morceau d'un palier de  $\mathcal{P}$ . On a besoin d'être plus précis :

**Définition 6.19** Soit  $\mathcal{B}$  une fonction binaire. Considérons un  $(i, j)$ -palier de  $\mathcal{B}$  de la forme :

$$\sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*),$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{Z}$ . Alors, ce palier est dit fermé à

droite si  $I$  admet un maximum  $d$  tel que :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x} + d\mathbf{e}_j, j^*) = 1,$$

et il est dit fermé à gauche si  $I$  admet un minimum  $g$  tel que :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x} + g\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i, j^*) = 1.$$

Les notions de palier fermé, ouvert, semi-ouvert ou semi-fermé à gauche ou à droite sont calculées sur le cas des intervalles réels. La figure 6.9 illustre les divers types de paliers d'une fonction binaire.

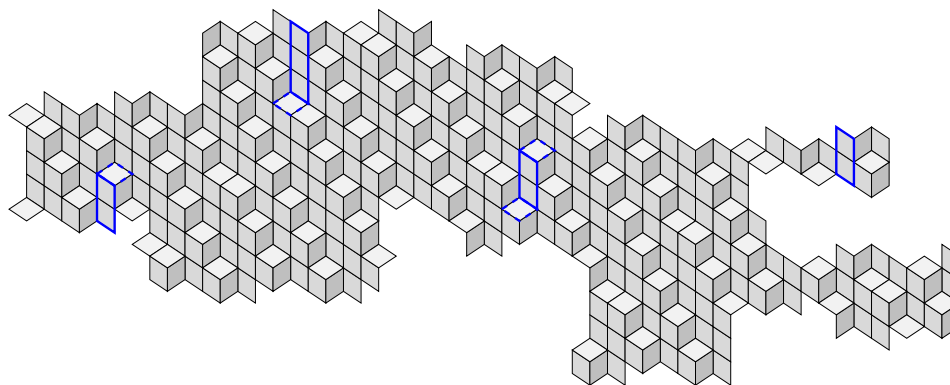


FIG. 6.9 – Cette fonction binaire contient tous les types de  $(1, 3)$ -paliers : semi-fermé à droite, semi-fermé à gauche, fermé et, enfin, ouvert (respectivement encadrés de gauche à droite ; les traits en pointillés encadrant les faces qui ferment un palier).

Montrons maintenant les paliers peuvent être utilisés pour lire sur une fonction binaire l'information nécessaire à déterminer – au cas où il s'agisse d'un morceau de plan – l'application duale  $E_1^*(\beta_{a,i}^{-1})$  à utiliser. On impose une restriction aux fonctions binaires considérées : celles-ci devront être *reconnaissables* :

**Définition 6.20** Une fonction binaire  $\mathcal{B}$  est dite reconnaissable si elle vérifie les deux conditions suivantes. Premièrement, il doit exister  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que :

$$a_{1,i+1}^+(\mathcal{B}) \geq 2 \quad \text{et} \quad \min_{1 \leq j \leq d} a_{i+1,j+1}^+(\mathcal{B}) \geq 2.$$

On note  $i(\mathcal{B})$  le plus petit  $i$  vérifiant cette première condition. Deuxièmement,  $\mathcal{B}$  doit avoir au moins un  $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier fermé, le plus petit d'entre eux étant de taille  $a_{1,i(\mathcal{B})+1}^+(\mathcal{B}) - 1$ . On note  $a(\mathcal{B})$  cette taille.

La figure 6.10 illustre la notion de reconnaissabilité. Intuitivement, la première condition assure que si  $\mathcal{B}$  est un morceau de plan, alors la première coordonnée de

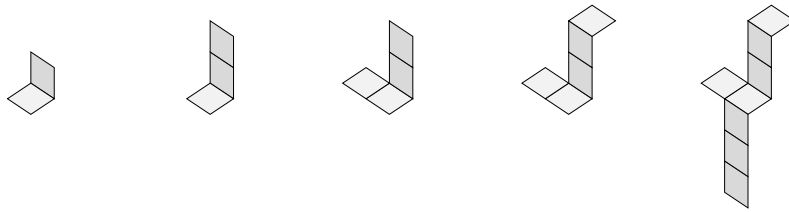


FIG. 6.10 – Une suite  $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq 5}$  croissante de fonctions binaires (de gauche à droite). La première n'est pas reconnaissable car on a  $a_{1,2}^+(\mathcal{B}_1) = a_{1,3}^+(\mathcal{B}_1) = 1$  ; La deuxième vérifie  $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_2) \geq 2$  mais n'est pas reconnaissable car on a  $a_{3,2}^+(\mathcal{B}_2) = 1$ . La troisième vérifie  $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_3) \geq 2$  et  $a_{3,2}^+(\mathcal{B}_3) \geq 2$ , c'est-à-dire la première condition de reconnaissabilité, avec  $i(\mathcal{B}_3) = 2$ . Elle n'est cependant pas reconnaissable car elle ne possède pas de  $(1, 3)$ -palier fermé. La quatrième possède un  $(1, 3)$ -palier fermé, mais elle n'est pas reconnaissable car ce palier est de taille  $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_4) = 2$ . La cinquième possède un  $(1, 3)$ -palier fermé de taille  $a_{1,3}^+(\mathcal{B}_5) - 1 = 2$ . Elle est donc reconnaissable, avec  $i(\mathcal{B}_5) = 2$  et  $a(\mathcal{B}_5) = 2$ . C'est la seule pour laquelle on est sûr que s'il s'agit d'un morceau d'un plan  $\mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta)}$ , alors ce plan vérifie  $1 \geq \beta > \alpha$  et  $\lfloor 1/\beta \rfloor = 2$ .

ce vecteur est plus grande que la  $(i(\mathcal{B}) + 1)$ -ème, qui est elle même plus grande que toutes les autres. En d'autre terme, ce vecteur normal peut s'écrire  $(1, \alpha)$ , avec  $\alpha \in [0, 1]^d$  et  $\alpha_{i(\mathcal{B})} = \|\alpha\|$ . De même, la seconde condition assure que si  $\mathcal{B}$  est un morceau de plan, alors ce plan a deux tailles différentes de  $(1, i(\mathcal{B} + 1))$ -paliers, et  $a(\mathcal{B})$  est la plus petite de ces deux tailles. L'intérêt de cette notion de reconnaissabilité est donc, en quelques sorte, de généraliser la proposition 3.21, puisque la proposition 3.19 assure alors :

**Proposition 6.21** *Soit  $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{0\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{B}$  une fonction binaire reconnaissable. Alors, si  $\mathcal{B}$  est un morceau du plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1,\alpha),\rho}$ , on a :*

$$i(\mathcal{B}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\alpha\|_\infty\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{B}) = \lfloor \|\alpha\|_\infty^{-1} \rfloor.$$

Notons que, selon les définitions précédentes, un plan n'est pas toujours reconnaissable. C'est, par exemple, le cas d'un plan dont le vecteur normal a deux coordonnées égales ou d'un plan dont la  $(i + 1)$ -ème coordonnée du vecteur normal est de la forme  $1/q$ ,  $q \in \mathbb{N}$  (tous les  $(1, i + 1)$  paliers étant alors de taille  $q$ ). Cependant, soulignons que dans le cas d'un morceau de plan – où seulement une partie des paliers du plan sont connus – la restriction apportée par la reconnaissabilité est nécessaire pour être sûr de la taille de tous les paliers du plan. En pratique, une fonction binaire de taille suffisamment importante et de forme pas trop pathologique est très souvent reconnaissable. Par exemple, notre morceau préféré (Fig. 6.1 ou 6.9) est reconnaissable.

### 6.3.3 $\beta_{a,i}$ -pavabilité

Le but de ce paragraphe est de montrer comment associer effectivement à toute fonction binaire reconnaissable  $\mathcal{B}$  une fonction binaire  $\tilde{\mathcal{B}}$  telle que :

$$0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\mathcal{B}} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}).$$

Alors, en posant :

$$\tilde{T}(\mathcal{B}) = E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}),$$

l'application  $\tilde{T}$  sera prolongée de sorte à vérifier l'équation (6.3), discutée au début du paragraphe 6.3.1.

Introduisons d'abord quelques termes. Considérons un palier de la forme :

$$\sum_{k \in I} (\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*),$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  et  $I = [g, d]$  un intervalle borné de  $\mathbb{Z}$ . On dit alors qu'on *prolonge* ce palier à gauche si on lui ajoute des faces  $(\mathbf{x} + k\mathbf{e}_j, i^*)$  pour  $k < g$ ; on dit qu'on *ferme* ce palier à droite si on lui ajoute la face  $(\mathbf{x} + g\mathbf{e}_j, j^*)$ . On définit alors trois opérations élémentaires sur les fonctions binaires de  $\mathfrak{B}_{d+1}$  :

**Définition 6.22** Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \{1, \dots, d\}$ . On définit trois applications de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{B}$  comme suit.

1. L'extension  $\phi_{a,i}$  : tout  $(1, i+1)$ -palier ouvert seulement à gauche et de taille inférieure à  $a$  est prolongé à gauche en un palier de taille  $a$ ;
2. l'extension  $\psi_{a,i}$  : tout  $(1, i+1)$ -palier ouvert à droite et de taille strictement supérieure à  $a$  est fermé à droite;
3. la réduction  $\chi_i$  : tout  $(1, i+1)$ -palier ouvert seulement à droite est supprimé.

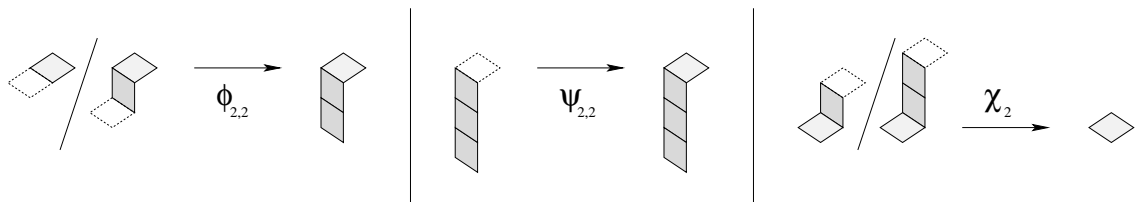


FIG. 6.11 – Les deux opérations d'extension  $\phi_{a,i}$  et  $\psi_{a,i}$  et l'opération de réduction  $\chi_i$ , dans le cas  $(a, i) = (2, 2)$  (les traits pointillés représentant l'absence de face).

La figure 6.11 illustre ces opérations élémentaires dans le cas  $(a, i) = (2, 2)$  et la figure 6.12 montre comment un morceau de plan est transformé par ces opérations. On montre alors :

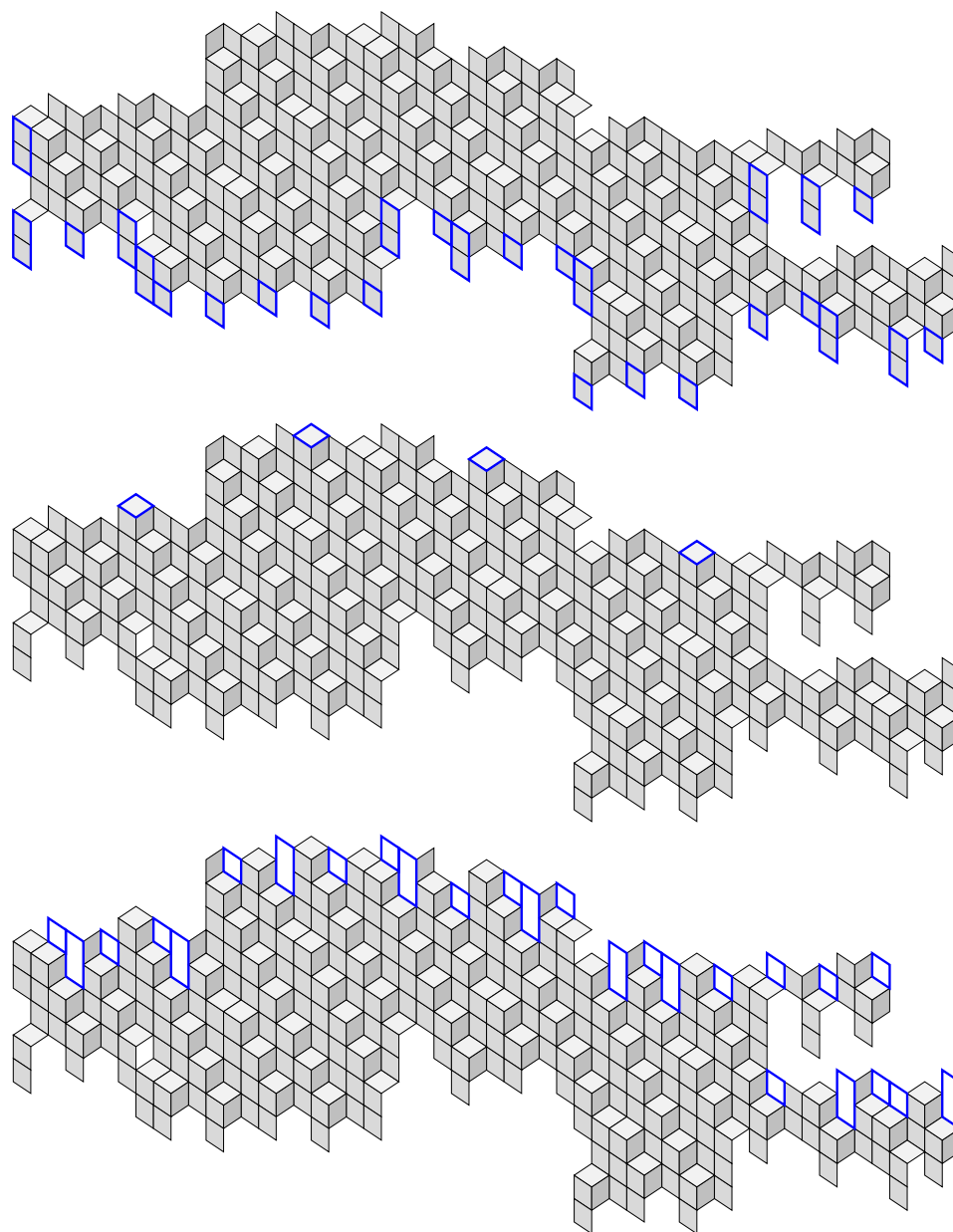


FIG. 6.12 – Les opérations  $\phi_{2,2}$ ,  $\psi_{2,2}$  et  $\chi_2$  sont successivement effectuées sur le morceau de la figure 6.1 (de haut en bas, les faces ajoutées ou supprimées étant encadrées). Le morceau obtenu est équivalent au morceau initial, et il admet un  $\beta_{2,2}$ -pavage si on lui enlève les  $(1, 3)$ -paliers ouverts qu'il contient (il y en a ici trois, situés vers la droite du morceau).

**Proposition 6.23** *Soit  $\mathcal{B}$  une fonction binaire. Supposons  $\mathcal{B}$  reconnaissable et notons  $\tilde{\mathcal{B}}$  la fonction binaire obtenue après applications successives des règles  $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$ ,  $\psi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$  et  $\chi_{i(\mathcal{B})}$ . Alors,  $\tilde{\mathcal{B}}$  est équivalent à  $\mathcal{B}$ . Si, de plus,  $\tilde{\mathcal{B}}$  ne contient pas de  $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier ouvert, alors on a, pour tout plan  $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}^2$  :*

$$0 \leq \tilde{\mathcal{B}} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}).$$

*Preuve.* Soit  $\mathcal{B}$  une fonction binaire reconnaissable. Supposons que  $\mathcal{B}$  soit un morceau d'un plan  $\mathcal{P}$ . Alors, tout  $(1, i + 1)$ -palier de  $\mathcal{B}$  ouvert seulement à gauche et de taille inférieure à  $a(\mathcal{B})$  est nécessairement un morceau d'un  $(1, i + 1)$ -palier de  $\mathcal{P}$  fermé et de taille supérieure ou égale à  $a(\mathcal{B})$ . On en déduit que  $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$  est encore un morceau de  $\mathcal{P}$ . Inversement, si  $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$  est un morceau de  $\mathcal{P}$ , alors  $\mathcal{B}$  aussi puisque  $\mathcal{B} \leq \phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$ . Donc  $\phi_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}(\mathcal{B})$  est équivalent à  $\mathcal{B}$ . Un raisonnement similaire montre que les opérations  $\psi_{a,i}$  et  $\chi_i$  préservent également l'équivalence de fonctions binaires. Ceci prouve que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est équivalent à  $\mathcal{B}$ . Supposons maintenant que  $\tilde{\mathcal{B}}$  ne contienne pas de  $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier ouvert. Il est facile de voir que la définition des opérations  $\phi_{a,i}$ ,  $\psi_{a,i}$  et  $\chi_i$  assure que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est  $\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$ -pavable.

Supposons alors que  $\tilde{\mathcal{B}}$  soit un morceau d'un plan  $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\exists} \setminus \mathfrak{P}_{\forall}$ , qui est donc  $\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}$ -pavable puisque  $a(\mathcal{B}) = a(\mathcal{P})$  et  $i(\mathcal{B}) = i(\mathcal{P})$ . Montrons alors que le pavage de  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une restriction de celui de  $\mathcal{P}$ . C'est évident pour les faces de type  $j \notin \{1, i(\mathcal{B}) + 1\}$ . Deux faces de types 1 et  $i(\mathcal{B}) + 1$  sont groupées, dans le pavage de  $\mathcal{P}$  comme dans celui de  $\tilde{\mathcal{B}}$ , si et seulement si la face de type 1 appartient à un  $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier de taille  $a(\mathcal{B})$  fermé à droite par la face de type  $i(\mathcal{B}) + 1$ . Les seules faces restantes sont alors des faces de type 1 (une pour chaque  $(1, i(\mathcal{B}) + 1)$ -palier de taille  $a(\mathcal{B}) + 1$ , qui sont forcément isolées dans le pavage de  $\mathcal{P}$  comme dans celui de  $\tilde{\mathcal{B}}$ . On en déduit que le pavage de  $\tilde{\mathcal{B}}$  est bien une restriction de celui de  $\mathcal{P}$ , et le résultat découle alors de la proposition 6.5.

Inversement, si  $0 \leq E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P})$ , alors la proposition 6.2 assure que l'image de la fonction binaire  $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}})$  par l'application duale de substitution  $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})})$ , c'est-à-dire  $\tilde{\mathcal{B}}$ , est un morceau du plan  $E_1^*(\beta_{a(\mathcal{B}),i(\mathcal{B})})(\tilde{T}(\mathcal{P}))$ , c'est-à-dire  $\mathcal{P}$ .  $\square$

Le problème vient donc des paliers ouverts, ce qu'on examine au paragraphe suivant.

### 6.3.4 Un algorithme hybride

Ce paragraphe expose un algorithme hybride de reconnaissance de plan. Le principe général est le suivant. Étant donné une fonction binaire, on calcule son développement de Brun tant qu'on peut lire l'information suffisante, c'est-à-dire tant que les fonctions binaires obtenues restent reconnaissables. Comme les paliers

<sup>2</sup>C'est-à-dire pour tout plan dont le vecteur normal peut s'écrire  $(1, \alpha)$ , avec  $\alpha \in [0, 1]^d \setminus \{\mathbf{0}\}$

ouverts posent problème, on les enlève et on les garde de côté pour vérifier *a posteriori* s'ils jouent un rôle. Quand on obtient une fonction binaire qui n'est plus reconnaissable – on espère alors qu'elle est, en pratique, de faible taille – on utilise un des autres algorithmes de reconnaissance de plan connus pour en déterminer les paramètres acceptables. Il reste alors à remonter aux paramètres acceptables de la fonction binaire initiale, ce qui se fait facilement grâce au développement de Brun calculé. De plus, à chaque étape de cette remontée, on corrige (si besoin est) l'ensemble des paramètres acceptables en tenant compte des paliers qui ont été coupés “en descendant”, c'est-à-dire à l'étape correspondante du calcul du développement de Brun (lignes 2 à 8 du pseudo-code donné ci-dessous).

On peut écrire plus précisément cet algorithme sous forme de pseudo-code. Soit  $\text{XReco}$  un algorithme de reconnaissance de plan qui renvoie le polytope des paramètres acceptables de la fonction binaire passée en argument. On note  $B'_{a,i}$  la matrice  $(d+2) \times (d+2)$  déduite de la matrice  $B_{a,i}$  ainsi :

$$B'_{a,i} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & B_{a,i} & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le pseudo-code suivant définit alors l'algorithme  $\text{BrunReco}$  :

BrunReco( $\mathcal{B}$ )	
1.	$n \leftarrow 0$ ;
2.	<b>tant que</b> $\mathcal{B}$ est reconnaissable <b>faire</b>
3.	$(a_n, i_n) \leftarrow (a(\mathcal{B}), i(\mathcal{B}))$ ;
4.	calculer $\tilde{\mathcal{B}}$ ;
5.	$L_n \leftarrow$ paliers ouverts de $\tilde{\mathcal{B}}$ ;
6.	$\mathcal{B} \leftarrow E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}} - L_n)$ ;
7.	$n \leftarrow n + 1$ ;
8.	<b>fin tant que</b> ;
9.	$P \leftarrow \text{XReco}(\mathcal{B})$ ;
10.	<b>pour</b> $k = n - 1$ <b>à</b> $k=0$ <b>faire</b>
11.	$P \leftarrow B'_{a_k, i_k} P$ ;
12.	$P \leftarrow P \cap \text{XReco}(L_k)$ ;
13.	<b>fin pour</b> ;
14.	<b>renvoyer</b> $P$ ;

Précisons que, ligne 5,  $L_n$  est la fonction binaire définie comme étant la restriction de  $\tilde{\mathcal{B}}$  à ses paliers ouverts (ce qui n'est pas forcément très claire dans le pseudo-code). En particulier, ligne 6, l'expression  $\tilde{\mathcal{B}} - L_n$  désigne une soustraction

usuelle de fonctions.

Examinons la terminaison et la correction de cet algorithme. En notant  $\mathcal{B}_n$  la fonction binaire obtenue à l'étape  $n$ , on a la relation :

$$\mathcal{B}_{n+1} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\tilde{\mathcal{B}}_n - L_n).$$

La proposition suivante montre alors que l'algorithme termine toujours :

**Proposition 6.24** *Si  $\mathcal{B}_n$  est reconnaissable, alors la taille de  $\mathcal{B}_{n+1}$  est strictement inférieure à celle de  $\mathcal{B}_n$ .*

*Preuve.* Introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{f}(\mathcal{B}_n) = (x_1, \dots, x_{d+1}), \quad \mathbf{f}(\tilde{\mathcal{B}}_n - L_n) = (y_1, \dots, y_{d+1}), \quad \mathbf{f}(\mathcal{B}_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{d+1}),$$

où  $\mathbf{f}$  a été définie dans la proposition 2.12. La même proposition assure alors :

$$\begin{cases} z_1 = y_{i_n+1}, \\ z_{i_n+1} = y_1 - a_n y_{i_n+1}, \\ z_j = y_j. \end{cases}$$

Par ailleurs, on déduit aisément de la définition de  $\tilde{\mathcal{B}}$  :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + a x_{i_n+1} - x'_1, \\ y_{i_n+1} = x_{i_n+1} + \frac{1}{a_n+1} x''_1, \\ y_j = x_j, \end{cases}$$

où  $x'_1$  (resp.  $x''_1$ ) est la somme des tailles des  $(1, i_n + 1)$ -paliers prolongés par  $\phi_{a_n, i_n}$  (resp.  $\psi_{a_n, i_n}$ ). On calcule alors :

$$|\mathcal{B}_{n+1}| = \sum_{j=1}^{d+1} z_j = \sum_{j=1}^{d+1} x_j + \frac{1 - a_n}{a_n + 1} x''_1 - x'_1 = |\mathcal{B}_n| + \frac{1 - a_n}{a_n + 1} x''_1 - x'_1.$$

Comme  $a_n \geq 1$ , on a  $|\mathcal{B}_{n+1}| \leq |\mathcal{B}_n|$ , avec égalité si et seulement si  $x'_1 = 0$ . Or  $x'_1 = 0$  signifie qu'il n'y a pas de  $(1, i_n + 1)$ -palier fermé à droite, et donc en particulier que  $\mathcal{B}_n$  n'est pas reconnaissable. Ceci étant exclu, on a bien  $|\mathcal{B}_{n+1}| < |\mathcal{B}_n|$ .  $\square$

Le théorème suivant montre alors la correction de l'algorithme :

**Théorème 6.25** *L'algorithme RecoBrun calcule l'ensemble des paramètres acceptables de toute fonction binaire passée en argument.*

*Preuve.* On raisonne par récurrence sur le nombre d'étapes du calcul du développement de Brun, c'est-à-dire la valeur de  $n$  à la ligne 9 du pseudo-code. Si  $n = 0$ , c'est la correction (supposée) de l'algorithme **XReco** qui garantit le résultat. Supposons alors le résultat acquis au rang  $n$ . On vérifie alors :

$$\begin{aligned}
((1, \alpha), \rho) \in P(\mathcal{B}_0) &\Leftrightarrow 0 \leq \mathcal{B}_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\mathcal{B}}_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\mathcal{B}}_0 - L_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho} \quad \text{et} \quad 0 \leq L_0 \leq \mathcal{P}_{(1, \alpha), \rho} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \mathcal{B}_1 \leq \mathcal{P}_{B_{a_0, i_0}^{-1}(1, \alpha), \rho} \quad \text{et} \quad ((1, \alpha), \rho) \in \mathbf{XReco}(L_0) \\
&\Leftrightarrow (B_{a_0, i_0}^{-1}(1, \alpha), \rho) \in P(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad ((1, \alpha), \rho) \in \mathbf{XReco}(L_0)
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne est justifié par l'équivalence de  $\mathcal{B}_0$  et  $\tilde{\mathcal{B}}_0$  (Prop. 6.23). Le passage de la troisième à la quatrième ligne se fait en appliquant  $E_1^*(\beta_{a_0, i_0}^{-1})$  et est justifié par la proposition 6.23. On en déduit donc finalement :

$$P(\mathcal{B}_0) = B'_{a_0, i_0} P(\mathcal{B}_1) \cap \mathbf{XReco}(L_0).$$

L'hypothèse de récurrence assure alors la correction de l'algorithme.  $\square$

Pour finir, discutons de la complexité de cet algorithme. Commençons par donner une borne supérieure. Les opérations de parcours de paliers peuvent se faire en temps linéaire en la taille de  $\mathcal{B}$ . On en déduit aisément que chaque étape de la "descente" (lignes 2 à 8) peut se faire en temps linéaire en la taille de  $\mathcal{B}$ . La proposition 6.24 assure que, pour une fonction binaire  $\mathcal{B}$  quelconque, il y a au plus  $|\mathcal{B}|$  étapes dans la "descente" (lignes 2 à 8). Toute cette descente se fait donc en temps au plus quadratique en la taille de  $\mathcal{B}$ . Considérons maintenant la partie "corrective" de l'algorithme, c'est-à-dire les lignes 9 à 13. Notons que la taille totale de tous les ensembles sur lesquels on appelle **XReco** est inférieure à la taille de  $\mathcal{B}$ . Ainsi, si on utilise pour **XReco** un algorithme de complexité au plus quadratique (de tels algorithmes existent, par exemple, le calcul par préimage décrit dans [23]), la complexité totale due aux appels à cet algorithme ne dépasse pas la borne donnée pour les lignes 2 à 8. Reste les calculs d'intersection de polytopes convexes (ligne 12). Il est difficile d'estimer précisément ce facteur en général. Cependant, on peut citer un résultat de Chazelle, qui montre que l'intersection de  $k$  polytopes convexes de  $\mathbb{R}^3$  peut être calculée en temps  $\mathcal{O}(m \ln k)$ , où  $m$  est la taille totale de ces polytopes ([31]). Pour conclure, soulignons qu'on s'attend à ce que la taille de la première fonction binaire  $\mathcal{B}_n$  qui n'est plus reconnaissable, ainsi que les tailles des paliers ouverts mis de côtés (les  $L_k$ ), soient largement inférieures à la taille de  $\mathcal{B}$ . Ainsi, les bornes théoriques de la complexité de cet algorithme sont probablement très larges par rapport à son exécution en pratique, aussi est-il nécessaire de faire une étude plus systématique de l'efficacité de cet algorithme avant de pouvoir juger de son intérêt pratique.



# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a étudié l'action des applications duales – un type de substitution particulier – sur les pavages canoniques de codimension un (plans ou surfaces en escalier, voire fonctions binaires). On a également relié ces résultats aux fractions continues multi-dimensionnelles, notamment dans le cadre des problèmes de géométrie discrète que sont la génération et la reconnaissance de plan. On a ainsi généralisé le lien entre mots, fractions continues et géométrie discrète discuté au chapitre 1, ce qui était l'objectif principal annoncé.

Pour finir, mentionnons encore quelques résultats que nous avons obtenus durant cette thèse sans les exposer dans ce document. Ces résultats peuvent être vus comme des premiers pas de prolongements des problématiques abordées dans cette thèse.

Un premier résultat concerne la relation entre les applications duales utilisées dans cette thèse et les deux classes de substitutions sur les pavages – géométriques ou combinatoires – exposées au paragraphe 1.2.2. Nous avons montré, dans l'article [57] (version longue d'un résultat présenté en conférence, voir [53]), que les applications duales de substitutions sont des substitutions combinatoires particulières. Ceci permet en particulier de disposer d'une large classe d'exemples de substitutions combinatoires – puisqu'il n'est généralement pas évident de définir *ex-nihilo* de telles substitutions. Une question qui reste alors en suspens est celle de la caractérisation des substitutions combinatoires pouvant être vues comme des applications duales de substitutions. Notamment, il serait intéressant de savoir si ces substitutions combinatoires particulières sont exactement celles envoyant plans et surfaces en escalier sur, respectivement, plans et surfaces en escalier (ce qui est bien le cas des applications duales de substitutions). Ceci permettrait de voir les applications duales de substitutions parmi les substitutions combinatoires comme les *morphismes sturmiens* parmi les substitutions sur les mots, puisque les morphismes sturmiens sont les substitutions envoyant les mots sturmiens sur les mots sturmiens (voir [14]).

Un autre résultat concerne la flip-accessibilité des pavages canoniques. Nous avons étudié au chapitre 4 la flip-accessibilité des pavages canoniques de codimension un, énonçant notamment le théorème 4.16. Dans [21], nous avons montré un

résultat analogue à ce théorème dans le cadre des pavages canoniques de dimension deux et de codimension quelconque. La démonstration de ce résultat est un peu plus complexe et fait intervenir des concepts que nous n'avons pas abordés dans cette thèse, en particulier les *lignes de De Bruijn* de pavages (introduites dans [38]). Ce résultat étend au cas de pavages infinis un résultat de Kenyon, qui montre que deux pavages canoniques de dimension deux et codimension quelconque d'un même domaine fini sont toujours flip-accessibles (voir [73]). L'objectif général serait de caractériser la flip-accessibilité en dimensions et codimensions quelconques.

Notons que l'objectif précédent semble difficile (voir, par exemple, les difficultés soulevées dans [42] dans le cas de la dimension trois). Cependant, soulignons que nous avons introduit au chapitre 4 la notion de *pseudo-flip-accessibilité*, qui semble, elle, plus facile à étudier, tout en permettant d'obtenir des résultats utiles pour l'étude de l'action des applications duales sur les pavages canoniques (c'est-à-dire, dans le cadre de cette thèse, les surfaces en escalier). En particulier, dans l'optique de généraliser les liens entre applications duales, pavages et fractions continues en codimensions supérieures (cette thèse ne traitant que de la codimension un), une telle approche semble intéressante. D'autant plus qu'on peut déjà citer quelques travaux sur les possibles définitions en codimensions supérieures des applications duales (voir [5, 7, 49, 61]). Un objectif plus concret serait alors, par exemple, d'engendrer le pavage de Penrose (qui peut être vu comme une généralisation en codimension trois d'un plan en escalier) par des applications duales, ou de déterminer si un pavage canonique donné est un pavage par coupe et projection canonique (problème de reconnaissance de plan).

Pour finir, citons brièvement quelques axes de recherches envisageables, à plus long terme. Un premier axe consisterait à définir et étudier une notion de *complexité* pour les surfaces en escalier, notamment pour caractériser par leur complexité les plans en escalier parmi les surfaces en escalier, comme on sait caractériser par leur complexité<sup>3</sup> les mots sturmiens parmi les mots. Un autre axe de recherche serait de généraliser la caractérisation des mots substitutifs en termes de *mots de retour*, donnée dans [47], au cas des plans en escalier, par exemple via une notion de *surface en escalier de retour*. Dans ce cadre, les travaux sur les *pavages de Voronoï dérivés* menés dans [88, 89] peuvent être riches d'enseignements et d'inspirations. Enfin, si la reconnaissance de plan est un problème fondamental de la géométrie discrète, comme nous l'avons souligné au chapitre 1, il n'en demeure pas moins que le véritable problème est celui de la *polygonalisation* (ou *polyédrisation*), c'est-à-dire la décomposition d'objets discrets en plusieurs morceaux de plans. Il conviendrait alors d'étudier comment l'approche par applications duales, appliquée dans cette thèse à la reconnaissance de plan, pourrait être adaptée à ce problème plus général.

---

<sup>3</sup>en termes de nombre de facteurs distincts – voir Chap. 1

# Bibliographie

- [1] E. Altman, B. Gaujal, and A. Hordijk, *Balanced sequences and optimal routing*, Journal of the ACM **47** (2000), 752–775.
- [2] R. Ammann, B. Grünbaum, and Shephard G. C., *Aperiodic tiles*, Discrete Comput. Geom. **8** (1992), 1–25.
- [3] P. Arnoux, V. Berthé, Th. Fernique, and D. Jamet, *Functional stepped surfaces, flips and generalized substitutions*, Theor. Comput. Sci. **380** (2007), 251–265.
- [4] P. Arnoux, V. Berthé, and A. Siegel, *Two-dimensional iterad morphisms and discrete planes*, Theor. Comput. Sci. **319** (2004), 145–176.
- [5] P. Arnoux, M. Furukado, E. Harriss, and S. Ito, *Algebraic numbers and automorphisms of free groups*, 2007, preprint, p. 37.
- [6] P. Arnoux and S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8** (2001), 181–207.
- [7] P. Arnoux, S. Ito, and Y. Sano, *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, J. Anal. Math. **83** (2001), 183–206.
- [8] M. Baake, U. Grimm, and R. V. Moody, *What is aperiodic order*, 27, ArXiv math.HO/0203252.
- [9] M. Baake, J. Hermisson, M. Hoffe, and C. Richard, *Random tilings – concepts and examples*, 1998, pp. 6385–6408.
- [10] M. Baake and R. V. Moody, *Directions in mathematical quasicrystals*, AMS, 2000.
- [11] F. Bailly, N. Destainville, and R. Mosseri, *Configurational entropy of codimension-one tilings and directed membranes*, J. Stat. Phys. **87** (1997), 697–754.
- [12] P. Balázhi, Z. Masáková, and E. Pelantová, *Complete characterization of substitution invariant sturmian sequences*, Integers **5** (2005), 23.
- [13] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*, Mem. Amer. Math. Soc. **66** (1966), 1–72.
- [14] J. Berstel and P. Séebold, *A characterization of Sturmian morphisms*, Proc. MFCS'93, vol. 711, Springer Verlag, 1993, pp. 281–290.

- [15] V. Berthé and Th. Fernique, *Brun expansions of stepped surfaces*, 2007, Preprint, p. 35.
- [16] ———, *Brun expansions, substitutions and discrete geometry*, WORDS (P. Arnoux, N. Bédaride, and J. Cassaigne, eds.), 2007, pp. 36–42.
- [17] V. Berthé and A. Siegel, *Tilings associated with beta-numeration and substitutions*, INTEGERS (Electronic Journal of Combinatorial Number Theory) **5** (2005), 46.
- [18] V. Berthé and L. Vuillon, *Suites doubles de basse complexité*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 179–208.
- [19] ———, *Tilings and rotations on the torus : a two-dimensional generalization of Sturmian sequences*, Discrete Mathematics **223** (2000), 27–53.
- [20] O. Bodini and Th. Fernique, *Planar dimer tilings*, CSR (D. Grigoriev, J. Harrison, and E. A. Hirsch, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3967, Springer, 2006, pp. 104–113.
- [21] O. Bodini, Th. Fernique, and E. Rémila, *A characterization of flip-accessibility for rhombus tilings of the whole plane*, LATA, 2007.
- [22] A. J. Brentjes, *Multi-dimensional continued fraction algorithms*, Mathematical Centre Tracts 145, Mathematisch Centrum, 1981.
- [23] V. Brimkov and D. Coeurjolly, *Computational aspects of digital plane and hyperplane recognition*, 2006, pp. 291–204.
- [24] V. Brimkov, D. Coeurjolly, and R. Klette, *Digital planarity - a review*, Disc. Appl. Math. **155** (2007), 468–495.
- [25] V. E. Brimkov and S. S. Dantchev, *Complexity analysis for digital hyperplane recognition in arbitrary fixed dimension*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'05, vol. 3429, 2005, pp. 287–298.
- [26] L. Buzer, *An incremental linear time algorithm for digital line and plane recognition using a linear incremental feasibility problem*, DGCI'02, Springer-Verlag, 2002, pp. 372–381.
- [27] V. Canterini and A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5121–5144.
- [28] J. Cassaigne, *Double sequences with complexity  $mn + 1$* , J. Autom. Lang. Comb. **4** (1999), 153–170.
- [29] ———, *Subword complexity and periodicity in two or more dimensions*, World Scientific (2000), 14–21.
- [30] F. Chavanon and E. Rémila, *Rhombus tilings : Decomposition and space structure*, Discrete w& Computational Geometry **35** (2006), 329–358.
- [31] B. Chazelle, *An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedra*, SIAM J. Comput. **21** (1992), 671–696.

- [32] E. B. Christoffel, *observatio arithmetica*, math ann. **6** (1875), 145–152.
- [33] E. M. Coven and G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.
- [34] E. Creutzburg, A. Hübler, and O. Sýkora, *Geometric methods for on-line recognition of digital straight-line segments*, Comput. Artif. Intell. **7** (1988), 253–276.
- [35] E. Creutzburg, A. Hübler, and V. Wedler, *On-line Erkennung digitaler Geradensegmente in linearer Zeit*, GEO-BILD'82, Wiss. Beiträge der FSU Jena, 1982, pp. 48–65.
- [36] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, and P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequence*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 123–137.
- [37] K. Culik and J. Kari, *An aperiodic set of Wang cubes*, J-JUCS **1** (1995), 675–686.
- [38] N. G. De Bruijn, *Algebraic theory of penrose's nonperiodic tilings of the plane*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **43** (1981), 39–52.
- [39] I. Debled-Rennesson, F. Feschet, and J. Rouyer-Degli, *Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time*, Computers & Graphics **30** (2006), 30–36.
- [40] I. Debled-Rennesson, J.-L. Remy, and J. Rouyer-Degli, *Linear segmentation of discrete curves into blurred segments*, Discrete Applied Mathematics **151** (2005), 122–137.
- [41] I. Debled-Rennesson and J.-P. Réveilles, *A linear algorithm for segmentation of digital curves*, Internat. J. Pattern Recognition Artig. Intell. **9** (1995), 635–662.
- [42] V. Desoutter and N. Destainville, *Flip dynamics in three-dimensional random tilings*, J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005), 17–45.
- [43] D. P. Di Vincenzo and P. J. Steinhart (eds.), *Quasicrystals, the state of the art*, World Scientific, 1991.
- [44] L Dorst and A Smeulders, *Decomposition of discrete curves into piecewise straight segments in linear time*, Contemp. math. **119** (1991), 169–195.
- [45] B. Durand, *Tilings and quasiperiodicity*, Theor. Comput. Sci. **221** (1999), 61–75.
- [46] ———, *De la logique aux pavages*, Theor. Comput. Sci. **281** (2002), 311–324.
- [47] F. Durand, *A characterization of substitutive sequences using return words*, Inventiones Math. **132** (1998), 179–188.
- [48] H. Ei, *Some properties of invertible substitutions of rank  $d$ , and higher dimensional substitutions*, Osaka Journal of Mathematics **40** (2003), 543–562.
- [49] H. Ei and S. Ito, *Tilings from some non-irreducible, pisot substitutions*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **7** (2005), 81–121.

- [50] C. Epifanio, M. Koskas, and F. Mignosi, *On a conjecture on bidimensional words*, Theoret. Comput. Sci. **299** (2003), 123–150.
- [51] Th. Fernique, *Pavages d'une polycellule*, 2004, Mémoire de DEA – Université Montpellier 2 et LIRMM.
- [52] ———, *Bidimensional Sturmian sequences and substitutions*, Developments in Language Theory (C. de Felice and A. Restivo, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3572, Springer, 2005, pp. 236–247.
- [53] ———, *Substitutions on multi-dimensional sequences.*, WORDS (S. Brlek and C. Reutenauer, eds.), vol. 36, LaCIM, 2005, pp. 223–234.
- [54] ———, *Generalized substitutions and stepped surfaces*, 2006, Workshop on Words and Automata, St Petersburg, Russie.
- [55] ———, *Multidimensional Sturmian sequences and generalized substitutions*, Int. J. Found. Comput. Sci. **17** (2006), 575–600.
- [56] ———, *Generation and recognition of digital planes using multi-dimensional continued fractions*, 2007, Preprint, p. 16.
- [57] ———, *Local rules and stepped surfaces*, Theoret. Comput. Sci. **380** (2007), 317–329.
- [58] J.C. Fournier, *Pavages des figures planes sans trous par des dominos : fondement graphique de l'algorithme de thurston et parallélisation*, C. R. de l'Acad. des Sci. **320** (1995), 107–112.
- [59] J. Françon, J. M. Schramm, and M. Tajine, *Recognizing arithmetic straight lines and planes*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'96, vol. 1176, 1996, pp. 141–150.
- [60] H. Freeman, *Boundary encoding and processing*, pp. 241–266, Academic, 1970.
- [61] M. Furukado, S. Ito, and E. A. Robinson, *Tilings associated with non-pisot matrices*, Annales de l'institut Fourier **56** (2006), 2391–2435.
- [62] E. Galois, *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*, Annales de Gergonne **19** (1828), 294–301.
- [63] B. Gaujal, E. Hyon, and A. Jean-Marie, *Optimal routing in two parallel queues with exponential service times*, Journal of Discrete Event Dynamic Systems **16** (2006), 71–107.
- [64] B. Grünbaum and M. Shepherd, *Tilings and patterns*, Freeman, 1987.
- [65] F. Gähler and J. Rhyner, *Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tiling*, J. Phys. A **19** (1986), 267–277.
- [66] Y. Gérard, I. Debled-Rennesson, and P. Zimmermann, *An elementary digital plane recognition algorithm*, Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science **151** (2005), 169–183.

- [67] E. Harriss, *On canonical substitution tilings*, 2004, Ph. D. Thesis, Imperial College, London.
- [68] S. Ito and M. Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms*, Tokyo J. Math **16** (1993), 441–472.
- [69] ———, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm*, Tokyo J. Math **17** (1994), 33–58.
- [70] Damien Jamet, *On the language of standard discrete planes and surfaces*, IWCIA, 2004, pp. 232–247.
- [71] C. Janot, *Quasicrystals – a primer*, Oxford University Press, 1996.
- [72] R. Kenyon, *The construction of self-similar tilings*, Geom. Func. Anal. **6** (1996), 471–488.
- [73] Richard Kenyon, *Tiling a polygone with parallelograms*, Algorithmica **9** (1993), 382–397.
- [74] ———, *The planar dimer model with boundary : a survey*, 1998.
- [75] A. Y. Khinchin, *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1963.
- [76] C. E. Kim, *Three-dimensional digital planes*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence **6** (1984), 639–645.
- [77] C. E. Kim and I. Stojmenović, *On the recognition of digital planes in three dimensional space*, pattern Recognition Letters **12** (1991), 665–669.
- [78] R. Klette and A. Rosenfeld, *Digital straightness - a review*, Discrete Appl. Math. **139** (2004), 197–230.
- [79] P. Kramer and R. Neri, *On periodic and non-periodic space filling of  $\mathbb{E}^*$  obtained by projection*, Acta. Cryst. A **40** (1984), 580–587.
- [80] G. Lachaud, *Sails and Klein polyhedra*, Contemporary Mathematics **210** (1998), 373–385.
- [81] J. C. Lagarias, *Geodesic multidimensional continued fractions*, Proc. London Math. Soc. **69** (1994), 464–488.
- [82] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 2002.
- [83] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis*, vol. 2, North-Holland mathematical library, 1972.
- [84] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
- [85] M. Nivat, 1997, Invited talk at ICALP’97.
- [86] R. Penrose, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. and its Appl. **10** (1974), 266–271.

- [87] M. L. V. Pitteway, *The relationship between euclid's algorithm and run length encoding*, Fundamental Algorithms for Computer Graphics, NATO ASI Series, vol. 17, Springer, 1985, pp. 105–111.
- [88] N. Priebe and B. Solomyak, *Characterization of planar pseudo-self-similar tilings*, Discrete Comput. Geom. **26** (2001), 289–306.
- [89] N. Priebe Frank, *Detecting combinatorial hierarchy in tilings using derived Voronoï tessellations*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 459–467.
- [90] ———, *A primer on substitution tilings of the euclidean plane*, 2007.
- [91] J. Propp, *Lattice structure for orientations of graphs*, 2002, arXiv :math/0209005.
- [92] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture notes in mathematics, vol. 1794, Springer, 2002.
- [93] A. Quas and L. Q. Zamponi, *Periodicity and local complexity*, Theoret. Comput. Sci. **319** (2004), 229–240.
- [94] Martine Queffélec, *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1294.
- [95] J.-P. Reveillès, *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*, 1991, Thèse d'état Univ. Louis Pasteur, Starsbourg.
- [96] E. A. Robinson, *Symbolic dynamics and tilings of  $\mathbb{R}^d$* , Proc. Symposia in Applied Mathematics **20** (2004), 81–119.
- [97] R. M. Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Invent. Math. **12** (1971), 177–209.
- [98] O Salon, *Suites automatiques à multi-indices et algébricité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **305** (1987), 501–504.
- [99] J. W. Sander and R. Tijdeman, *The rectangle complexity of functions on lattices*, Theoret. Comput. Sci. **270** (2002), 857–863.
- [100] D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn, *Metallic phase with long-range orientational symmetry and no translational symmetry*, Phys. Rev. Let. **53** (1984), 1951–1953.
- [101] M. Schlottmann, *Generalized model sets and dynamical systems*, in [10], 2000.
- [102] F. Schweiger, *Multidimensional continued fractions*, Oxford University Press, 2000.
- [103] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.
- [104] B. Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. **17** (1997), 695–738.
- [105] ———, *Pseudo-self-similar tilings in  $\mathbb{R}^d$* , Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg Otdel. mat. Inst. Steklov (POMI) **326** (2005), 198–213.

- [106] I. Stojmenović and R. Tosić, *Digitization schemes and the recognition of digital straight lines, hyperplanes and flats in arbitrary dimensions*, Vision Geometry, Contemporary Math. Series. **119** (1991), 197–212.
- [107] W. P. Thurston, *Groups, tilings and finite state automata*, Lectures notes distributed in conjunction with the Colloquium Series, in *AMS Colloquium lectures*, 1989.
- [108] A. Troesch, *Interprétation géométrique de l'algorithme d'euclide et reconnaissance de segments*, Theoret. Comput. Sci. **115** (1993), 291–319.
- [109] J. Vittone and J.-M. Chassery, *Recognition of digital naive plabes and polyhedrization*, Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'00, vol. 1953, 2000, pp. 296–307.
- [110] L. Vuillon, *Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle*, Theor. Comput. Sci. **209** (1998), 261–285.
- [111] H. Wang, *Proving theorems by pattern recognition II*, Bell Systems Tech. J. **40** (1961), 1–41.
- [112] Z.-X. Wen and Z.-Y. Wen, *Local isomorphisms of invertible substitutions*, C. R. Acad. Sci. Paris **318** (1994), 299–304.
- [113] L. D. Wu, *On the chain code of a line*, IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell. (PAMI) **4** (1982), 347–353.
- [114] S.-I. Yasutomi, *On Sturmian sequences which are invariant under some substitutions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

---

**Résumé :** Une notion récurrente en combinatoire des mots est celle de mot sturmien. Les mots sturmiens peuvent notamment être vus comme des codages de droites discrètes. Dans ce cadre, des liens étroits ont été mis en évidence entre le développement en fractions continues du vecteur normal d'une droite discrète (c'est-à-dire le vecteur normal de la droite réelle qui est discrétisée) et l'action de transformations élémentaires - substitutions ou morphismes - sur les mots sturmiens correspondants. En particulier, ces liens ont été utilisés en géométrie discrète pour concevoir des algorithmes de tracé ou de reconnaissance de droite discrète, qui sont des opérations fondamentales pour vectoriser des objets discrets. Dans cette thèse, on s'intéresse à une possible généralisation de ces liens en dimensions supérieures. Notons que plusieurs généralisations multi-dimensionnelles des mots sturmiens, des fractions continues ou des algorithmes de tracé et de segmentation de droites existent déjà. Cependant, ces généralisations restent isolées, les liens existant dans le cas unidimensionnel étant perdus. L'apport principal de cette thèse est de proposer une généralisation englobant ces liens. Plus précisément, on montre qu'une classe particulière de substitutions agissant sur les pavages - qui jouent le rôle de mots multi-dimensionnels - permet de calculer des développements de pavages, généralisant les développements en fraction continue classiques. Ceci est notamment appliqué en géométrie discrète au tracé et à la reconnaissance de plans discrets. Soulignons qu'une des clefs essentielles de cette généralisation est la notion de flip, venue de la mécanique statistique (par exemple pour modéliser la formation des quasi-cristaux), et qui s'avère très utile pour étudier l'action de substitutions sur des pavages.

**Mots clés :** algorithme de Brun, application duale, combinatoire des mots, flips, fractions continues, génération de plan discret, géométrie discrète, mécanique statistique, pavages, plan en escalier, quasi-cristaux, reconnaissance de plan discret, substitution, surface en escalier.