La mv-décomposition : un nouvel algorithme pour la diffusion dans un réseau radio

Olivier Cogis,[1] Benoît Darties,[1] Sylvain Durand,[1] Jean-Claude König,[1] Geneviève Simonet[1]

[1]*LIRMM - Université Montpellier II*
UMR 5506
161 rue Ada 34392 Montpellier Cedex 5, France

Nous présentons un nouvel outil, la mv-décomposition et détaillons quelques-unes de ses propriétés algorithmiques. Nous utilisons cette mv-décomposition pour proposer une solution en $O((\log n)^2)$ étapes avec un algorithme de complexité $O(m(\log n)^2)$ au problème de diffusion à distance 2 dans un réseau radio multi-sauts synchrone avec présence d'interférences.

Keywords: mv-décomposition, théorie, réseaux radios, diffusion

1 Introduction

Dans un réseau sans-fil multi-sauts, les nœuds adjacents peuvent communiquer entre eux grâce à des émissions radio. L'utilisation d'un tel média comme support de la communication implique certaines contraintes et propriétés. Lorsqu'un nœud émet, l'ensemble des nœuds présents dans sa zone d'émission est susceptible de capter la transmission. Les messages reçus doivent être relayés pour atteindre les nœuds situés à plus d'un saut de la source du message. Puisque tous les nœuds partagent le même canal d'émission, des collisions peuvent apparaître : pour un nœud donné, la transmission simultanée de deux ou plusieurs nœuds adjacents empêche une réception correcte du message.

Nous étudions dans cet article le problème de la diffusion, qui consiste à envoyer un message depuis un nœud source vers l'ensemble des autres nœuds du réseau. Nous considérons le modèle de communication simplifié qui est utilisé entre autres dans [CK85, CW91, ABNLP91] : les nœuds envoient des messages pendant des étapes synchrones; à chaque étape, un nœud se comporte soit comme un transmetteur, soit comme un récepteur. Un nœud agissant comme récepteur durant une étape donnée peut recevoir un message si et seulement si un de ses voisins transmet à cette étape. De plus, nous supposons que la topologie est connue par un superviseur. Ce modèle simplifié a été largement considéré dans la littérature pour analyser la complexité du problème de diffusion. Deux paramètres importants sont couramment étudiés dans l'évaluation des performances d'un schéma de diffusion : le nombre d'étapes requis pour informer tous les nœuds du réseau, et le nombre d'émissions réalisées. Les auteurs de [CK85] ont montré que trouver un schéma avec un nombre minimum d'étapes était un problème NP-difficile. Un premier algorithme, réalisant une diffusion en $O(D(\log n)^2)$ étapes, a été proposé dans [CW91] avec une complexité $O(mn(\log n)^2$, où D est l'excentricité de la source. Les auteurs de [ABNLP91] ont montré l'existence d'une famille de graphes de diamètre 2 pour lesquels une diffusion requiert nécessairement $\Omega((\log n)^2)$ étapes, confirmant l'intérêt du résultat de [CW91]. D'autres travaux [KP04, GM95, KE05] ont proposé des stratégies de diffusion avec de meilleurs résultats lorsque l'excentricité du graphe est importante.

Le travail que nous présentons s'organise comme suit : dans la section 2 nous présentons un nouvel outil : la mv-décomposition, et détaillons quelques propriétés. Dans la section 3, nous utilisons la mv-décomposition pour proposer des solutions avec garantie de performances au problème de diffusion à distance 2 : ce problème est la version restreinte du problème de diffusion dans laquelle l'objectif est d'informer les nœuds situés à distance 2 de la source. Nous proposons notamment un algorithme qui construit une diffusion à distance 2 en $O(\log n)^2)$ étapes pour une complexité en temps de $O(m(\log n)^2)$. Pour des raisons de place, nous ne mentionnerons pas les preuves des propriétés et des théorèmes de ce travail, qui sont toutefois disponibles dans [Dar07].

2 Un nouvel outil, la mv-décomposition

Soit $G = (X,Y,E)$ un graphe biparti. Une **couverture** dans G d'un sous-ensemble $Y' \subseteq Y$ est un sous-ensemble $X' \subseteq X$ tel que $Y' \subseteq N_G(X')$, où $N_G(X')$ désigne l'ensemble des voisins des sommets de X' dans G. On dit que X' est une **couverture minimale** (au sens de l'inclusion) de Y' dans G lorsque X' est une couverture de Y mais qu'aucun de ses sous-ensembles stricts n'en est une. Pour tout ensemble $X' \subseteq X$, on note $mv_G(X')$ ("mono-voisinage" de X' dans G) l'ensemble des voisins de X' qui ne sont voisins que d'un seul sommet de X'. Clairement, si X' est une couverture minimale de Y alors on a $|mv_G(X')| \geq |X'|$. Appelons enfin $\rho(G) = \max_{X' \subseteq X} |mv_G(X')|$ la **réceptivité** de G. Si G représente un réseau radio dans un modèle de communication avec interférences, l'émission simultanée des nœuds de X' entraîne une réception correcte pour les nœuds de $mv_G(X')$. La réceptivité est alors le nombre maximum de nœuds de Y que l'on peut espérer informer en une étape.

Soit $G = (X,Y,E)$ un graphe biparti tel que X couvre Y. Une collection $(X_i)_{i \in I}$ de parties de X **sature** Y dans G lorsque $Y = \bigcup_{i \in I} mv_G(X_i)$.

Dans la suite, nous posons $X_0 = X$ et $Y_0 = Y$. Une **mv-décomposition** de G consiste en la donnée d'un entier K, d'une collection $(X_i)_{1 \leq i \leq K}$ de K parties de X qui sature Y dans G, et deux autres collections $(Y_i)_{1 \leq i \leq K}$ et $(Z_i)_{1 \leq i \leq K}$, telles que tout i avec X_i défini et non vide on a :

- $X_{i+1} \subseteq X_i$ est une couverture minimale de Y_i,
- Z_i est défini de sorte que le sous-graphe de G induit par $X_i \cup Z_i$ est un couplage parfait.
- $Y_{i+1} = Y_i - Z_{i+1}$.

Par la suite, nous désignons une mv-décomposition comme la collection $(X_i)_{1 \leq i \leq K}$ de K parties de X, les deux autres collections $(Y_i)_{1 \leq i \leq K}$ et $(Z_i)_{1 \leq i \leq K}$ se déduisant logiquement de celle-ci. La **profondeur** de la mv-décomposition est l'entier K, pour lequel $Y_K = \emptyset$.

La figure 1 présente une mv-décomposition de profondeur 3. Les arêtes foncées désignent les couplages réalisés pour déterminer Z_i depuis X_i. Si G est un réseau radio, l'émission simultanée des sommets de tout X_i avec $|X_i| = l$ entraîne une réception correcte pour les l sommets de Z_i, ainsi que pour l sommets de chaque ensemble Z_j avec $1 \leq j \leq i$. Tous les sommets de Y_i reçoivent le message avec des interférences.

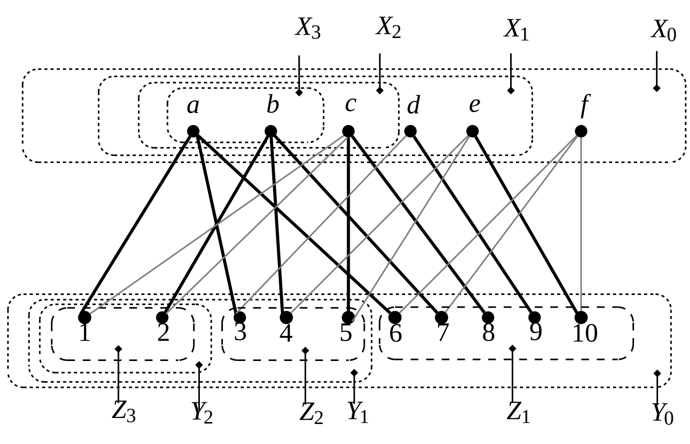

FIG. 1: Construction d'une mv-décomposition

Propriété 1 *: Pour toute mv-décomposition d'un biparti $G = (X,Y,E)$ tel que X couvre Y, on a :*

1. *$\{X_i\}_{0 \leq i \leq K}$ et $\{Y_i\}_{0 \leq i \leq K}$ sont deux suites emboitées pour l'inclusion, avec $X_K \neq \emptyset$ et $Y_K = \emptyset$. Par ailleurs X_i couvre Y_i pour $0 \leq i \leq K$.*

2. *$\{Z_j\}_{i\leq j\leq K}$ est une partition de Y_{i-1}. En particulier $\{Z_i\}_{1\leq i\leq K}$ partitionne Y.*
3. *pour tout i tel que $1 \leq i \leq K$, on a $|Z_i| = |X_i| \neq \emptyset$, et $Z_i \subseteq mv_G(X_i)$.*
4. *Pour tout i tel que $1 \leq i \leq K$, tout sommet x de X_i possède, pour tout j tel que $1 \leq j \leq i$, exactement un voisin dans Z_j qui n'est voisin d'aucun autre sommet de X_i.*

Pour toute mv-décomposition de G de profondeur K, on a $K \leq \Delta_G(X)$, en notant $\Delta_G(X)$ le degré maximum dans G d'un sommet de X. Nous avons proposé dans [Dar07] un algorithme† permettant de calculer une mv-décomposition avec une complexité de $O(m)$.

3 Application au problème de diffusion à distance 2

Nous utilisons la mv-décomposition pour établir une solution avec garantie de performances au problème de la diffusion à distance 2 dans les réseaux radios synchrones. Dans ce cas particulier du problème de diffusion, au terme de la première étape d'une diffusion, tous les nœuds adjacents à la source ont connaissance du message à diffuser ; il convient alors d'organiser leurs émissions pour informer les nœuds situés à deux sauts de la source en un nombre minimum d'étapes. Une approche récursive de ce procédé en fonction de la distance des nœuds par rapport à la source permet de diffuser vers la totalité des nœuds.

La donnée peut se restreindre à un graphe biparti $G = (X,Y,E)$ où X est l'ensemble des nœuds à distance 1 (ont connaissance du message) et Y celui des nœuds à distance 2 (nœuds à informer).

Propriété 2 *Soit $G = (X,Y,E)$ un graphe biparti tel que X couvre Y. Alors, la réceptivité $\rho(G)$ vérifie l'inéquation suivante :*

$$\rho(G) \geq \max_{1\leq i\leq K} |mv_G(X_i)| \geq \max(\Delta_G(X), \frac{|Y|}{\Delta_G(X)})$$

En corollaire immédiat à la propriété 2, on a donc $\rho(G) \geq \sqrt{|Y|}$. En fait nous avons affiné cette borne et montré que $\rho(G) \geq \frac{|Y|}{1+\ln|Y|}$. La preuve de ce résultat utilise le fait que pour toute mv-décomposition $\{X_i\}_{1\leq i\leq K}$ de G, on a $\forall i | 1 \leq i \leq K, |mv_G(X_i)| \geq i \times |X_i|$. Nous proposons le théorème suivant :

Theorème 1 *Soit $G = (X,Y,E)$ un graphe biparti. Alors pour toute mv-décomposition de G, on a :*

$$\rho(G) \geq \max_{1\leq i\leq K} |mv_G(X_i)| \geq \frac{|Y|}{H_K} \tag{1}$$

où H_n est le nombre harmonique $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Le théorème 1 annonce que pour toute mv-décomposition de G, il existe un indice i tel que l'émission des nœuds de X_i garantit une réception à une quantité suffisamment grande de nœuds de Y. Puisque $K \leq \Delta_G(X)$ et que H_n est une fonction strictement croissante qui satisfait $H_n \leq 1 + \ln n$, nous obtenons :

$$\rho(G) \geq \max_{1\leq i\leq K} |mv_G(X_i)| \geq \frac{|Y|}{1 + ln\Delta_G(X)} \tag{2}$$

Nous proposons l'algorithme *Saturation* dont les grandes lignes sont décrites ci-dessous :

† Cet algorithme consiste à calculer des couvertures minimales successives, et utilise des matrices à trous pour minimiser la complexité.

Algorithme 1 : Saturation

Données : Un graphe biparti $G = (X,Y,E)$ tel que X couvre Y
Résultat : Un ensemble $\{W_t\}_{1\leq t\leq L}$ qui sature Y dans G
$R = Y$; $t = 0$;
tant que $R \neq \emptyset$ **faire**
  $t = t+1$;
  Calculer une mv-décomposition de G[X,R];
  Soit K_t sa profondeur, et soit $\left(X_i^t\right)_{0\leq i\leq K_t}$ la suite décomposant X;
  choisir i dans $\{1,\ldots,K_t\}$ de sorte que $mv_{G_{[X,R]}}(X_i^t)$ soit de cardinal maximum;
  $R = R - mv_{G_{[X,R]}}$;
  $W_t = X_i^t$;
fin
L = t;
Retourner $\{W_t\}_{1\leq t\leq L}$;

Clairement $\{W_t\}_{1\leq t\leq L}$ est un ensemble de sous-ensembles de X saturant Y. Une stratégie de diffusion valide se déduit alors en faisant émettre les sommets de W_i à l'étape i. Le nombre d'étapes de cette stratégie est le nombre d'itérations L de l'algorithme.

Theorème 2 *L'algorithme Saturation s'exécute en $O((\ln|Y|)^2)$ itérations, c'est-à-dire que toute stratégie de diffusion construite à partir de l'ensemble $\{W_t\}_{1\leq t\leq L}$ s'exécute en $O((\ln|Y|)^2)$ étapes.*
Sa complexité en temps est de l'ordre de $O(m(\ln|Y|)^2)$.

La qualité de la solution retournée par notre algorithme est donc la même que celle de l'algorithme de [CW91], mais nous améliorons la complexité d'un facteur n.

4 Conclusion

Nous avons proposé la mv-décomposition comme un nouvel outil théorique avec des propriétés algorithmiques intéressantes. Ces propriétés ont été employées pour élaborer un algorithme de diffusion à distance 2 en $O((\ln|Y|)^2)$ étapes pour une complexité en $O(m(\log n)^2)$, ce qui améliore le résultat de [CW91]. La mv-décomposition peut également être utilisée lorsque l'on recherche une solution de diffusion à distance 2 avec un nombre d'émissions minimal. Une perspective intéressante serait d'adapter la mv-décomposition pour le problème de diffusion à distance 3, notamment par l'utilisation d'une version pondérée sur les éléments de Y, et de généraliser cette approche pour le problème de diffusion dans un graphe quelconque.

Références

[ABNLP91] N. Alon, A. Bar-Noy, N. Linial, and D. Peleg. A lower bound for radio broadcast. In *J. Comput. Syst. Sci.*, volume 43, pages 290–298. Academic Press, Inc., 1991.

[CK85] I. Chlamtac and S. Kutten. On broadcasting in radio networks - Problem analysis and protocol design. In *IEEE Transactions on Communications*, volume 33, pages 1240–1246, 1985.

[CW91] I. Chlamtac and O. Weinstein. The wave expansion approach to broadcasting in multihop radio network. In *IEEE Transaction Communication*, volume 39, pages 426–433, 1991.

[Dar07] B. Darties. *Problèmes Algorithmiques et de Complexité dans les Réseaux sans-fil*. PhD thesis, LIRMM, Montpellier, France, December 2007.

[GM95] I. Gaber and Y. Mansour. Broadcast in radio networks. In *SODA '95 : Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 577–585, Philadelphia, PA, USA, 1995. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[KE05] G. Kortsarz and M. Elkin. An improved algorithm for radio broadcast (submitted), 2005.

[KP04] D. R. Kowalski and A. Pelc. Centralized deterministic broadcasting in undirected multi-hop radio networks. In *APPROX-RANDOM*, pages 171–182, 2004.