



Minimisation des branchements dans les arbres optiques sous contraintes sur le degré des noeuds

Massinissa Merabet

LIRMM

Université Montpellier 2

Montpellier, France

Email : massinissa.merabet@lirmm.fr

Sylvain Durand

LIRMM

Université Montpellier 3

Montpellier, France

Email : sylvain.durand@lirmm.fr

Miklos Molnar

LIRMM

Université Montpellier 2

Montpellier, France

Email : miklos.molnar@lirmm.fr

Résumé—Les besoins du routage multicast appliqué aux réseaux optiques remettent d'actualité les problèmes de recherche d'arbre de recouvrement. Dans les réseaux optiques, la possibilité de divisions du signal lumineux est limitée. Deux problèmes connus prennent en considération cette contrainte : la recherche d'arbres de recouvrement ayant un nombre minimum de sommets de branchement (sommets de degré strictement supérieur à 2) et la recherche d'arbres de recouvrement tels que la somme des degrés des sommets de branchement de l'arbre soit minimale. Il existe deux types de noeuds optiques : les noeuds équipés de splitters, capables de diviser le signal lumineux arrivant, et les noeuds sans splitters, incapable de diviser le signal. Les deux problèmes cités précédemment ne distinguent pas les deux types de noeuds. Dans cette étude nous traitons de la relation entre les deux problèmes, et nous proposons deux variantes de ces derniers, qui prennent en considération le type des noeuds optiques dans la construction de l'arbre de recouvrement.

I. INTRODUCTION

Le multiplexage en longueur d'onde (WDM) est une technique efficace de gestion de la bande passante des fibres optiques, afin de répondre à la croissance explosive de la demande de bande passante dans l'Internet [1]. La fonction du multicast est la transmission simultanée d'informations d'une source vers plusieurs destinations [1] en garantissant un bon rendement (duplication d'information uniquement lorsque cela est nécessaire). Les protocoles de routage multicast sont principalement basés sur la structure d'arbres de recouvrement. Quand on minimise le coût de la communication, la recherche d'un tel arbre est NP-complet [2] et est connu sous le nom de problème de Steiner. Cependant, le problème de Steiner classique ne permet pas de prendre en considération un certain nombre de contraintes indispensables à la réalisation du multicast sous les contraintes physiques du réseau. Afin que le routage soit performant, un sous ensemble de noeuds du réseau optique doit être équipé de splitters, ce qui permet de diviser le signal lumineux arrivant dans un noeud par le nombre de ces successeurs. Dans un réseau optique, les noeuds capables de diviser le signal lumineux sont qualifiés de multicast-capable (MC) [3]. Les noeuds optiques qui ne sont pas capables de diviser le signal lumineux ont une fonction de relais (ou/et destinataires), et sont qualifiés de multicast incapable (MI) [3]. Les réseaux optiques ont un nombre limité de noeuds MC, et ces noeuds doivent être positionnés de manière à ce que le routage multicast soit réalisable. D'autre part, le signal

lumineux doit être contrôlé en raison de la perte de puissance de celui-ci. En effet, si un signal lumineux est divisé en m copies, la puissance de signal de chaque copie sera réduite à une valeur inférieure ou égal à $1/m$ du signal original [4]. C'est pour cela qu'il est utile de chercher un arbre de recouvrement tel que le nombre de successeurs des noeuds soit limité. Pour mieux prendre en considération les contraintes réelles dans les réseaux optiques il faut trouver un arbre de recouvrement tel que la somme des degrés des noeuds divisant le signal lumineux dans l'arbre soit limitée.

Bien que les deux problèmes précédents visent la satisfaction de contraintes réelles, ils ne permettent pas de prendre en considération la capacité d'un noeud optique à diviser ou non le signal lumineux. Ils considèrent que tous les noeuds sont susceptibles d'être des noeuds de branchement (noeuds de degré strictement supérieur à 2) dans l'arbre de recouvrement. Dans les exemples vus dans la littérature, il existe un arbre de recouvrement optimal à la fois pour le premier et le deuxième problème. Dans cette étude, on propose la preuve que les deux problèmes précédents ne sont pas forcément liés et on introduit deux variantes des précédents problèmes, qui prennent en considération le type d'un noeud optique (MC ou MI), afin que tous les noeuds de branchement de l'arbre de recouvrement soient effectivement capables de diviser le signal lumineux.

II. DÉFINITIONS ET FORMULATIONS

La topologie d'un réseau optique est modélisée par un graphe $G = (V, E)$ connexe et non-orienté, où V est l'ensemble des sommets (correspondant aux noeuds du réseau) et E l'ensemble des arêtes (correspondant aux liens optiques). Pour chaque sommet $v \in V$ on note $d_G(v)$ le degré de v dans G . On note également $CC(G)$ le nombre de composantes connexes du graphe G , $MC(G)$ l'ensemble des sommets multicast-capables dans le graphe G et $MI(G)$ l'ensemble des sommets multicast-incapables. Soit $T = (V_T, E_T)$ un arbre de recouvrement de G . Un sommet $v \in V$ est un sommet de branchement de T ssi $d_T(v) > 2$. Soit $NB(T)$ l'ensemble des noeuds de branchement de l'arbre T . On note $s(T)$ le nombre de noeuds de branchement de l'arbre T ($s(T) = |NB(T)|$) et $q(T)$ la somme des degrés des noeuds de branchement de l'arbre T ($q(T) = \sum_{v \in NB(T)} d_T(v)$).

On note $s^*(G)$ le plus petit nombre de noeuds de branchement de tous les arbres de recouvrement du graphe G et $q^*(G)$ la plus petite somme des degrés des noeuds de branchement de tous les arbres de recouvrement du graphe G .

Les deux problèmes qui nous intéressent, ont été définis dans [5] comme suit :

Problème II.1. Le problème MBV (minimum branch vertices spanning tree) consiste à trouver un arbre de recouvrement T d'un graphe G ayant un nombre minimum de sommets de branchement.

Problème II.2. Le problème MDS (minimum degrees sum branch vertices spanning tree) consiste à trouver un arbre de recouvrement T d'un graphe G , tel que la somme des degrés des sommets de branchement de l'arbre T soit minimale.

Nous proposons deux variantes des problèmes MBV et MDS qui prennent en considération une contrainte supplémentaire qui est la capacité d'un noeud optique à diviser le signal lumineux. Ces deux nouveaux problèmes autorisent qu'un noeud du réseau soit noeud de branchement dans l'arbre de recouvrement correspondant si et seulement si ce noeud est multicast-capable.

Problème II.3. Le problème MBV-DC (minimum branch vertices spanning tree with degree constraints) consiste à trouver un arbre de recouvrement T d'un graphe G ayant un nombre minimum de sommets de branchement et tel que $NB(T) \subseteq MC(G)$.

Problème II.4. Le problème MDS-DC (minimum degrees sum of branch vertices spanning tree with degree constraints) consiste à trouver un arbre de recouvrement T d'un graphe G , tel que la somme des degrés des sommets de branchement de l'arbre T soit minimale et tel que $NB(T) \subseteq MC(G)$.

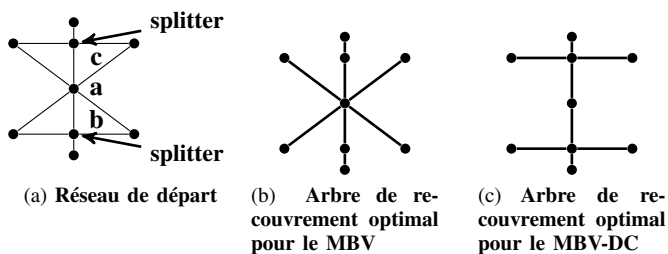


FIGURE 1: Exemple qui illustre la différence entre le MBV et le MBV-DC

Le réseau représenté dans la figure 1 contient deux noeuds multicast-capables : $MC(G) = \{b, c\}$. La solution optimale (figure 1(b)) pour le problème MBV ne prend pas en considération cette contrainte et choisit le noeud a comme noeud de branchement dans l'arbre de recouvrement correspondant. De cette façon, l'arbre n'est pas réalisable dans le réseau optique. Par contre la solution optimale (figure 1(c)) pour le problème MBV-DC est plus élevée (deux noeuds de branchement) mais réalisable.

III. RELATION ENTRE MBV ET MDS

Dans tous les exemples présentés dans la littérature, il existe un arbre de recouvrement à la fois optimal pour le MBV et pour le MDS. Cependant, le problème MBV et le problème MDS sont deux problèmes distincts. Dans cette section nous présentons un exemple pour lequel l'ensemble des arbres de recouvrement optimaux pour le MBV et l'ensemble des arbres de recouvrement optimaux pour le MDS sont disjoints.

Proposition III.1. Le problème MDS et MBV ne sont pas liés : Il existe un graphe G tel que :
 Quel que soit T un arbre de recouvrement de G alors :
 1) Si $s(T) = s^*(G)$ alors $q(T) \neq q^*(G)$,
 2) si $q(T) = q^*(G)$ alors $s(T) \neq s^*(G)$.

Preuve: La figure 2 présente un graphe G qui respecte les conditions de la proposition III.1 :

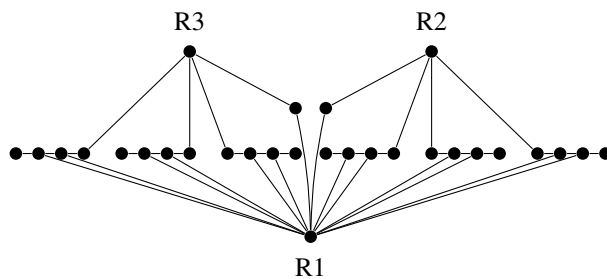


FIGURE 2: Instance prouvant la proposition III.1

Si le graphe G de la figure 2 est hamiltonien, alors il ne permettra pas de distinguer les deux solutions ($s^*(G) = q^*(G) = 0$). On doit d'abord prouver que le graphe G ne contient pas de chaîne hamiltonienne. Pour cela on utilise la proposition suivante :

Lemme III.2. [6] Soit $G(V, E)$ un graphe, si G a une chaîne hamiltonienne, alors $\forall S \subseteq V$, le graphe $(G - S)$ a au plus $|S| + 1$ composantes connexes.

Dans le graphe G , il suffit de prendre $S = \{R1, R2, R3\}$, pour conclure que G n'est pas hamiltonien.

Prouvons que $s^*(G) = 1$: Le graphe G n'est pas hamiltonien, alors $s^*(G) \geq 1$. L'arbre $T1$ de la figure 3 est un arbre de recouvrement du graphe G et $s(T1) = 1$. On a donc $s^*(G) = 1$.

Soit G' le sous graphe induit par $V - \{R1, R2, R3\}$. G' est composé de 8 composantes connexes. On en conclut que : quel que soit l'arbre de recouvrement T de G alors T contient au moins $R1$ ou $R2$ ou $R3$ comme noeud de branchement. Remarquons que quel que soit l'arbre de recouvrement T de

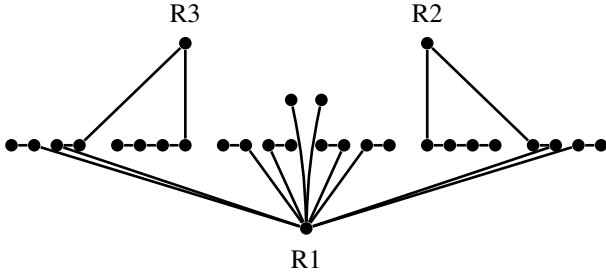


FIGURE 3: Arbre de recouvrement $T1$ du graphe G

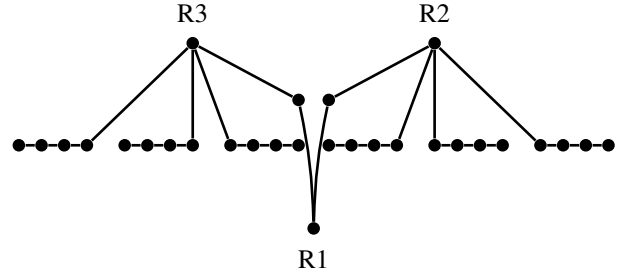


FIGURE 4: Arbre de recouvrement $T2$ du graphe G

G tel que $s(T) = s^*(G) = 1$ alors $R1$ est le seul noeud de branchement.

Prouvons que $q^*(G) = 8$: G n'est pas hamiltonien donc $q^*(G) \geq 3$. L'arbre de recouvrement $T2$ de la figure 4 est tel que $q(T2) = 8$, on a donc $8 \geq q^*(G) \geq 3$.

Supposons que $q^*(G) < 6$. Soit T un arbre de recouvrement de G tel que $q(T) < 6$. T a un seul noeud de branchement. Or, si $d_T(R1) < 6$ alors $CC(T) \geq 2$. Donc T a au moins deux noeuds de branchement, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $q^*(G) < 6$. Par conséquent, $8 \geq q^*(G) \geq 6$.

On sait à ce niveau que : il existe un arbre de recouvrement T de G tel $8 \geq q(T) \geq 6$ et $q(T) = q^*(G)$ et T contient 2 noeuds de branchement et au moins $R1$ ou $R2$ ou $R3$ sont des noeuds de branchement dans T

Si $R1$ est un noeud de branchement de T , alors il faut au moins deux autres noeuds de branchement pour que T soit connexe. Donc $R1$ n'est pas un noeud de branchement de T .

On sait que $d_G(R2) = 4$. Si $R2$ est un noeud de branchement dans T , alors Seul $R3$ a un degré suffisant dans G afin que T soit connexe ($R1$ éliminé). Donc $R2$ et $R3$ sont les seuls noeuds de branchement de l'arbre T

Quel que soit l'arbre de recouvrement T de G ayant $R3$ et $R2$ comme seuls noeuds de branchement, $d_T(R2) = d_G(R2) = 4$ et $d_T(R3) = d_G(R3) = 4$, donc $q^*(G) = 8$

Conclusion : Quel que soit T un arbre de recouvrement de G tel que $q(T) = q^*(G) = 8$ on a $s(T) > 2$, donc $s(T) \neq s^*(G)$. Quel que soit T un arbre de recouvrement de G tel que $s(T) = s^*(G) = 1$ on a $q(R1) > 8$, donc $q(T) \neq q^*(G)$.

■

IV. FORMULATION DU PLNE

Dans cette section nous reprenons de [5] les formulations PLNE des problèmes MBV et MDS et nous les modifions, afin qu'ils prennent en considération la capacité d'un noeud

optique à diviser le signal lumineux arrivant.

Afin de construire un arbre de recouvrement T de G , on envoie depuis une source arbitraire $S \in V$ une unité de flot vers chacun des autres noeuds $v \in V \setminus \{S\}$ du graphe G . Bien que le graphe G soit non-orienté, on définit deux variables pour chaque arête $e = \{u, v\} \in E : f_{uv}$ et f_{vu} , qui définissent respectivement le flot allant de u vers v et de v vers u le long de l'arête $\{u, v\}$. Pour chaque arête, on considère une variable de décision binaire x_e telle que $x_e = 1$ si l'arête e est dans T et $x_e = 0$ sinon. Enfin, pour chaque sommet $v \in V$, on a une variable de décision y_v telle que $y_v = 1$ si v est un noeud de branchement, et 0 sinon.

On note $\omega(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$, l'ensemble des voisins de v . La formulation mathématique du problème MBV présenté dans l'article [5] se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min s^* = \sum_{v \in V} y_v \quad (1a) \\ \sum_{e \in E} x_e = n - 1 \quad (1b) \\ \sum_{v \in \omega(S)} f_{Sv} - \sum_{v \in \omega(S)} f_{vS} = n - 1 \quad (1c) \\ \sum_{u \in \omega(v)} f_{vu} - \sum_{u \in \omega(v)} f_{uv} = -1, \quad \forall v \in V \setminus \{S\} \quad (1d) \\ f_{uv} \leq (n - 1)x_e, \quad \forall e = \{u, v\} \in E \quad (1e) \\ f_{vu} \leq (n - 1)x_e, \quad \forall e = \{u, v\} \in E \quad (1f) \\ \sum_{e=(u,v) \mid u \in \omega(v)} x_e - 2 \leq (n - 1)y_v, \quad \forall v \in V \quad (1g) \\ x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E \quad (1h) \\ y_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V \quad (1i) \\ f_{uv} \geq 0, \quad \forall e = \{u, v\} \in E \quad (1j) \\ f_{vu} \geq 0, \quad \forall e = \{u, v\} \in E \quad (1k) \end{array} \right.$$

La formulation mathématique du MDS proposée dans [5] est identique à celle du MBV, mis à part l'ajout d'une variable de décision qui représente le degré des noeuds de branchement de la solution :

$$z_v = \begin{cases} d_T(v), & \text{si } v \text{ est un noeud de branchement,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle mathématique du MDS vise à minimiser la fonction objective :

$$\min q^* = \sum_{v \in V} z_v$$

On ajoute aussi la contrainte suivante :

$$\sum_{e=(u,v) | u \in \omega(v)} x_e - 2 + y_v \leq z_v \quad \forall v \in V$$

Dans nos problèmes, nous voulons satisfaire les contraintes optiques imposées par la présence/absence des splitters dans les noeuds. La formulation mathématique du MBV-DC, resp. MDS-DC, est identique à celle du MBV, resp. MDS, mais il faut ajouter la contrainte suivante :

$$y_v = 0 \text{ si } v \notin MC(G)$$

Notons une différence importante entre les problèmes à analyser. Quel que soit le graphe connexe non-orienté en entrée des problèmes MBV et MDS, on a la garantie d'avoir une solution réalisable (tout graphe connexe admet un arbre de recouvrement). Par contre, l'existence d'une solution réalisable pour le MBV-DC et le MDS-DC dépend fortement du positionnement des splitters dans le réseau. Dans la figure 5, seul le sommet b est muni d'un splitter ($MC(G) = \{b\}$), cette instance ne permet pas d'avoir une solution réalisable.

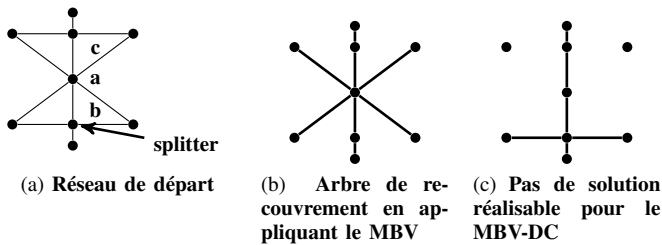
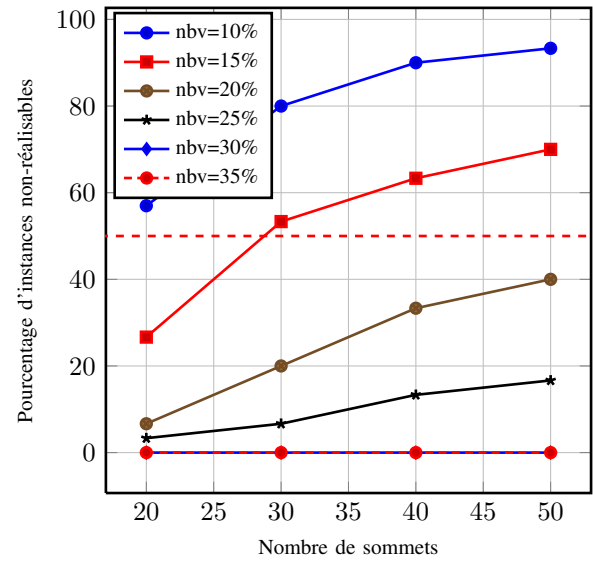


FIGURE 5: Exemple d'instance pour la quelle il n'existe pas de solutions réalisables du MBV-DC

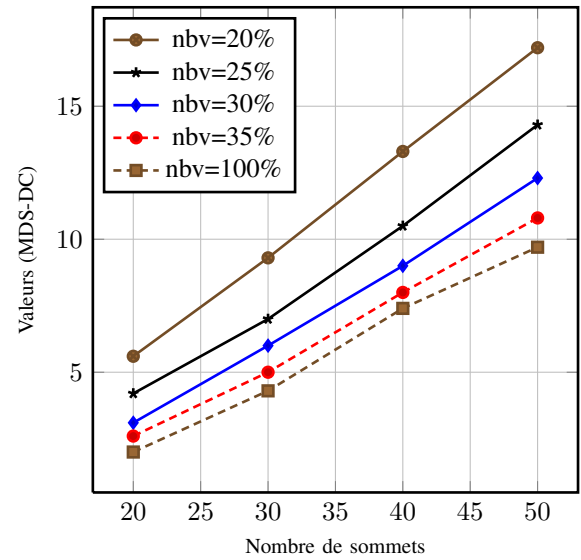
V. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous avons évalué la solution du problème MBV-DC (et MDS-DC) en fonction de la proportion nbv de noeuds munis de splitters dans le réseau. La solution est identique à celle du problème MBV (ou MDS) lorsque la proportion est de 100%.

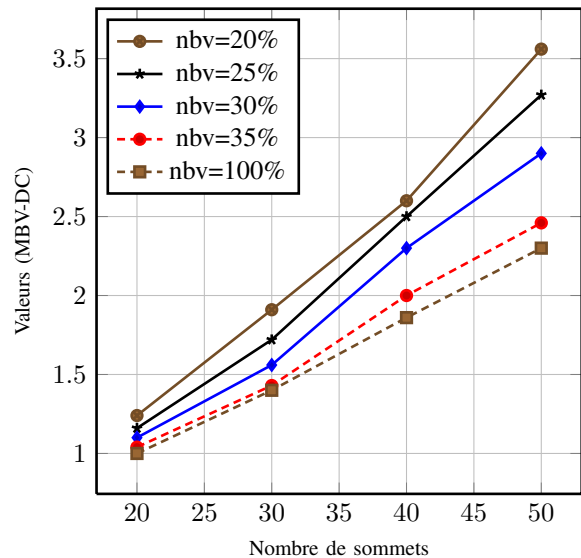
Les instances des problèmes MBV-DC et MDS-DC sont des graphes connexes non-orientés. Afin de produire un jeu de tests, il est indispensable de générer des graphes aléatoires. Pour ce faire, le générateur de graphes aléatoire NETGEN a été utilisé. NETGEN est un outil très puissant dédié particulièrement à la génération de réseaux de transports



(a) Proportion d'instances non-réalisables

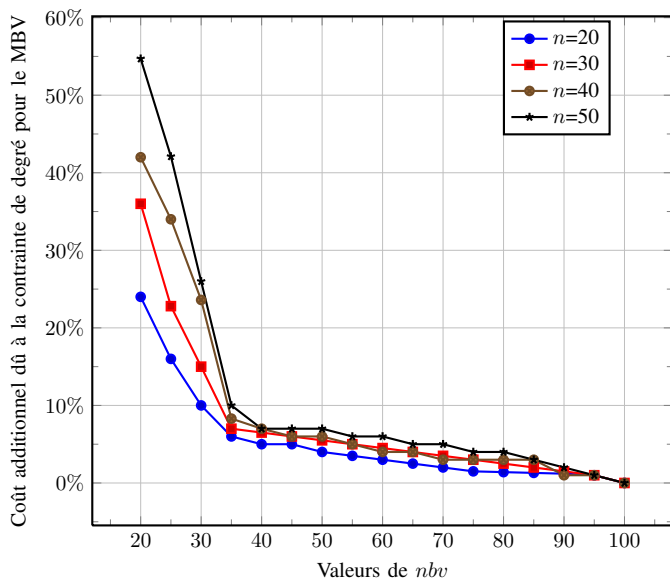


(b) Courbes des résultats pour le MDS-DC

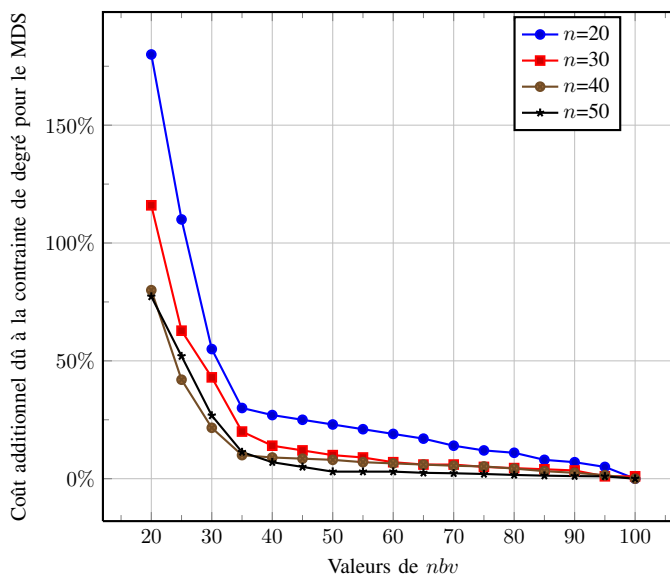


(c) Courbes des résultats pour le MBV-DC

FIGURE 6: Résultats du MBV-DC et du MDS-DC



(a) Variation du ratio entre MBV-DC et MBV



(b) Variation du ratio entre MDS-DC et MDS

FIGURE 7: Comparaison des solutions avec ou sans la contrainte sur les degrés

aléatoires [7]. Si les paramètres dédiés aux capacités des arcs sont mis à zéro, alors le générateur produira des graphes aléatoires non valués.

Afin de résoudre les problèmes MBV-DC et MDS-DC, nous avons utilisé le solveur de programme linéaire GLPK [8].

On considère cinq valeurs différentes pour le nombre de sommets du graphe aléatoire : $n \in \{20, 30, 40, 50\}$. Pour chaque valeur de n , on considère une seule valeur de densité (ratio entre le nombre d'arêtes et le nombre de sommets) $d = 1.5$. Nous avons choisi cette densité car elle permet

d'avoir un nombre conséquent de noeuds de branchement dans les arbres correspondants aux solutions des problèmes. Condition nécessaire pour que la comparaison entre le MBV, resp. MDS, et le MBV-DC, resp. MDS-DC soit pertinente. On considère sept valeurs du pourcentage du nombre de noeuds munis de splitters par rapport au nombre de noeuds total : $nbv \in \{10\%, 15\%, 20\%, 25\%, 30\%, 35\%, 100\%\}$. Notons que pour $nbv = 100\%$ le problème revient à résoudre MBV (ou MDS).

Un graphe aléatoire connexe avec un nombre de sommets fixé, et un pourcentage de noeuds munis de splitters fixé est appelé scénario. Afin d'avoir un jeu de test significatif, trente instances de chaque scénario sont générées.

Afin d'analyser les résultats de manière pertinente, il est impératif de prendre en considération le pourcentage d'instances non-réalisables pour un scénario donné. Remarquons que, si une instance n'est pas réalisable pour le MBV-DC alors elle n'est pas réalisable pour le MDS-DC, et réciproquement. Par conséquent, la proportion d'instances non-réalisables est la même pour les deux problèmes. On considère que si le pourcentage d'instances non-réalisables sur un scénario est strictement supérieur à 50% alors la valeur du MBV-DC et du MDS-DC sur ce scénario est non-significative. La figure 6(a) illustre la proportion d'instances non-réalisable pour le problème MBV-DC. Les courbes qui représentent $nbv = 10\%$ et $nbv = 15\%$ sont au dessus du seuil de 50%. On considère donc que les courbes des résultats du MBV-DC et du MDS-DC pour $nbv = 10\%$ et $nbv = 15\%$ ne sont pas significatives. C'est pour cela que ces valeurs n'ont pas été utilisées dans les figures 6(b) et 6(c).

Les figures 6(b) et 6(c) représentent les moyennes des solutions des k instances réalisables générées pour chaque scénario, tel que $k \leq 30$. On remarque que plus nbv est grand plus on s'approche de la solution du problème sans contraintes (MBV ou MDS), qui correspond à $nbv = 100\%$. Parallèlement à cela, plus nbv est grand plus le pourcentage d'instances non-réalisables diminue. On observe aussi que, à partir de $nbv = 35\%$, la solution du MBV-DC s'approche de manière significative de la solution du MBV. Pour $nbv \geq 30\%$, on remarque que le pourcentage des d'instances non-réalisables est égal à zéro.

Dans la figure 7, on montre l'influence de la contrainte de degré sur les deux problèmes étudiés. Le coût additionnel dû à la contrainte de degré concernant le MBV est donné pour différentes tailles de réseaux.

Le seuil $nbv = 35\%$ peut être considéré comme étant une borne (expérimentale) sur la contrainte des degrés des noeuds des problèmes MBV-DC et MDS-DC. À partir de $nbv = 35\%$, cette contrainte a peu d'impact sur la solution optimale de MBV-DC et de MDS-DC : lorsque plus de 35% des noeuds de degré strictement supérieur à 2 sont aléatoirement désignés comme étant des noeuds MC , le coût de la solution du MBV-DC est supérieur de moins de 10% au coût de

la solution du MBV. ce résultat est également vrai pour le problème MDS lorsque le réseau comporte plus de 40 noeuds.

L'intérêt de ce résultat en pratique est important : au delà de 35% de noeuds munis de splitters, la contrainte sur le nombre de noeuds munis de splitters influe peu sur la valeur de la solution optimale. Concrètement, grâce à cette borne on peut affirmer que dans un réseau optique, on peut positionner des splitters sur 35% des noeuds de degré strictement supérieur à 2, et avoir une grande probabilité d'assurer toutes les connections multicast du réseau (existence d'un arbre de recouvrement respectant les contraintes). Mais aussi, d'avoir une solution qui s'approche de manière significative de celle du problème MBV (qui suppose que 100% des noeuds sont munis de splitters).

Remarquons que pour le MBV-DC (et MDS-DC), la réalisabilité d'une instance ne peut cependant pas être garantie par la seule proportion de noeud MC , car il existe des instances non-réalisables pour lesquelles un seul noeud n'est pas muni de splitter (figure 8).

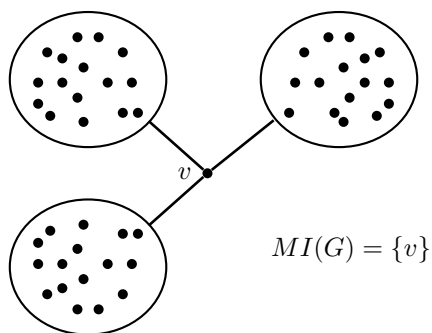


FIGURE 8: G contient 1 seul noeud multicast-incapable, mais pas de solution réalisable.

VI. CONCLUSION

Deux problèmes ont été à l'origine de notre étude. Le MBV, qui a pour intérêt pratique de minimiser le nombre de splitters dans un réseau optique, mais qui ne permet pas de borner le degré d'un noeud optique. Le problème MDS qui a pour intérêt pratique de minimiser la somme des degrés de ces derniers. Ces deux problèmes considèrent que tous les noeuds d'un réseau optique sont munis de splitters, et peuvent de ce fait effectuer des divisions de la lumière, ce qui est inexact en pratique. En effet dans un réseau optique seul un sous-ensemble des noeuds est muni de splitters. Par conséquent, seul les noeuds appartenant à ce sous-ensemble sont capables de dupliquer la lumière, et d'être des noeuds de branchement dans l'arbre de recouvrement correspondant au réseau.

Le respect de cette contrainte est primordial afin que ces problèmes théoriques reflètent au mieux la réalité des réseaux optiques. C'est pourquoi nous avons introduit deux variantes des deux problèmes (les problèmes MBV-DC et MDS-DC)

qui prennent en considération cette contrainte dans la construction de l'arbre de recouvrement. Suite à la résolution de ces problèmes par la programmation linéaire en nombres entiers, et à des jeux de tests sur des graphes aléatoires, nous avons trouvé une borne supérieure (expérimentale) sur le nombre de noeuds à munir de splitters dans un réseau optique. À partir de 35% de noeuds munis de splitters, la contrainte sur le nombre de noeuds munis de splitters influence peu l'arbre de recouvrement optimal correspondant. En effet, au delà de ce seuil, le coût additionnel dû à la contrainte de degré est inférieur à 10% pour le problème MBV-DC. Ce résultat est également vrai pour le problème MDS-DC pour des réseaux de plus de 40 noeuds.

RÉFÉRENCES

- [1] J. He, S.-H. G. Chan, and D. H. K. Tsang, "Multicasting in wdm networks," *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, pp. 2–20, 2002.
- [2] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA : W. H. Freeman & Co, 1979.
- [3] R. Malli, X. Zhang, and C. Qiao, "Benefits of multicasting in all-optical networks," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, ser. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, J. M. Senior & C. Qiao, Ed., vol. 3531, Oct. 1998, pp. 209–220.
- [4] M. Ali and J. S. Deogun, "Power-efficient design of multicast wavelength-routed networks," in *IEEE Journal of Selected areas in communication*, 2000, pp. 1852–1862.
- [5] R. Cerulli, M. Gentili, and A. Iossa, "Bounded-degree spanning tree problems : models and new algorithms," *Comput. Optim. Appl.*, vol. 42, pp. 353–370, Avril 2009.
- [6] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*. University of Illinois-Urbana : Prentice-Hall, 1996.
- [7] D. Klingman, A. Napier, and J. Stutz, "A program for generating large scale capacitated assignment, transportation, and minimum cost flow network problems," *management science*, vol. 20, no. 5, pp. 814–821, 1974.
- [8] A. O. Makhorin, *GNU Linear Programming Kit (GLPK) v 4.38*, gnu project ed., Mai 2009.
- [9] L. Gargano, P. Hell, L. Stacho, and U. Vaccaro, "Spanning trees with bounded number of branch vertices," in *Proceedings of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, ser. ICALP '02. London, UK, UK : Springer-Verlag, 2002, pp. 355–365.