



# Diffusion dans les Réseaux Sans-Fil à Longueur d'Onde Unique

Benoit Darties

► **To cite this version:**

Benoit Darties. Diffusion dans les Réseaux Sans-Fil à Longueur d'Onde Unique. [Research Report] 05013, LIRMM. 2005. <lirmm-00106679>

**HAL Id: lirmm-00106679**

**<https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00106679>**

Submitted on 16 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Diffusion dans les réseaux sans-fil à longueur d'onde unique: rapport de recherche 2005

Benoit Darties

7 février 2005

## 1 Introduction

Une des principales caractéristiques des réseaux sans-fil, par rapport aux réseaux filaires, est qu'à un instant donné un nœud ne peut recevoir un message que d'un seul de ses voisins. Si deux ou plusieurs de ses voisins émettent en même temps, il ne recevra correctement aucun des messages transmis (on parle de transmissions brouillées). Réaliser la diffusion d'un message d'une source unique vers l'ensemble des nœuds s'opère efficacement dans les réseaux filaires par inondation [DM78]. Cette technique génère énormément de brouillage dans les réseaux sans-fil. Chaque émetteur est physiquement incapable de détecter si le message est bien arrivé à son destinataire. Il faut alors s'appuyer sur des protocoles coûteux nécessitant accusés de réceptions : ce qui entretient le brouillage ! Supposant la topologie connue par un superviseur, l'objet de ce travail est de mettre en œuvre une diffusion broadcast d'un message émis depuis un nœud unique au moyen de différents outils et sous différentes hypothèses de diffusion, en employant un protocole de diffusion sans accusé de réception. Les objectifs sont essentiellement la minimisation du temps de diffusion, et la minimisation de l'énergie consommée lors d'une diffusion. Nous présenterons une formulation originale de ces différents problèmes en définissant en particulier les différents contextes de diffusion étudiés. Nous nous intéresserons ensuite à la complexité du problème de la minimisation des coûts du temps de diffusion dans ces différents contextes. Nous terminerons par des résultats que nous avons obtenus sur des topologies particulières, comme le tore ou la grille.

## 2 Objet du travail

### 2.1 Contextes de diffusion

Le réseau radio est modélisé par un graphe non orienté  $G = (V, E)$ , dans lequel les sommets de  $V$  sont les nœuds du réseau, et une arête existe entre deux nœuds s'ils sont à portée d'émission l'un de l'autre. Le message à diffuser est émis depuis une source unique  $s$ . Pour la suite nous appellerons « transmetteurs » l'ensemble  $T$  des nœuds qui rediffusent le message, et « récepteurs » l'ensemble  $R$  des nœuds qui se contentent de recevoir le message.

#### 2.1.1 modèle de communication

Nous introduisons le vocabulaire suivant pour caractériser l'occurrence des émissions :

- **Un modèle de communication synchrone** est un modèle dans lequel le temps est divisé en étapes de mêmes durées : les émissions se font au début d'une étape, et parviennent à destination avant la fin de celle-ci. Le traitement du message s'effectue dans la même étape : un nœud qui reçoit le message à l'étape  $k$  peut le retransmettre dès l'étape  $k + 1$ .
- **Un modèle de communication asynchrone** est un modèle dans lequel chaque réémission a lieu au terme d'un délai de traitement non borné, ce qui rend impossible un découpage temporel en étapes.

### 2.1.2 Organisation de la propagation du message

La propagation du message dans le réseau peut être contrôlée en définissant pour chaque nœud un sous-ensemble de ses voisins, nommé ensemble de pères, desquels il peut recevoir le message uniquement. Si un nœud reçoit un message de la part d'un autre nœud, le message est ignoré. Recourir à une telle organisation permet de lier des émissions par des relations de causalité, et prévient des brouillages. La diffusion suit alors l'une des organisations suivantes :

- **Dans une organisation neutre**, l'ensemble des pères de chaque nœud est son voisinage. Chaque nœud accepte le premier message qui lui parvient correctement, quel qu'en soit son émetteur.
- **Dans une organisation en arbre complet**, chaque nœud possède un père unique. La structure engendrée par les relations de paternité entre nœuds est une arborescence recouvrant le graphe du réseau, enracinée en la source  $s$  du message.
- **Dans une organisation en arbre partiel**, chaque nœud transmetteur ne possède qu'un seul père. chaque nœud récepteur possède son voisinage comme ensemble des pères, et accepte donc le premier message qui lui parvient correctement. La structure engendrée par les relations de paternité entre nœuds transmetteurs est une arborescence dominant le graphe du réseau, enracinée en la source  $s$  du message.
- **Dans une organisation en maillage**, l'ensemble de pères d'un nœud est un sous-ensemble de son voisinage. Il s'agit du cas général dans lequel sont englobés les 3 cas précédents.

Ces organisations sont simple à mettre en œuvre : il suffit que chaque nœud connaisse l'ensemble de ses pères et que chaque transmetteur signe son message lors d'une émission.

### 2.1.3 Stratégies de réémission

Chaque nœud transmetteur prend seulement en compte la première réception réussie. Plusieurs stratégies de réémission sont alors envisageables :

- **Stratégie de base** : Chaque nœud réemet le message une et une seule fois, immédiatement après la première réception valide (ou à l'étape suivante dans un modèle synchrone).
- **Stratégie de réémissions multiples** : chaque nœud peut réémettre consécutivement  $j$  fois le message.
- **Stratégie de temporisation** (modèle synchrone) : Chaque nœud peut temporiser pendant  $k$  étapes avant d'effectuer la réémission du message.
- **Stratégie de temporisation et réémissions multiples** (modèle synchrone) : Chaque nœud peut réémettre  $j$  fois le message, et temporiser pendant  $k_j$  étapes avant chaque réémission.

### 2.1.4 Notations

Différentes stratégies et hypothèses peuvent être envisagées pour diffuser un message dans un réseau sans-fil. À chaque problème considéré, nous associons un **contexte de diffusion**, qui spécifie le modèle de communication, l'organisation de la propagation du message, et la stratégie d'émission considérés. Ce contexte est défini par un triplet  $(M, O, S)$ ; le domaine de chaque paramètre est présenté ci-dessous :

<b>Modèle de communication :</b> - A : Modèle Asynchrone - S : Modèle Synchrone	<b>Organisation de la propagation :</b> - * : Organisation Neutre - $A_{Complett}$ : Arbre complet - $A_{Partiel}$ : Arbre partiel - M : Maillage	<b>Stratégie de diffusion :</b> - $\emptyset$ : Stratégie de base - RM : Réémissions Multiples - Tmp : Temporisation - RM-Tmp : Réémissions Multiples et temporisation.
---------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 2.2 Objectifs

### 2.2.1 Nature des solutions

Nous étudions le problème de la diffusion dans les réseaux sans-fil dans différents contextes de diffusion, et sur différentes topologies de réseaux. Le type de solution de ces problèmes diffère suivant le contexte :

1. Dans des contextes avec organisation neutre et stratégie de base, une solution de diffusion est une bipartition  $\{T, R\}$  de  $S$  en sommets transmetteurs et récepteurs permettant la diffusion du message.
2. Dans des stratégies faisant intervenir temporisations et réémissions multiples, outre la bipartition  $\{T, R\}$ , il faut connaître un ordonnancement des émissions pour chaque nœud transmetteur.
3. Dans les contextes dont l'organisation suit un arbre de diffusion complet (resp. partiel), la solution du problème de diffusion est un arbre recouvrant (resp. dominant) le graphe du réseau et présentant certaines caractéristiques.

Dans ce travail, l'objectif consiste à réaliser une diffusion dans chaque contexte, en minimisant les coûts de diffusion suivants :

1. Coût en temps : Proportionnel au nombre d'étapes dans un contexte synchrone, ou à la profondeur de l'arbre de diffusion dans les contextes faisant intervenir ce dernier.
2. Coût en énergie : Proportionnel au nombre de nœuds transmetteurs dans la solution de diffusion.

### 2.2.2 Étude menée

Notre étude se découpe en plusieurs axes :

1. **Existence de solution** : Dans quels contextes existe-t-il toujours une solution qui permette une diffusion, même mauvaise en termes de coûts ? S'il existe des instances insatisfiables, sur quelles topologies peut-on toujours trouver une solution ?
2. **Classe de complexité** : Quels sont les classes de complexité des problèmes de minimisation des coûts par contexte ? Peut-on mettre en place des algorithmes d'approximation ? Quel(s) paramètre(s) sur la topologie font exploser la complexité des problèmes ?
3. **Dominance des stratégies** : Quelles stratégies sont dominantes, quelles stratégies sont incomparables ?

### 2.2.3 Travaux antérieurs

Certains problèmes, comme le problème consistant à effectuer une diffusion dans un contexte  $(S, *, RM-Tmp)$  en un temps de diffusion minimal, sont largement étudiés. Chlamtac et Kutten [CK85] ont montré que ce problème était  $\mathcal{NP}$ -Complet. Chlamtac et Weinstein [CW91] ont proposé un algorithme déterministe polynomial en  $\log^2 n$  pour ce problème dans le cas des graphes bipartis. Cette borne est atteinte pour certains graphes [ABNLP91]. Un algorithme est proposé en [CK87], qui permet de construire en temps linéaire une solution de diffusion dans laquelle le nombre d'étapes de diffusion est borné par  $\min\{\Delta + 2, 1 + 2\sqrt{|E|}\}$  ( où  $\Delta$  est le degré maximum du graphe et  $E$  l'ensemble de ses arêtes).

D'autres travaux ont été menés sur ce problème, avec la contrainte supplémentaire que les nœuds ne connaissent pas la topologie du réseau, pas même leurs propres voisins. Il en résulte des algorithmes déterministes polynomial dont le temps d'exécution est en  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  dans [CGR02], et en  $\mathcal{O}(n \log n \log D)$  dans [KP05]. La meilleure borne inférieure connue est en  $\Omega(n \log D)$  [CMS03].

### 3 Analyse de contextes de diffusion

#### 3.1 Diffusion dans un contexte $(S, *, \emptyset)$

Dans un contexte  $(S, *, \emptyset)$  la solution du problème de diffusion se présente sous la forme d'une bipartition  $\{T, R\}$  des sommets en transmetteurs et récepteurs. Un sommet transmetteur rediffuse ici le message à l'étape  $i$  si et seulement s'il a reçu correctement le message pour la première fois à l'étape  $i - 1$ . Ceci implique une organisation implicite des transmetteurs dans la bipartition considérée. Le problème  $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps consiste à minimiser le temps de diffusion dans ce contexte. Sa formalisation est définie comme suit :

**Contexte** : Modèle synchrone, organisation neutre, stratégie de base  
**Donnée** : Un graphe non orienté  $G = (V, E)$ , un sommet  $s \in V$   
**Question** : Existe-t-il une bipartition  $\{T, R\}$  de  $V$ , telle qu'il existe une  $k$ -partition  $\{T_0, T_1, \dots, T_k\}$  de  $T$  satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $T_0 = \{s\}$
2.  $\forall j > 0, u \in T_j \Rightarrow |N(u) \cap T_{j-1}| = 1 \wedge \forall i < j - 1, |N(u) \cap T_i| \neq 1$
3.  $\forall u \in R, \exists i, |N(u) \cap T_i| = 1$

et telle que  $k$  soit minimal ?

**Problème de décision 3.1:** Le problème  $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps

**Théorème 1** *Le problème  $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps est  $\mathcal{NP}$ -Complet même sur des graphes bipartis.*

**Preuve:** Nous prouvons la réduction suivante :

Exact Set Cover  $\ll_K$   $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps

On considère une instance  $I$  du problème Exact Set Cover, composée d'une collection  $C = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  de sous-ensembles d'un ensemble  $S$ . On construit le graphe biparti  $G = (X, Y, E)$  en appliquant la transformation polynomiale suivante :

1. Pour chaque ensemble  $S_i$  de la collection, on crée un sommet  $x_i$  dans  $X$ .
2. Pour chaque élément  $y_i$  de  $S$ , on crée un sommet  $y_i$  dans  $Y$ .
3. On ajoute une arête  $\{x_i, y_i\}$  à  $E$  si et seulement si  $y_i \in S_i$ .
4. On ajoute un sommet  $s$  dans  $Y$  ainsi que les arêtes  $\{s, x_i\}$  dans  $E$  pour tout  $i$ .

Dans le graphe obtenu, nous considérons le problème  $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps, dans lequel le sommet  $s$  est porteur du message. Dès l'émission de  $s$ , tous les sommets de  $X$  reçoivent correctement le message. S'il existe une diffusion en 2 étapes sur ce graphe, c'est qu'il existe un sous-ensemble  $T_1$  de  $X$  tel que tous les sommets de  $Y$  n'aient qu'un voisin dans  $T_1$ . Cela revient à résoudre le problème Exact Set Cover sur l'instance  $I$ , en sélectionnant les sous-ensembles de  $C$  correspondants aux éléments de  $T_1$ .

Réciproquement, si le problème Exact Set Cover est satisfiable sur une instance  $I$ , on en déduit une solution au problème  $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps en 2 étapes dans l'instance construite selon la transformation décrite.

Si une solution est calculable en un temps polynomial, il est également possible de répondre au problème Exact Set Cover en un temps polynomial. Exact Set Cover étant connu pour être  $\mathcal{NP}$ -Complet, on en conclut que le problème  $(S, *, \emptyset)$ -DiffMinTps est  $\mathcal{NP}$ -Complet.  $\square$

### 3.2 Diffusion dans un contexte $(S, *, \text{Tmp})$

Effectuer une diffusion dans un contexte  $(S, *, \text{Tmp})$  consiste à déterminer à chaque étape  $i$  l'ensemble  $T_i$  des nœuds qui doivent réémettre le message à leur voisinage. À l'étape 0, seul le nœud  $s$  diffuse le message. Chaque nœud transmetteur ne peut diffuser qu'une seule fois le message. La solution du problème de diffusion se présente alors sous la forme d'une  $k$ -partition  $\{T_0, T_1, T_2, \dots, T_k\}$  de l'ensemble  $T$  des transmetteurs dans la solution. Un nœud qui émet un message à une étape  $k$  doit évidemment avoir reçu ce dernier à une étape antérieure.  $k$  représente le nombre d'étapes. Le problème de la minimisation des coûts en temps dans ce contexte, que nous noterons  $(S, *, \text{Tmp})$ -DiffMinTps, se formalise alors de la façon suivante :

**Contexte** : Modèle synchrone, organisation neutre, stratégie de temporisation  
**Donnée** : Un graphe non orienté  $G = (V, E)$ , un sommet  $s \in V$   
**Question** : Existe-t-il une  $k$ -partition  $\{T_0, T_1, \dots, T_k\}$  d'un sous-ensemble  $T \subseteq V$  telle que :

1.  $T_0 = \{s\}$
2.  $\forall j > 0, u \in T_j \Rightarrow \exists i < j, |N(u) \cap T_i| = 1$
3.  $\forall u \in \{V - T\}, \exists i, |N(u) \cap T_i| = 1$

et telle que  $k$  soit minimal ?

**Problème de décision 3.2:** Le problème  $(S, *, \text{Tmp})$ -DiffMinTps

**Théorème 2** *Le problème  $(S, *, \text{Tmp})$ -DiffMinTps est NP-Complet et non-APX même sur des graphes bipartis.*

**Preuve:** Notre preuve est basée sur la réduction suivante :

coloration minimale de sommets  $\ll_K (S, *, \text{Tmp})$ -DiffMinTps

On considère le graphe  $G_c = (V_c, E_c)$  d'une instance  $I$  du problème de coloration minimale de sommets. On construit une instance du problème  $(S, *, \text{Tmp})$ -diffMinTps avec comme donnée un graphe biparti  $G=(X, Y, E)$ , selon la transformation polynomiale suivante :

1. Pour tout  $x_i$  de  $V_c$ , on crée un sommet  $x_i$  dans  $X$ , un sommet  $y_i$  dans  $Y$  et on ajoute  $\{x_i, y_i\}$  à  $E$ .
2. Pour tout  $e_{\{i,j\}}$  de  $E_c$ , on crée un sommet  $y_{\{i,j\}}$  dans  $Y$  et ajoute les arêtes  $\{x_i, y_{\{i,j\}}\}$  et  $\{x_j, y_{\{i,j\}}\}$  à  $E$ .
3. On ajoute un sommet  $s$  dans  $Y$  ainsi que les arêtes  $\{s, x_i\}$  dans  $E$ , pour tout  $i$ .

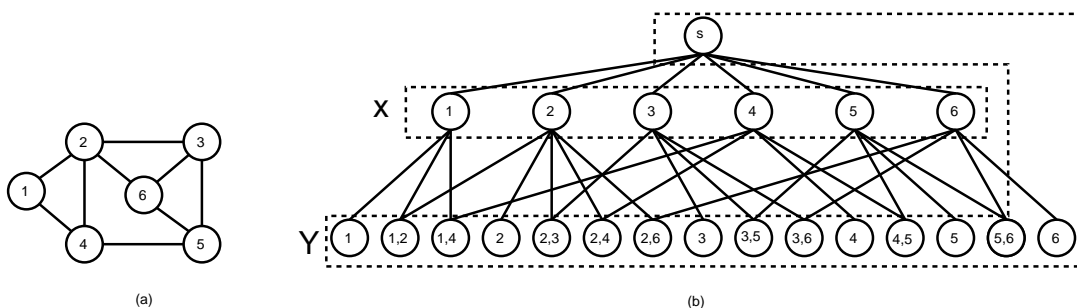


FIG. 1 – Réduction coloration vers  $(S, *, \text{Tmp})$ -diffMinTps

La figure 1 présente un exemple de cette transformation. Dans le graphe obtenu, nous considérons le problème  $(S, *, \text{Tmp})$ -DiffMinTps, dans lequel le sommet  $s$  est porteur du message. Dès l'émission de  $s$ , tous les sommets de  $X$  reçoivent correctement le message. Chaque sommet de  $X$

est obligatoirement transmetteur, puisqu'il possède un sommet pendant dans son voisinage. Aucun sommet de  $Y$  (hormis la source  $s$ ) n'a besoin d'être transmetteur, vu que leur voisinage inclus dans  $X$  a récupéré le message dès la première émission de  $s$ . De plus si deux sommets  $x_i$  et  $x_j$  de  $X$  ont un voisin commun  $y_{\{i,j\}}$  autre que  $s$ , alors ces derniers ne peuvent pas émettre en même temps, sinon  $y_{\{i,j\}}$  ne recevra jamais le message.

Deux sommets  $x_i$  et  $x_j$  de  $X$  qui peuvent émettre en même temps n'ont alors pas d'autre voisin commun que  $s$ . Ceci implique que leurs sommets correspondants  $x_i$  et  $x_j$  dans le graphe  $G_c$  ne pas reliés par une arête. Ainsi, dans une solution de diffusion en  $k$  étapes sur le graphe  $G$ , on obtient une  $k$ -partition  $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$  de  $X$ , telle que chaque ensemble  $T_i$  forme un stable sur le graphe  $G_c$ . En associant une même couleur aux sommets d'un même ensemble  $T_i$ , on obtient une coloration sur  $G_c$ . À chaque étape  $i$ , les sommets de l'ensemble  $T_i$  rediffusent le message. S'il existe une solution de cardinal  $k$  pour le problème  $(S, *, \text{Tmp})\text{-DiffMinTps}$ , alors il en existe une de même cardinal pour le problème.

Réciproquement, toute solution de cardinal  $k$  du problème de coloration donne une partition des sommets de  $T$  permettant la diffusion en  $k$  étapes.

Le problème de la coloration étant  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX, on en conclut que minimiser le temps de diffusion dans un contexte  $(S, *, \text{Tmp})$  est aussi un problème  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX.  $\square$

Il est toujours possible de trouver une solution de diffusion dans ce contexte, quel que soit le graphe : À chaque étape  $i$ , un ensemble  $P_i$  de sommets possède le message. On sélectionne un élément  $u$  de cet ensemble qui n'a pas encore effectué de réémission, et dont le voisinage n'est pas inclus dans  $P_i$ . On fait émettre le sommet  $u$  à l'étape  $i + 1$ , et on ajoute son voisinage à  $P_{i+1}$ . On répète l'opération jusqu'à ce que  $P$  contienne tous les sommets du graphe. Cette stratégie est cependant très coûteuse en temps.

### 3.3 Diffusion dans un contexte $(S, *, \text{RM})$

Dans un contexte  $(S, *, \text{RM})$ , effectuer une diffusion consiste à déterminer à chaque étape quels nœuds doivent réémettre le message. Les nœuds peuvent ici émettre plusieurs fois consécutives le message, immédiatement après réception de ce dernier. Si un nœud réémet aux étapes  $i$  et  $k$ , alors il émet aussi aux étapes  $j$ , pour tout  $i < j < k$  (il n'y a ici pas de temporisation possible entre deux réémissions). Le problème consistant à minimiser le temps de diffusion se formalise comme suit :

<b>Contexte</b>	: Modèle synchrone, organisation neutre, réémissions multiples
<b>Donnée</b>	: Un graphe non orienté $G = (V, E)$ . Un sommet $s \in V$
<b>Question</b>	: Existe-t-il une collection $C = \{T_0, T_1, \dots, T_k\}$ de sous-ensembles de $V$ , telle que : <ul style="list-style-type: none"> <li>1. <math>T_0 = \{s\}</math></li> <li>2. <math>\forall i &lt; j &lt; k, u \in T_i \wedge u \in T_k \Rightarrow u \in T_j</math></li> <li>3. <math>\forall j &gt; 0, u \in T_j \wedge u \notin T_{j-1}, \Rightarrow ( N(u) \cap T_{j-1}  = 1) \wedge (\forall i &lt; j - 1,  N(u) \cap T_i  \neq 1)</math></li> <li>4. <math>\forall u \in V - \bigcup_{0 \leq i \leq k} T_i, \exists j,  N(u) \cap T_j  = 1</math></li> </ul> et telle que $k$ soit minimal ?

**Problème de décision 3.3:** Le problème  $(S, *, \text{RM})\text{-DiffMinTps}$

**Théorème 3** *Le problème  $(S, *, \text{RM})\text{-DiffMinTps}$  est  $\mathcal{NP}$ -Complet même sur des graphes bipartis.*

**Preuve:** Nous montrons la réduction suivante :

Exact Set Cover  $\ll_{\mathcal{K}}$  (S,\*,RM)-DiffMinTps

On considère une instance  $I$  du problème Exact Set Cover, composée d'une collection  $C = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  de sous-ensembles d'un ensemble  $S$ . On construit le graphe biparti  $G = (X, Y, E)$  en appliquant la transformation polynomiale suivante :

1. Pour chaque ensemble  $S_i$  de la collection, on crée un sommet  $x_i$  dans  $X$ , et un sommet  $x'_i$  dans  $Y$ . On ajoute l'arête  $\{x_i, x'_i\}$  à  $E$ .
2. Pour chaque élément  $y_i$  de  $S$ , on crée un sommet  $y_i$  dans  $Y$ .
3. On ajoute une arête  $\{x_i, y_i\}$  à  $E$  si et seulement si  $y_i \in S_i$ .
4. On ajoute un sommet  $s$  dans  $Y$  ainsi que les arêtes  $\{s, x_i\}, \forall i$  dans  $E$ .

Dans le graphe obtenu, nous considérons le problème (S,\*,RM)-DiffMinTps, dans lequel le sommet  $s$  est porteur du message. Dès l'émission de  $s$  à l'étape 0, tous les sommets de  $X$  reçoivent correctement le message. Chaque sommet  $x_i \in X$  possède comme voisin un sommet pendant  $x'_i$ . Tous les sommets de  $X$  doivent donc rediffuser le message à l'étape 1 pour couvrir l'ensemble des  $x'_i$ . Aucun sommet  $y_i$  avec au moins 2 voisins dans  $X$  n'a pu recevoir le message. Tous les sommets de  $Y$  avec un seul voisin dans  $X$  ont reçu correctement le message. S'il existe une diffusion en trois étapes sur ce graphe, c'est qu'il existe un sous-ensemble  $T_2$  de  $X$  tel que tous les sommets  $y_i$  restants n'aient qu'un voisin dans  $T_2$ . Cela revient à résoudre le problème Exact Set Cover sur l'instance  $I$ , en sélectionnant les sous-ensembles de  $C$  correspondants aux éléments de  $T_2$ . On retombe ici sur une configuration analogue à celle décrite dans la preuve du théorème 1, dans un contexte (S,\*, $\emptyset$ )-DiffMinTps.

Réciproquement, si le problème Exact-Set-Cover admet une solution, il est possible de faire la diffusion en 3 étapes en choisissant dans  $T_2$  les sommets correspondants

Si une solution est calculable en un temps polynomial, il est également possible de répondre au problème Exact Set Cover en un temps polynomial. Exact Set Cover étant connu pour être  $\mathcal{NP}$ -Complet, on en conclut que le problème (S,\*, $\emptyset$ )-DiffMinTps est  $\mathcal{NP}$ -Complet. □

### 3.4 Diffusion dans un contexte (S, $A_{complet}$ , $\emptyset$ )

Dans le contexte (S, $A_{complet}$ , $\emptyset$ ), nous utilisons un arbre de diffusion recouvrant le graphe pour organiser la propagation du message. Chaque sommet ne peut recevoir le message que d'un seul sommet précis. Dans l'arbre de diffusion, tout nœud interne rediffuse le message à l'étape immédiatement consécutive à la réception du message. Pour chaque nœud  $i$ , nous appelons  $pere(i)$  son père dans l'arbre. Pour tout sommet  $i$ , l'émission de  $pere(i)$  ne doit pas être brouillée par un autre sommet voisin de  $i$ . On note  $depth(i)$  la profondeur du nœud  $i$  dans l'arbre de diffusion enraciné en  $s$ . Minimiser le temps de diffusion dans ce contexte consiste à résoudre le problème (S, $A_{complet}$ , $\emptyset$ )-DiffMinTps suivant :

**Contexte** : Modèle synchrone, organisation arbre complet, stratégie de base  
**Donnée** : Un graphe non orienté  $G = (V, E)$ , un sommet  $s \in V$   
**Question** : Existe-t-il un arbre enraciné en  $s$  recouvrant le graphe  $G$  tel que :  
 $\forall u \in \{V - s\}, \forall v \in \{N(u) - pere(u)\} \wedge \exists t, v = pere(t), depth(pere(u)) \neq depth(v)$  et qui soit de profondeur minimale ?

**Problème de décision 3.4:** Le problème (S, $A_{complet}$ , $\emptyset$ )-DiffMinTps

**Théorème 4** *Le problème (S, $A_{complet}$ , $\emptyset$ )-DiffMinTps est  $\mathcal{NP}$ -Complet même sur des graphes bipartis. Il est  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX dans les graphes triangulés.*



**Preuve:** On peut reprendre la réduction proposée dans la preuve du théorème 1, et montrer que :

$$\text{Exact Set Cover} \ll_K (\mathcal{S}, *, \emptyset)\text{-DiffMinTps}$$

La solution en 2 étapes dans cette preuve peut être associée à un arbre recouvrant de profondeur 2. On en déduit que le problème  $(\mathcal{S}, *, A_{\text{complet}})\text{-DiffMinTps}$  est  $\mathcal{NP}$ -Complet même dans les graphes bipartis. Mais ceci ne permet cependant pas de conclure à la non approximabilité à une constante près dans le cas général. Nous présentons alors une autre réduction :

$$\text{Coloration minimale de sommets} \ll_K (\mathcal{S}, A_{\text{complet}}, \emptyset)\text{-DiffMinTps}$$

On considère une instance  $I$  du problème de coloration de sommets, composée d'un graphe  $G_c = (V_c, E_c)$ . On construit à partir de cette dernière une instance du problème  $(\mathcal{S}, *, \text{Tmp})\text{-diffMinTps}$  avec comme donnée un graphe  $G = (V, E)$ , construit selon la transformation polynomiale suivante :

1. Pour tout  $x_i \in V_c$ , on crée deux sommets  $x_i$  et  $y_i$  dans  $V$ . On ajoute  $\{x_i, y_i\}$  à  $E$ .
2. Pour tout  $i \neq j$  on rajoute toutes les arêtes  $\{x_i, x_j\}$  à  $E$ .
3. Pour tout  $e_{\{i,j\}} \in E_c$ , on crée un sommet  $y_{\{i,j\}}$  dans  $V$  et on ajoute les arêtes  $(x_i, y_{\{i,j\}})$  et  $(x_j, y_{\{i,j\}})$  à  $E$ .
4. On ajoute un sommet  $s$  dans  $X$  ainsi que les arêtes  $\{s, x_i\}, \forall i$ , dans  $E$ .

La figure 2 présente un exemple de cette transformation. La transformation est très proche

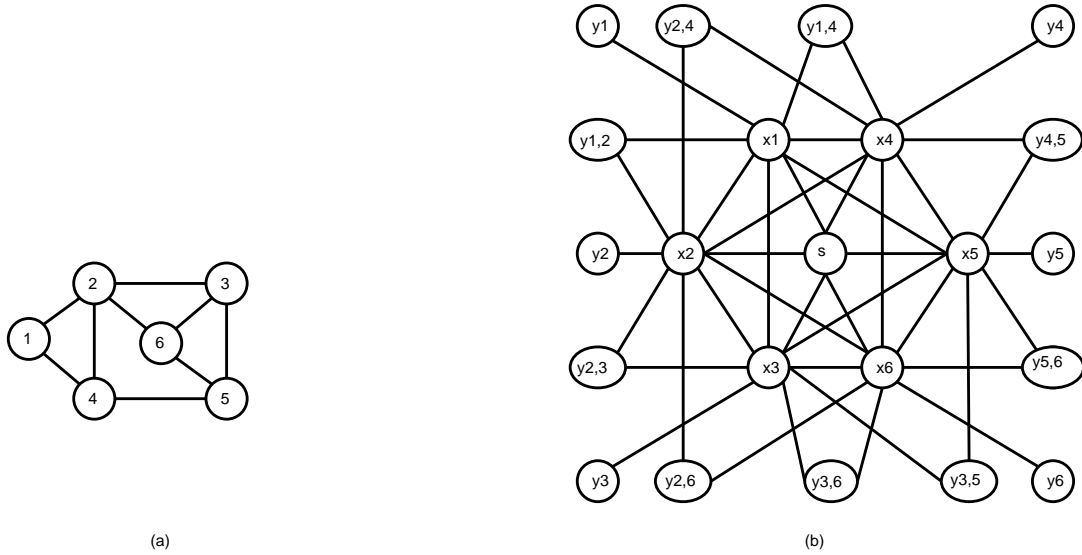


FIG. 2 – Réduction coloration vers  $(\mathcal{S}, A_{\text{complet}}, \text{base})\text{-diffMinTps}$

de celle de la preuve du théorème 2, et présentée en figure 1, à ceci près que les sommets de  $X$  dans cette dernière formaient un stable et non une clique. Notre démarche suit un raisonnement également très proche. Dès émission de la source, les sommets  $x_i$  reçoivent correctement le message. Chaque sommet  $x_i$  doit être transmetteur, pour informer chaque sommet pendant  $y_i$ . Deux sommets  $x_i$  et  $x_j$  qui peuvent émettre en même temps n'ont aucun voisin  $y_{\{i,j\}}$  en commun. Ceci implique que leurs sommets correspondants  $x_i$  et  $x_j$  dans le graphe  $G_c$  ne sont pas reliés par une arête. On peut partitionner l'ensemble des sommets  $x_i$  en  $k$  sous-ensembles  $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$  disjoints, tel que les sommets d'un même ensemble puissent émettre en même temps, comme dans la preuve du théorème 2. On ne peut pas temporiser ici les émissions. Cependant, l'ensemble des sommets  $x_i$  forme une clique. Chaque sommet de  $T_i$  est donc voisin de l'ensemble des sommets de  $T_{i+1}$ . Dans chaque partition  $T_i$ , nous sélectionnons un sommet  $x_{p_i}$  qui est désigné comme père de l'ensemble des sommets de  $T_{i+1}$ . L'utilisation d'un arbre de diffusion dans une clique permet ici de simuler le contexte de temporisation précédemment rencontré. Pour tout arbre de diffusion qui est solution du problème  $(\mathcal{S}, A_{\text{complet}}, \emptyset)\text{-DiffMinTps}$ , on peut associer une coloration de  $G_c$ , en

coloriant les sommets  $x_i$  de même profondeur d'une même couleur.

Réciproquement, une coloration optimale des sommets avec  $k$  couleurs sur le graphe  $G_c$  permet de retrouver un arbre de diffusion de profondeur minimale  $k$  sur l'instance construite. Le rapport d'approximation est conservé, on en conclut que le problème  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -DiffMinTps est  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX. Notons ici que le graphe  $G$  construit est triangulé. La restriction du problème à cette topologie ne permet donc pas de réduire la classe de complexité.  $\square$

On peut toujours trouver polynomialement une solution de diffusion dans chaque instance : on considère un arbre enraciné au sommet source  $s$ , et décrivant un parcours en profondeur sur le graphe  $G$ . Dans cet arbre les nœuds internes sont des transmetteurs, les feuilles sont des récepteurs, et une relation de parenté dans l'arbre correspond à un relation de parenté dans la solution de diffusion. Pour tout nœud  $u$ , aucun de ses voisins transmetteurs ne peut être à la même profondeur que son père, sinon l'arbre ne décrit plus un parcours en profondeur. Malheureusement cette solution est généralement mauvaise en terme de temps de diffusion.

Nous montrons également dans ce contexte, que même en imposant le statut des sommets (Transmetteur ou Récepteur) en donnée, on ne change rien à la complexité du problème  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -DiffMinTps. Au contraire, l'existence d'une solution même mauvaise devient un problème  $\mathcal{NP}$ -Complet lorsque les nœuds internes de l'arbre sont imposés, ce qui n'était pas le cas autrement. Nous proposons le problème de décision suivant noté  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé :

<b>Contexte</b>	: Modèle synchrone, organisation arbre complet, stratégie de base
<b>Donnée</b>	: Un graphe non orienté $G = (V, E)$ , un sommet $s \in V$ , une bipartition $\{T, R\}$ de $V$
<b>Question</b>	: Existe-t-il un arbre enraciné en $s$ recouvrant le graphe $G$ tel que : <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\forall u \in \{V - s\}, \forall v \in \{N(u) - \text{pere}(u)\} \wedge \exists t, v = \text{pere}(t), \text{depth}(\text{pere}(u)) \neq \text{depth}(v)</math></li> <li>2. <math>\forall u, \exists t, u = \text{pere}(t) \Leftrightarrow u \in T</math></li> <li>3. <math>\forall u, \nexists t, u = \text{pere}(t) \Leftrightarrow u \in R</math></li> </ol>

**Problème de décision 3.5:** Le problème  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé

**Théorème 5** *Le problème de décision  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé est  $\mathcal{NP}$ -Complet.*

**Preuve:** nous proposons la réduction suivante :

Chemin Hamiltonien  $\ll_K$   $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé

Nous considérons une instance  $I_h$  du problème du Chemin Hamiltonien. Un graphe  $G_h = (V_h, E_h)$  est donné, et la question est de savoir s'il existe un chemin Hamiltonien sur ce graphe. On construit le graphe  $G = (V, E)$  et la bipartition  $\{T, R\}$  d'une instance du problème  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé comme suit :

1. Pour tout sommet  $x_i$  de  $V_h$ , on ajoute un sommet  $x_i$  dans  $V$ . Pour toute arête  $\{x_i, x_j\}$  de  $E_h$ , on ajoute l'arête  $\{x_i, x_j\}$  dans  $E$ .
2. On ajoute un sommet source  $s$  dans  $X$ , et les arêtes  $\{s, x_i\}$ .
3. Pour toute paire de sommets  $x_i$  et  $x_j$  de  $V$ , on ajoute le sommet  $y_{\{i,j\}}$  dans  $V$ , ainsi que les arêtes  $\{x_i, y_{\{i,j\}}\}$  et  $\{x_j, y_{\{i,j\}}\}$  dans  $E$ .
4. les sommets  $x_i$  et la source  $s$  sont dans l'ensemble  $T$ , les sommets  $y_{\{i,j\}}$  dans  $R$ .  $\{T, R\}$  forme une bipartition de  $V$ .

La figure 3 présente un exemple de cette transformation avec une instance de Chemin Hamiltonien (a) et l'instance de  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé associée (b).

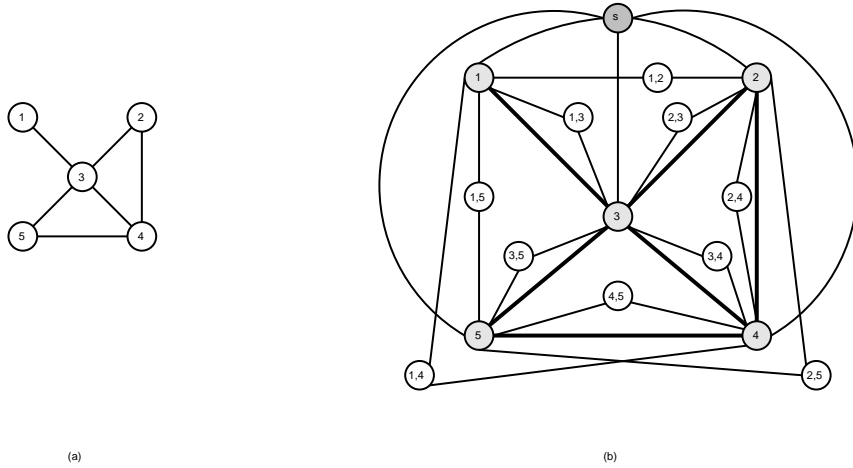


FIG. 3 – Réduction Chemin Hamiltonien vers  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé

Dans ce graphe, la solution au problème de diffusion est un arbre dont les nœuds internes sont les sommets  $x_i$ . (Pour éviter des incohérences, on aurait pu ajouter un sommet pendant à chaque  $x_i$  pour justifier son statut de transmetteur). Pour toute paire de sommets  $x_i$  et  $x_j$ , il existe un voisin commun  $y_{\{i,j\}}$  qui impose que  $x_i$  et  $x_j$  ne peuvent diffuser à la même étape, car sinon  $y_{\{i,j\}}$  ne recevrait pas le message. Il ne peut y avoir 2 sommets  $x_i$  et  $x_j$  à la même hauteur dans l'arbre. Les sommets transmetteurs doivent obligatoirement se trouver sur une seule branche de l'arbre. Les sommets récepteurs sont rattachés à n'importe lequel de leurs voisins. S'il existe une solution au problème de diffusion, l'arbre de diffusion est une chaîne comportant tous les éléments  $x_i$ . Celle-ci correspond à un chemin Hamiltonien sur le graphe de l'instance  $I_h$ .

Réciproquement, résoudre le problème du Chemin Hamiltonien sur l'instance  $I_h$  permet de retrouver un arbre de diffusion, et résoudre le problème de diffusion.

On en conclut que le problème  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ -ExistDiff-TRImposé est  $\mathcal{NP}$ -Complet.  $\square$

Il est intéressant de noter que toutes ces démonstrations s'adaptent très facilement au contexte  $(S, A_{\text{partiel}}, \emptyset)$ . Le fait que l'arbre soit complet ou partiel peut emmener des solutions différentes dans des graphes quelconques. Mais dans les graphes construits dans nos démonstrations, chaque sommet transmetteur et voisin d'un sommet pendant, ce qui impose les mêmes sommets transmetteurs pour une organisation en arbre complet ou partiel. Par ailleurs, chaque sommet récepteur ne possède qu'au plus 2 voisins transmetteurs. Deux transmetteurs ayant un voisin commun ne peuvent pas émettre en même temps, quel que soit l'organisation du modèle. Les résultats obtenus pour le contexte  $(S, A_{\text{partiel}}, \emptyset)$  sont identiques à ceux obtenus sur le contexte  $(S, A_{\text{complet}}, \emptyset)$ .

### 3.5 Une note sur les contextes $(S, A_{\text{complet}}, \text{Tmp})$ et $(S, A_{\text{partiel}}, \text{Tmp})$

Dans le contexte  $(S, A_{\text{complet}}, \text{Tmp})$  (*resp.*  $(S, A_{\text{partiel}}, \text{Tmp})$ ), la diffusion doit s'organiser suivant un arbre de diffusion. L'arbre peut être n'importe quel arbre recouvrant (*resp.* dominant). Les nœuds de cet arbre peuvent temporiser leurs émissions pour prévenir les brouillages.

On constate que minimiser le temps de diffusion dans ce contexte est aussi compliqué que si les nœuds peuvent recevoir le message de n'importe quel autre nœud. En effet dans le contexte  $(S, *, \text{Tmp})$ , le théorème 2 annonce que le problème  $(S, *, \text{Tmp})$ -DiffMinTps est  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX. Dans les instances construites dans la preuve de ce théorème, l'utilisation d'un arbre de diffusion ne permet pas de changer la complexité du problème : tous les nœuds transmetteurs peuvent recevoir l'information dès la première étape, et temporiser ensuite. On peut associer à chacun le sommet source comme père. Considérer un autre arbre n'aurait aucun sens : que le transmetteur reçoive le message dès la première étape et temporise  $k$  étapes avant de réémettre,

ou qu'il le reçoive d'un nœuds à profondeur  $k - m$  dans l'arbre et temporise  $m$  étapes revient au même. On en conclut que minimiser le temps de diffusion dans les contextes  $(S, A_{complet}, Tmp)$  et  $(S, A_{partiel}, Tmp)$  est aussi un problème  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX.

On peut suivre le même raisonnement pour conclure que même si l'arbre de diffusion est donné, le problème reste  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX. Dans les instances de la preuve du théorème 2, on affecte à chaque transmetteur le sommet source comme père. Résoudre l'instance proposée reste aussi difficile que résoudre le problème de la coloration minimale sur l'instance associée.

### 3.6 Organisation en arbre dans des contextes asynchrones

Nous présentons ici des résultats sur les contextes utilisant une organisation en arbre complet ou partiel. Dans les contextes  $(AS, A_{complet}, \emptyset)$  et  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$ , chaque nœud transmetteur n'émet qu'une fois, mais on ne sait pas quand. Un nœud transmetteur ne peut recevoir le message que d'un seul père. Deux nœuds transmetteurs  $u$  et  $v$  voisins dans le graphe sont forcément liés par une relation de causalité, sinon l'émission de  $u$  pourrait brouiller l'émission du père de  $v$ , et  $v$  ne recevrait alors jamais le message. La solution de diffusion est ici un arbre de diffusion présentant les caractéristiques suivantes :

Pour deux nœuds transmetteurs  $u$  et  $v$  voisins dans  $G$  :

- soit l'un est le descendant de l'autre dans l'arbre de diffusion représentant la solution,
- soit les deux ont le même père

Pour chaque nœud récepteur  $u$  :

- dans le contexte  $(AS, A_{complet}, \emptyset)$ , aucun nœud transmetteur ne doit brouiller l'émission du père du nœud  $u$ . Tous les nœuds transmetteurs voisins de  $u$  se situent sur la même branche de l'arbre.
- dans le contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$ , une majorité de nœuds transmetteurs voisins de  $u$  doit se situer sur la même branche de l'arbre. Ces émissions consécutives ne pourront alors pas être toutes brouillées par des émissions concurrentes, et  $u$  recevra au moins une émission correctement.

L'existence d'un tel arbre est toujours possible :

1. Dans un contexte  $(AS, A_{complet}, \emptyset)$ , on considère un arbre enraciné au sommet source  $s$ , et décrivant un parcours en profondeur sur  $G$ . Dans cet arbre les nœuds internes sont des transmetteurs, les feuilles sont des récepteurs, et une relation de père dans l'arbre correspond à une relation de père dans la solution de diffusion. Pour toute paire de transmetteurs voisins  $u$  et  $v$ , ces deux derniers se situent sur la même branche de l'arbre, et les transmissions ne peuvent se brouiller. Pour tout nœud récepteur, l'ensemble de ses voisins transmetteurs se situe également sur la même branche.
2. Dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$ , on reprend l'arbre décrit précédemment, en supprimant les feuilles. L'arbre dominant obtenu est une solution valide au problème.

Trouver l'arbre qui minimise les coûts de durée est cependant un problème  $\mathcal{NP}$ -Complet même dans les graphes bipartis (trouver cet arbre dans un contexte synchrone dans un graphe biparti était déjà un problème  $\mathcal{NP}$ -Complet).

## 4 Diffusion sur des topologies particulières

### 4.1 Diffusion sur la grille, dans un contexte $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$

Nous étudions le problème de la diffusion sur une grille de dimensions  $p \times q$ , dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$ . Un sommet transmetteur ne réémet qu'une fois le message, à condition qu'il provienne d'un sommet précis. Mais il ne rediffuse le message qu'au terme d'un délai de traitement

non borné. Un sommet récepteur reçoit le message correctement à condition que l'émission d'au moins un de ses voisins transmetteurs ne soit pas brouillée par ses autres voisins transmetteurs.

#### 4.1.1 Description de la solution de diffusion

La solution que nous présentons consiste à découper la grille en blocs de 2 et 3 colonnes consécutives, et à organiser la diffusion en fonction de ces derniers. Cette solution s'applique également en découpant la grilles en groupes de 3 lignes consécutives. Nous présentons ici un découpage suivant le nombre de colonnes  $q$ . Le découpage s'appuie sur la valeur de  $q$  :

1. Si  $q = 3k$ , nous obtenons  $k$  blocs de 3 colonnes
2. Si  $q = 3k + 1$ , nous obtenons  $k - 1$  blocs de 3 colonnes, et 2 blocs de 2 colonnes situés aux extrémités de la grille
3. Si  $q = 3k + 2$ , nous obtenons  $k - 1$  blocs de 3 colonnes, et 1 bloc de 2 colonnes situé à une extrémité de la grille

Le sommet source se situe soit sur la colonne centrale du bloc qui le contient, soit sur une des 2 autres colonnes du bloc. Suivant ce paramètre, nous obtenons deux schémas de diffusion légèrement différents. Les figures 4 et 5 présentent les deux solutions possibles pour  $q = 3k + 1$ . Nous ne détaillons pas la solution, l'idée générale qui ressort de ces deux schémas se voulant plus explicite. Les sommets en noir sont désignés comme transmetteurs, les flèches indiquent les relations de parenté.

L'arbre dominant défini sur chaque schéma présente toutes les caractéristiques d'une solution de diffusion dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$  :

1. Deux sommets transmetteurs voisins dans la grille sont sur la même branche de l'arbre de diffusion.
2. Pour chaque sommet  $u$  défini comme récepteur, le nombre de sommets transmetteur inclus dans son voisinage est compris entre 1 et 3 :
  - (a) S'il n'y a qu'un seul sommet transmetteur  $a$  dans le voisinage de  $u$ ,  $u$  reçoit correctement le message émi par  $a$ .
  - (b) S'il y a deux sommets transmetteurs  $a$  et  $b$  dans le voisinage de  $u$ ,  $a$  et  $b$  se situent sur la même branche de l'arbre de diffusion, et ne peuvent se brouiller. Le sommet  $u$  reçoit correctement le message depuis  $a$  ou  $b$ .
  - (c) S'il y a trois sommets transmetteurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans le voisinage de  $u$ , au moins deux d'entre eux  $a$  et  $b$  se situent sur la même branche de l'arbre de diffusion. L'émission de  $c$  ne peut brouiller au plus qu'une seule des deux émissions de  $a$  ou  $b$ . Le sommet  $u$  reçoit correctement le message depuis  $a$ ,  $b$  ou  $c$ .

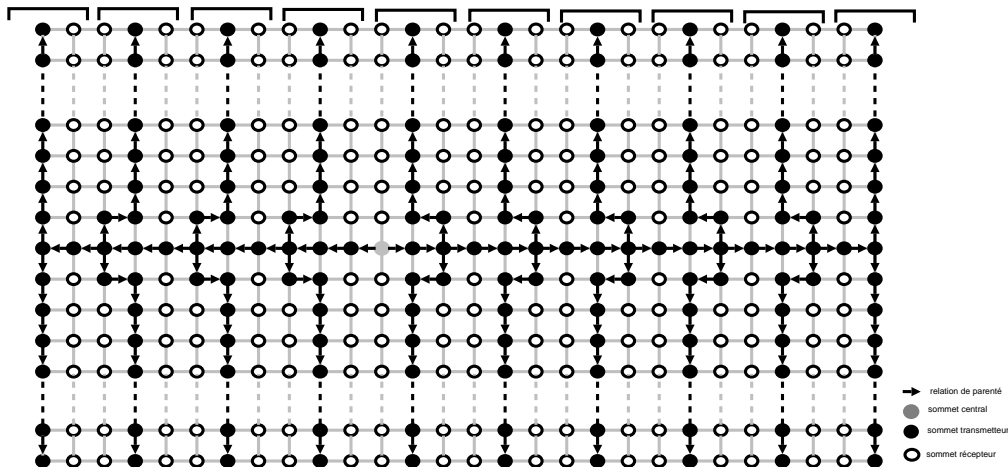


FIG. 4 – grille  $p \times q$ ,  $q=3k + 1$ . Le sommet source ne se situe pas sur la colonne centrale du bloc

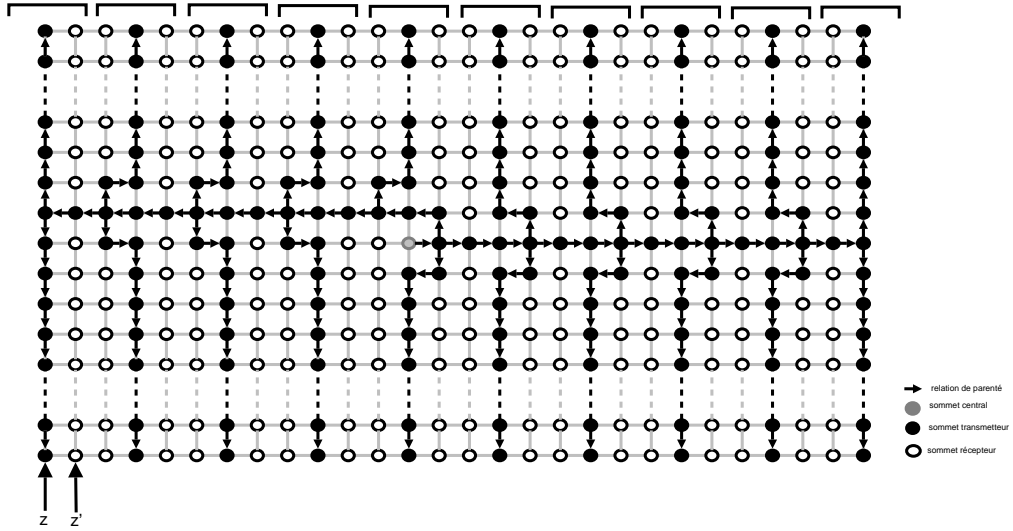


FIG. 5 – grille  $p \times q$ ,  $q=3k + 1$ . Le sommet source se situe sur la colonne centrale du bloc

Ces schémas sont donnés pour une grille de dimensions  $p \times q$  avec  $q = 3k + 1$ . Sur ces derniers, les deux colonnes aux extrémités sont entièrement composées de sommets transmetteurs. On peut rajouter une colonne de récepteurs de part et d'autre de chaque schéma et conserver une solution valide sur des grilles de dimensions  $p \times q$  avec  $q = 3k + 2$  ou  $q = 3(k + 1)$ .

#### 4.1.2 Performances

##### 1. Durée de diffusion :

Les performances en terme de durée de diffusion sont légèrement différentes sur les deux schémas. Le pire des cas est atteint dans le schéma 5. Sur ce dernier, le sommet  $z'$  le plus éloigné de la source a une profondeur dans l'arbre égale à la distance de ce dernier de la source dans la grille, plus 4. Le sommet  $z$  est le seul voisin transmetteur de  $z'$ , ce qui nécessite une unité de temps supplémentaire. Notre solution est optimale en terme de temps, à une constante additive inférieure ou égale à 5 près.

##### 2. Nombre de sommets transmetteurs :

Le pire cas est obtenu pour  $q = 3k + 1$ . La solution proposée comporte  $p + 4$  sommets transmetteurs par colonne. Soit  $(p + 4) * \lceil q/3 \rceil \leq (p \cdot q + 4q)/3$  sommets transmetteurs. Le nombre minimal de transmetteur est minoré par  $(p \cdot q)/3$ . Ce rapport se calcule en considérant que chaque sommet  $u$  transmetteur peut informer au plus  $N_G(u) - N_A(u)$  sommets récepteurs ( $N_G(u)$  est le nombre de voisins de  $u$  dans la grille,  $N_A(u)$  le nombre de voisins de  $u$  dans l'arbre). En sommant sur le nombre de transmetteurs, et en soulignant que  $u$  ne peut avoir que 4 voisins au plus, on obtient un rapport entre le nombre de transmetteurs et celui de sommets d'au moins  $1/3$ . Ce qui nous donne un rapport d'approximation en nombre de transmetteur égal à  $(1 + 4/p)$  sur la grille.

## 4.2 Diffusion sur le tore, dans un contexte $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$

Nous présentons ici une solution permettant une diffusion sur un tore de dimensions  $p \times q$ , dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$ . Un sommet transmetteur ne réémet ici qu'une fois le message, à condition qu'il provienne d'un sommet précis. Mais il ne rediffuse le message qu'au terme d'un délai de traitement non borné. Un sommet récepteur reçoit le message correctement à condition qu'un nombre suffisant de ses voisins transmetteurs ne se brouillent pas entre eux.

Nous adoptons une représentation plane du tore, et parlons abusivement de lignes et colonnes.

Notre solution se base sur un découpage du tore en bloc, et application de schémas dans ces derniers :

#### 4.2.1 Découpage en blocs

La solution proposée s'appuie sur un découpages en lignes, mais il est également possible de l'appliquer en fonction des colonnes. Les performances peuvent varier suivant le découpage considéré. Un découpage dans un sens précis peut engendrer une solution meilleure que l'autre . Ceci dépend des dimensions du tore, et du rapport  $p/q$ . Il n'y a que 2 découpages possibles. Il convient de réaliser les 2 découpages et de considérer la meilleure solution des deux. Nous présentons ici un seul des deux découpages possibles.

Nous découpons le tore en  $\lfloor p/3 \rfloor$  blocs suivant les lignes. Tous les blocs sont constitués de 3 lignes, sauf éventuellement un qui en possède 4 ou 5. Nous dirons que ces blocs sont de largeur 3, 4 ou 5. Le découpage doit tenir compte du sommet source :

- S'il n'y a que des blocs de largeur 3, le sommet source doit se trouver sur la ligne centrale d'un bloc.
- S'il y a un bloc de largeur 4, le sommet source doit se situer dans ce bloc, et sur une des 2 lignes centrales.
- S'il y a un bloc de largeur 5, le sommet source doit se situer dans ce bloc, et sur une des deux lignes qui ne bordent pas le bloc, et autres que la ligne centrale.

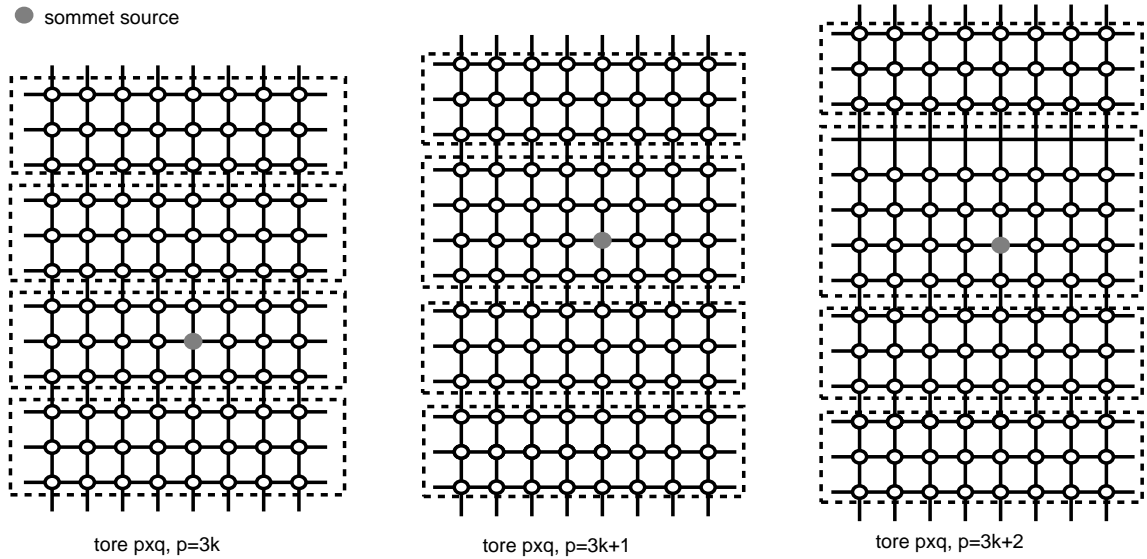


FIG. 6 – Découpage du tore suivant ses dimensions

La figure 6 illustre un tel découpage. La distance entre deux blocs est le nombre de blocs qui les sépare. Le bloc contenant le sommet source est le bloc origine. Nous représentons le tore de façon planaire de sorte que le bloc central soit le bloc origine, et que les deux bloc les plus éloignés de ce dernier soit respectivement tout en haut et tout en bas sur la figure. Le bloc tout en haut est appelé «bloc supérieur», le bloc tout en bas est appelé «bloc inférieur». (Notons que le tore étant une grille repliée sur elle-même, le bloc supérieur côtoie le bloc inférieur). Les blocs situés entre le bloc origine et le bloc supérieur (resp. inférieur) sont les blocs intermédiaires supérieurs (resp. intermédiaires inférieurs).

#### 4.2.2 Application de schémas

Nous proposons les schémas des figures 7 à 9 pour déterminer la propagation du message dans chaque bloc. Chaque schéma indique quels sommets sont transmetteurs ou récepteurs, ainsi que les relations de parenté entre les transmetteurs. Pour chacun de ces schémas, autre que les

schémas réservés au bloc origine, le message ne peut arriver que d'une seule arête (arête d'entrée) et ne peut sortir du bloc que par une seule autre arête (arête de sortie). En décalant intelligemment ces schémas entre chaque bloc, de sorte que l'arête de sortie corresponde à l'arête d'entrée du bloc suivant, on obtient un arbre de diffusion enraciné en  $s$  et dominant le tore. Dans chaque bloc, nous distinguons un sommet que nous appelons « sommet central ».

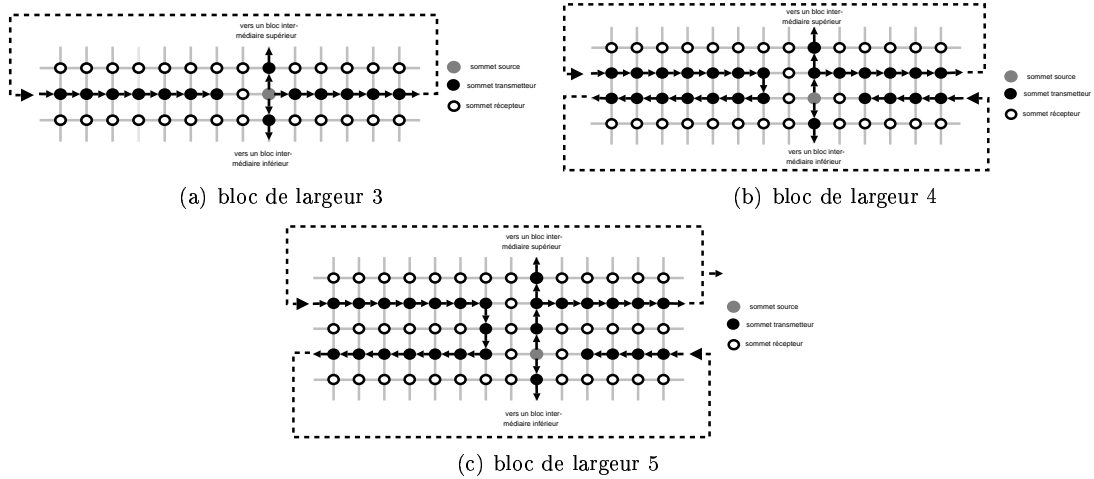


FIG. 7 – Les schémas possibles du bloc origine, en fonction de sa taille

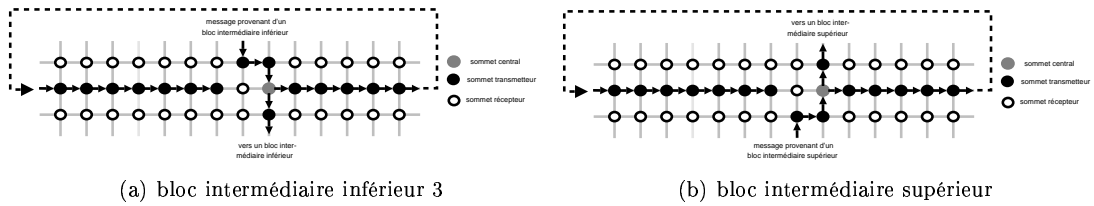


FIG. 8 – Schémas des blocs intermédiaires

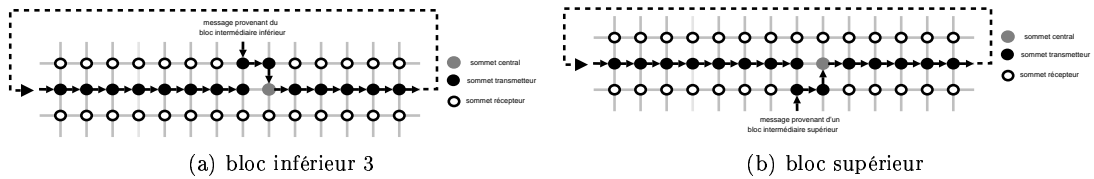


FIG. 9 – Schémas des blocs supérieur et inférieur

La figure 10 présente une solution réalisée à partir des différents schémas. Chaque schéma décrit une partie de l'arbre de diffusion. Ces schémas correctement juxtaposés forment l'arbre de diffusion. Les différents critères vérifiant la validité de ce dernier en tant que solution de diffusion sont les suivants :

1. Deux sommets transmetteurs voisins dans le tore sont sur la même branche de l'arbre.
2. Pour chaque sommet  $u$  défini comme récepteur, le nombre de sommets transmetteur inclus dans son voisinage est compris entre 1 et 3 :
  - (a) S'il n'y a qu'un seul sommet transmetteur  $a$  dans le voisinage de  $u$ ,  $u$  reçoit correctement le message émi par  $a$ .



- (b) S'il y a deux sommets transmetteurs  $a$  et  $b$  dans le voisinage de  $u$ ,  $a$  et  $b$  se situent sur la même branche de l'arbre de diffusion, et ne peuvent se brouiller. Le sommet  $u$  reçoit correctement le message depuis  $a$  ou  $b$ .
- (c) S'il y a trois sommets transmetteurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans le voisinage de  $u$ , au moins deux d'entre eux  $a$  et  $b$  se situent sur la même branche de l'arbre de diffusion. L'émission de  $c$  ne peut brouiller qu'une seule des deux émissions de  $a$  ou  $b$  dans le pire des cas. Le sommet  $u$  reçoit correctement le message depuis  $a$ ,  $b$  ou  $c$ .

Ces conditions se vérifient pour tous les sommets, et montrent la validité de la solution.

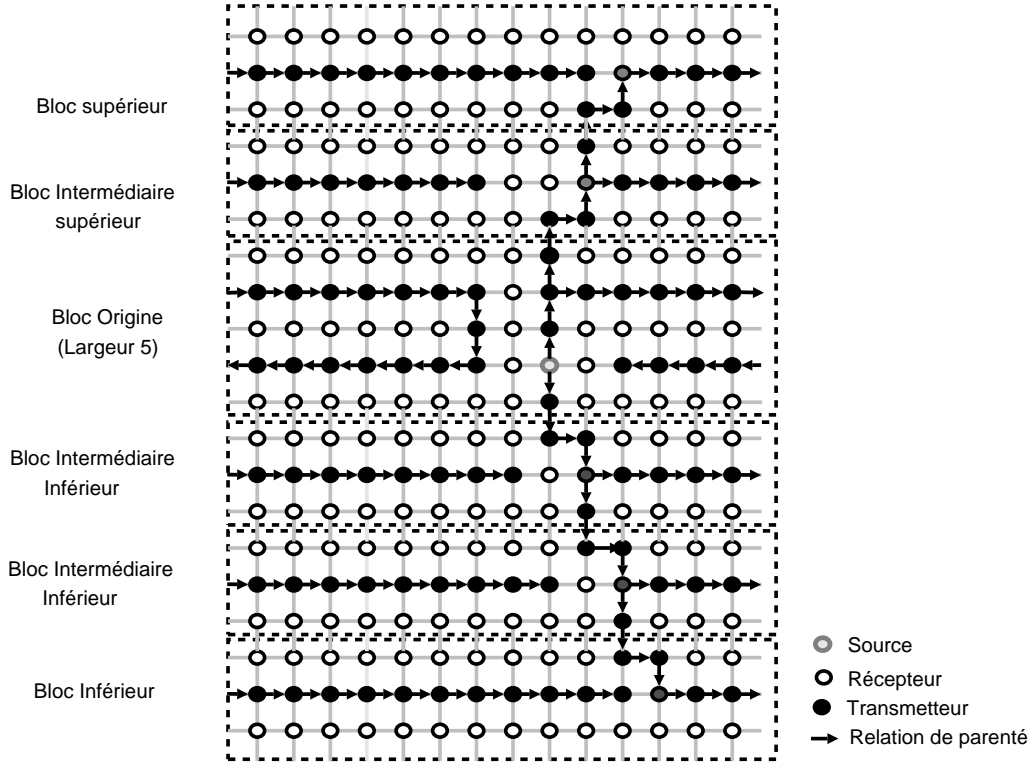


FIG. 10 – Diffusion réalisée à partir des différents schémas sur un tore  $20 \times 14$

### 4.2.3 Performances

#### 1. Durée de diffusion :

La durée de diffusion est proportionnelle à la taille de l'arbre de diffusion créé. Notre solution procède à un découpage en  $\lfloor p/3 \rfloor$  blocs d'un tore de dimensions  $p \times q$ . Les blocs les plus éloignés du bloc origine sont les blocs inférieur et supérieur, distants d'au plus  $p/6$  blocs de ce dernier. Entre deux sommets centraux de deux blocs voisins autres que le bloc origine, il y a une distance de 4 sur l'arbre de diffusion. Entre le sommet source du bloc origine, et le sommet central d'un de ses blocs voisins, il y a une distance d'au plus 6 sur l'arbre de diffusion. La distance du sommet source vers le sommet central le plus éloigné est majorée par  $4(p/6)+2$ , soit  $2p/3+2$ . Dans un bloc autre que le bloc origine, chaque sommet est distant d'au plus  $q-1$  du sommet central du bloc dans l'arbre de diffusion. Tout sommet d'un bloc autre que ceux du bloc origine est donc distant d'au plus  $2p/3+2+q-1=2p/3+q+1$  de la source.

Le bloc origine constitue un cas particulier dans lequel un sommet peut se situer à une distance de  $2q$  du sommet source (ce en fonction de la largeur du bloc). La profondeur de l'arbre de diffusion sur le tore  $p \times q$  est majorée par  $\max\{2p/3+q+1, 2q\}$ . Sur le tore carré  $p \times p$ , nous

obtenons un arbre de diffusion de profondeur  $2p$  dans le pire des cas, tandis que l'optimal est minoré par  $p$ . Notre solution est donc au pire 2-approchée.

## 2. Nombre de sommets transmetteurs :

Le pire cas est obtenu pour  $p = 3k + 1$ . Dans ce dernier, le motif du bloc origine de largeur 4 est très coûteux. Le nombre de transmetteurs est majoré par  $2q$  dans ce dernier, par  $q + 2$  dans les blocs intermédiaires, et  $q + 3$  dans les blocs inférieur et supérieur. Le nombre total de transmetteurs est majoré par  $(q+2) \cdot p/3$ , soit  $(p \cdot q + 2p)/3$ . Le nombre minimal de transmetteur est minoré par  $p \cdot q/3$ . Ce qui nous donne un rapport d'approximation inférieur à  $(1 + 2/q)$ .

Sur le tore ou sur la grille, la complexité des schémas vient du fait que l'on veut couvrir tous les sommets sans exception. Si on admet qu'un pourcentage de sommets ne reçoivent pas l'information, des schémas de diffusion très simples peuvent être considérés, même pour un très faible pourcentage. Toute la difficulté consiste ici à toucher l'ensemble des sommets.

### 4.3 Diffusion sur les graphes d'intervalles, contexte $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$

Un graphe d'intervalle est un graphe dont les sommets peuvent être représentés par des intervalles sur la droite des réels. Les arêtes correspondent à deux intervalles dont l'intersection est non vide. Un graphe d'intervalle peut donc se représenter de manière classique ou en utilisant les intervalles. La figure 11 présente ces 2 représentations d'un même graphe.

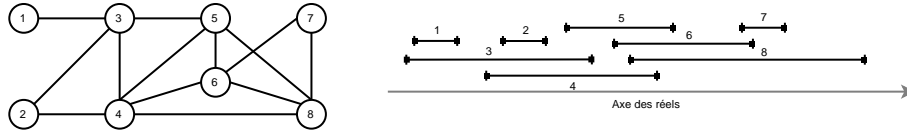


FIG. 11 – représentation classique (a), et en intervalles (b), d'un graphe d'intervalles

Nous considérons ici le problème de la diffusion dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$ . Nous utilisons la représentation en intervalle afin de trouver un algorithme optimal en temps de diffusion sur cette topologie. Si l'intervalle représentant le sommet source se situe sur une extrémité dans une représentation en intervalles, par exemple l'intervalle le plus à gauche, on peut trouver une diffusion optimale en procédant par itérations avec l'algorithme suivant :

- À l'itération 0, on sélectionne le sommet source  $s$  comme transmetteur.
- À chaque itération  $i$ , on sélectionne un sommet  $t_i$  comme transmetteur, tel que :
  1.  $t_i$  soit voisin du sommet  $t_{i-1}$ , sélectionné comme transmetteur à l'étape précédente
  2. l'extrémité de l'intervalle représentant  $t_i$  sur l'axe des réels se projète le plus à droite.
- Dans l'arbre de diffusion,  $t_{i-1}$  devient le père de  $t_i$
- On passe à l'itération suivante, jusqu'à ce que tous les sommets aient un voisin transmetteur.

La figure 12 présente un exemple sur lequel nous appliquons cet algorithme. L'arbre de diffusion obtenu est une chaîne de longueur égale à l'excentricité de la source  $s$ , et chaque sommet récepteur possède au moins un transmetteur dans son voisinage duquel il peut recevoir l'information.

Lorsque la source ne se situe pas sur une extrémité dans la représentation en intervalle, l'arbre de diffusion possède alors 2 branches : une pour diffuser vers les intervalles de gauche, et une pour les intervalles de droite. Chaque branche possède une extrémité voisine à la source. On envisage alors toutes les possibilités pour ces 2 extrémités, soit l'ensemble des couples  $(u, v)$  tel que  $u, v \subseteq N(s)$ , et on construit linéairement les branches pour chaque cas. On sélectionne enfin la meilleure solution. Ceci nous garantit une solution optimale en un temps d'exécution  $\mathcal{O}(\Delta^2 \times excentricite(s))$ , où  $\Delta$  est le degré maximal du graphe.

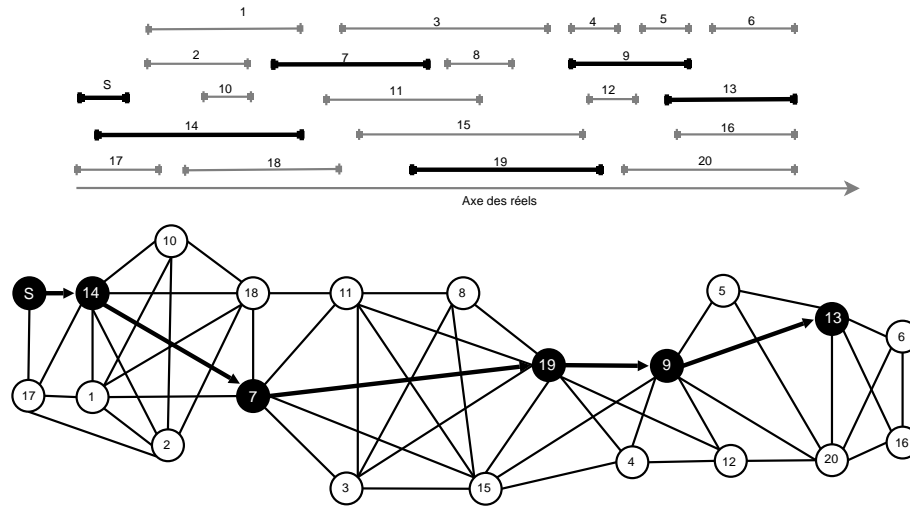


FIG. 12 – Une solution optimale sur un graphe d'intervalle

Choisir  $u$  et  $v$  tel que les intervalles de chacun se projettent le plus loin possible de la source n'est pas la meilleure solution, car il peut y avoir des brouillages entre  $u$  et  $v$  dans ce cas. Il faudrait alors faire émettre  $u$  et  $v$  séquentiellement, et ferait éventuellement perdre une unité de temps. On peut souligner que cette solution est optimale à une constante additive de 1 près, et se construit en un temps linéaire.

## 5 Conclusion et perspectives

### 5.1 Complexité du problème de diffusion dans différents contextes

Le tableau suivant présente la complexité du problème de diffusion dans les réseaux sans-fil et sa satisfaisabilité dans différents contextes :

Contexte	Donnée	Complexité minimisation temps	Problème de l'existence d'une solution
$S, *, \emptyset$	$G = (V, E)$	$\mathcal{NP}$ -Complet sur biparti (Exact Set Cover)	Des instances $k$ -connexes insatisfiables
$S, A_{Comple}, \emptyset$ $S, A_{Partiel}, \emptyset$	$G = (V, E)$	$\mathcal{NP}$ -Complet sur biparti (Exact Set Cover)	Toute instance satisfiable
	$G = (V, E)$ , bipartition $\{T, R\}$	$\mathcal{NP}$ -Complet (Chemin Hamiltonien)	Des instances insatisfiables
$S, *, tmp$	$G = (V, E)$	$\mathcal{NP}$ -Complet non-APX (Coloration de graphes)	Toute instance satisfiable
$S, *, RM$	$G = (V, E)$	$\mathcal{NP}$ -Complet (Exact Set Cover)	Toute instance satisfiable
$S, A_{Comple}, Tmp$	$G=(V,E)$	$\mathcal{NP}$ -Complet non-APX (Coloration de graphes)	Tout instance satisfiable.
$S, A_{Partiel}, Tmp$	$G=(V,E)$	$\mathcal{NP}$ -Complet non-APX (Coloration de graphes)	Tout instance satisfiable.

### 5.2 Résultats sur des topologies particulières

Nous avons mis en place une diffusion sur les topologies de la grille et du tore avec des coûts en temps et en énergie très intéressants dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$  :

1. sur la grille de dimensions  $p \times q$  ( $p \geq q$ ) : :
  - La durée de diffusion est optimale (à une constante additive près inférieure ou égale à 5).
  - Le nombre de nœuds transmetteurs est  $(1 + 4/p)$ -approché.
2. sur le tore de dimensions  $p \times q$  ( $p \geq q$ ) :
  - La durée de diffusion est 2-approchée dans la pire des configurations. Une telle différence par rapport à la grille s'explique par les conflits qui peuvent naître lorsque l'on «replie» la grille.
  - Le nombre de nœuds transmetteurs est  $(1 + 2/q)$ -approché.

Toujours dans un contexte  $(AS, A_{partiel}, \emptyset)$  :

1. Nous avons un algorithme polynomial en  $\mathcal{O}(n^2)$  sur les graphes d'intervalles, qui renvoie une solution optimale en temps et en nombre d'émetteurs.
2. Sur les graphes triangulés, nous avons montré que le problème restait  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX, mais un algorithme aux performances intéressantes est en cours d'étude.

Dans le cas synchrone, beaucoup de problèmes restent  $\mathcal{NP}$ -Complet et non-APX. L'étude d'algorithmes approchés ou exacts dans des graphes particuliers (graphes série-parallèle, graphes triangulés, ...) est une suite logique à ce travail. La donnée d'éléments complémentaires est également étudiée (imposition de la bipartition  $\{T,R\}$ , de l'arbre de diffusion, ...) afin de déterminer si la connaissance de nouveaux paramètres permet de diminuer la complexité des problèmes.

## Remerciements

Je tiens à remercier Jean-Claude König, Sylvain Durand et Jérôme Palaysi pour leur aide et leurs précieux conseils. Je remercie également Johanne Cohen pour l'intérêt et le temps qu'elle a pu m'a accorder dans la mise en place de certains résultats de ce travail.

## Références

- [ABNLP91] N. Alon, A. Bar-Noy, N. Linial, and D. Peleg. A lower bound for radio broadcast. *J. Comput. Syst. Sci.*, 43(2) :290–298, 1991.
- [CGR02] M. Chrobak, L. Gasieniec, and W. Rytter. Fast broadcasting and gossiping in radio networks. *J. Algorithms*, 43(2) :177–189, 2002.
- [CK85] I. Chlamtac and S. Kutten. On broadcasting in radio networks - Problem analysis and protocol design. *IEEE Transactions on Communications*, 33 :1240–1246, December 1985.
- [CK87] I. Chlamtac and S. Kutten. Tree-based broadcasting in multihop radio networks. *IEEE Transactions on Computers*, C-36(10) :1209–1223, 1987.
- [CMS03] A. Clementi, A. Monti, and R. Silvestri. Distributed broadcast in radio networks of unknown topology. *Theor. Comput. Sci.*, 302(1-3) :337–364, 2003.
- [CW91] I. Chlamtac and O. Weinstein. The wave expansion approach to broadcasting in multihop radio network. *IEEE Transaction Communication*, (39) :426–433, 1991.
- [DM78] Y. Dalal and R. Metcalfe. Reverse path forwarding of broadcast packets. *Commun. ACM*, 21(12) :1040–1048, 1978.
- [KP05] D. R. Kowalski and A. Pelc. Faster deterministic broadcasting in ad hoc radio networks. *SIAM J. Discret. Math.*, 18(2) :332–346, 2005.