



**HAL**  
open science

## Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS) - II

Olivier Cogis, Benoit Darties, Sylvain Durand, Jean-Claude König, Jérôme Palaysi

► **To cite this version:**

Olivier Cogis, Benoit Darties, Sylvain Durand, Jean-Claude König, Jérôme Palaysi. Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS) - II. [Rapport de recherche] 05052, LIRMM. 2005. lirmm-00106694

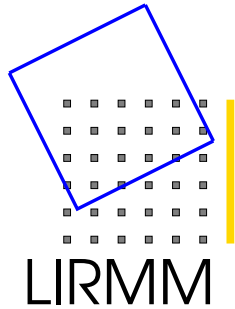
**HAL Id: lirmm-00106694**

**<https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00106694v1>**

Submitted on 16 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE D'INFORMATIQUE, DE  
ROBOTIQUE ET DE  
MICROÉLECTRONIQUE DE  
MONTPELLIER

Unité Mixte CNRS - Université Montpellier II  
5506

## RAPPORT DE RECHERCHE

# Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS) - II

Olivier Cogis  
Sylvain Durand  
Jérôme Palaysi

Benoît Darties  
Jean-Claude König

juillet 2005

R.R.LIRMM 05052

---

161, Rue Ada - 34392 Montpellier Cedex 5 - France  
Tél: +33 (0)4 67 41 85 85 - Fax: +33 (0)4 67 41 85 00

# Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance (CRAS) - II

Olivier Cogis      Benoît Darties      Sylvain Durand  
Jean-Claude König      Jérôme Palaysi

26 juillet 2005

## Résumé

Dans ce rapport, nous étudions un aspect du problème de surveillance de trafic dans un réseau de télécommunication : lorsque l'ensemble des connexions est connu, placer le plus petit nombre d'appareils de surveillance sur les liens du réseaux de sorte que chaque connexion soit surveillée. Nous appelons CRAS ce problème. Nous montrons que ce problème se ramène à des problèmes connus et très étudiés (couverture d'ensemble, transversal...). Cette analogie nous permet d'en déduire des résultats de complexité pour le problème CRAS (NP-complétude, approximabilité). Nous présentons une heuristique gloutonne de recherche de dominant dans un biparti. L'analyse de sa complexité et de la qualité de ses solutions (en termes de garantie de performance) nous permet de déduire des résultats intéressants des instances particulières de CRAS (réseaux de communication en arbre ou en grille notamment).

## 1 Introduction

La surveillance du trafic dans les réseaux peut se dire active ou passive [NT04, CFGL05]. Le problème de surveillance passive présenté dans [CFGL05] consiste à placer des appareils de surveillance sur le plus petit nombre possible de liens d'un réseau pour contrôler une proportion fixée du trafic. Un réseau est représenté par un graphe<sup>1</sup>, et chaque communication par une chaîne pondérée du graphe, ce qui conduit, pour tout rationnel  $r \in ]0, 1]$ , à définir le problème *Partial Passive Monitoring* comme suit :

---

<sup>1</sup>Les graphes considérés sont des graphes simples, c'est-à-dire des graphes non orientés, sans boucle ni arête multiple. On notera  $E(G)$  l'ensemble des arêtes du graphe  $G$  et  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets. Si  $X \subseteq V(G)$ , on note  $N_G(X)$ , ou plus simplement  $N(X)$ , l'ensemble des voisins des sommets appartenant à  $X$ . Une chaîne d'ordre  $n$  est un graphe isomorphe au graphe  $P_n$  défini par  $X(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $E(P_n) = \{ \{i, i + 1\} \mid 1 \leq i < n \}$ .

**Problème 1**  $PPM_r$  (*Partial Passive Monitoring*)

**Donnée :** Un graphe  $G$ , un entier positif  $h$ , un ensemble de chaînes  $R$  dans  $G$  et une fonction de poids  $w$  de  $R$  dans  $\mathbb{Q}^{+*}$ , qui associe un poids à chaque chaîne de  $R$ .

**Question :** Existe-t-il un sous-ensemble  $F \subseteq E(G)$  tel que  $|F| \leq h$  et  $\frac{\sum_{P \in R_F} w(P)}{\sum_{P \in R} w(P)} \geq r$  (où  $R_F = \{P \mid P \in R \text{ et } E(P) \cap F \neq \emptyset\}$ ) ?

Dans [CFG05], il est montré que le problème  $PPM_1$  est NP-complet. De fait, nous montrons qu'il en va de même de  $PPM_r$  pour tout rationnel  $r \in ]0, 1]$  avec des poids unitaires<sup>2</sup> (en remarquant que la constante  $r$  ne fait pas partie des données du problème tel que nous l'avons défini ici). À cet effet, nous introduisons la notion de **graphe biparti signé** : c'est un graphe  $H$  noté  $H = (V_1, V_2, E)$  tel que  $\{V_1, V_2\}$  soit une bipartition de  $V(H)$ ,  $E(H) = E$ , et tel que toute arête de  $H$  ait une extrémité dans chacune des deux classes  $V_1$  et  $V_2$ . On notera que  $(V_1, V_2, E)$  et  $(V_2, V_1, E)$  désignent le même graphe biparti<sup>3</sup>, mais pas le même graphe biparti signé. Par la suite, les graphes bipartis seront toujours supposés signés, et  $V_1(H)$ , resp.  $V_2(H)$ , désignera toujours la première classe, resp. la deuxième classe, de sommets de  $H$ .

Nous définissons alors, pour tout rationnel  $r \in ]0, 1]$ , le problème de *Dominance  $r$ -Partielle dans un Graphe Biparti* défini comme suit :

**Problème 2**  $DPGB_r$  (*Dominance  $r$ -Partielle dans un Graphe Biparti*)

**Donnée :** Un graphe biparti  $H$  et un entier positif  $h$ .

**Question :** Existe-t-il un sous-ensemble  $X$  de  $V_1(H)$  avec  $|X| \leq h$  tel que  $\frac{|N_H(X)|}{|V_2(H)|} \geq r$  ?

Montrer la NP-complétude du problème  $DPGB_r$  nous permet, en utilisant un résultat de « représentation » exposé plus loin, d'en déduire la NP-complétude du problème  $PPM_r$  avec poids unitaires.

Cependant, dans ce rapport, nous nous intéressons principalement au cas particulier où  $r = 1$ , ce qui nous conduit à définir le problème de *Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance* comme suit :

**Problème 3**  $CRAS$  (*Contrôle de Routes par des Appareils de Surveillance*)

**Donnée :** Un graphe connexe non orienté  $G$ , un ensemble  $R$  de chaînes dans  $G$  et un entier positif  $h$ .

**Question :** Existe-t-il un sous-ensemble d'arêtes  $F \subseteq E(G)$  avec  $|F| \leq h$  et tel que si  $P$  est une chaîne de  $R$  alors  $E(P) \cap F \neq \emptyset$  ?

Un tel sous-ensemble  $F$  sera appelé un **contrôle de  $R$  dans  $G$** . Par la suite,  $minCRAS$  désignera le problème d'optimisation « naturellement » associé au problème  $CRAS$  (i.e. pour  $G$  et  $R$  donnés, déterminer le plus

<sup>2</sup>Lorsque  $r = 1$ , la fonction de poids est sans signification pour le problème.

<sup>3</sup>Lorsqu'un graphe est biparti, la bipartition  $\{V_1, V_2\}$  n'est en général pas unique. Pour les graphes bipartis signés, la partition est à la fois spécifiée et ordonnée.

petit  $h$  pour lequel le problème *CRAS* admet une réponse positive pour l'instance  $(G, R, h)$  et, pour tout problème, nous utiliserons une notation similaire pour distinguer sa version décision de sa version optimisation.

En associant à toute instance  $(G, R, h)$  du problème *CRAS* le graphe biparti qu'on notera  $B(G, R)$ , pour lequel  $V_1 = E(G)$ ,  $V_2 = R$  et tel qu'une arête  $e \in E(G)$  est adjacente dans  $B(G, R)$  à une chaîne  $C \in R$  si et seulement si  $e$  est une arête de  $C$ , on constate que  $(G, R, h)$  est une instance positive du problème *CRAS* si et seulement si  $(B(G, R), h)$  est une instance positive du problème *DPGB<sub>1</sub>*, problème que nous noterons dorénavant *DGB* (*Dominance dans un Graphe Biparti*).

**Problème 4** *DGB* (*Dominance dans un Graphe Biparti*)

**Donnée :** Un graphe biparti  $H$  et un entier positif  $h$ .

**Question :** Existe-t-il un sous-ensemble  $X$  de  $V_1(H)$  avec  $|X| \leq h$  tel que  $N_H(X) = V_2(H)$  ?

Or le problème *DGB* est un problème très étudié, plus connu sous ses interprétations ensemblistes :

- comme problème de *couverture*<sup>4</sup>,  $V_2(G)$  est un ensemble  $S$  quelconque, les éléments de  $V_1(G)$  sont des sous-ensembles de  $S$ , et  $x \in V_2(G)$  est adjacent à  $S' \in V_1(G)$  lorsque  $x \in S'$ ; alors un dominant de  $V_2(G)$  dans  $G$  est un ensemble  $X \subseteq V_1(G)$  tel que  $\bigcup_{S' \in X} S' = S$ ;
- comme problème de *transversal*<sup>5</sup>,  $V_1(G)$  est un ensemble  $S$  quelconque, les éléments de  $V_2(G)$  sont des sous-ensembles de  $S$ , et  $x \in V_1(G)$  est adjacent à  $S' \in V_2(G)$  lorsque  $x \in S'$ ; alors un dominant de  $V_2(G)$  dans  $G$  est un ensemble  $X \subseteq S$  tel que pour chaque partie  $S' \in S$  appartenant à  $V_2(G)$ , on ait  $S' \cap X \neq \emptyset$ .

On sait en particulier<sup>6</sup> que le problème *minDGB* est NP-difficile et non-APX (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme polynomial résolvant *minDGB* à un facteur constant près, sauf si  $P=NP$ ). Se pose donc la question de savoir si on peut voir le problème *minCRAS* comme un cas particulier du problème *minDGB* ou comme un problème aussi général.

Si  $H$  est un graphe biparti (et donc une instance du problème *minDGB*), il n'existe pas nécessairement d'instance  $(G, R)$  du problème *minCRAS* telle que  $H = B(G, R)$ . Cependant, appelons **sommet subsumé** d'un graphe tout sommet tel qu'il existe un autre sommet du graphe adjacent à tous ses voisins et, pour tout graphe biparti  $H$ , appelons  $V_1$ -**simplifié** de  $H$  tout graphe biparti  $H'$  tel qu'il existe une suite  $(H_0 = H, H_1, \dots, H_p = H')$ , avec  $p \geq 0$ , telle que, pour tout  $i \in [1, p]$ ,  $H_i$  soit obtenu à partir de  $H_{i-1}$  par la suppression d'un des sommets subsumés de  $V_1(H_{i-1})$ . On remarque que si  $H'$  est un  $V_1$ -simplifié de  $H$ , alors l'instance  $H$  du problème *minDGB* admet comme solution optimale toutes les solutions optimales de l'instance  $H'$ . Ce qui invite à définir comme **CRAS-représentable**

<sup>4</sup>En anglais, problème du *SET – COVER*.

<sup>5</sup>En anglais, problème du *HITTING – SET*.

<sup>6</sup>Pour des résultats plus complets, voir par exemple *SET – COVER* dans [ACG<sup>+</sup>03]

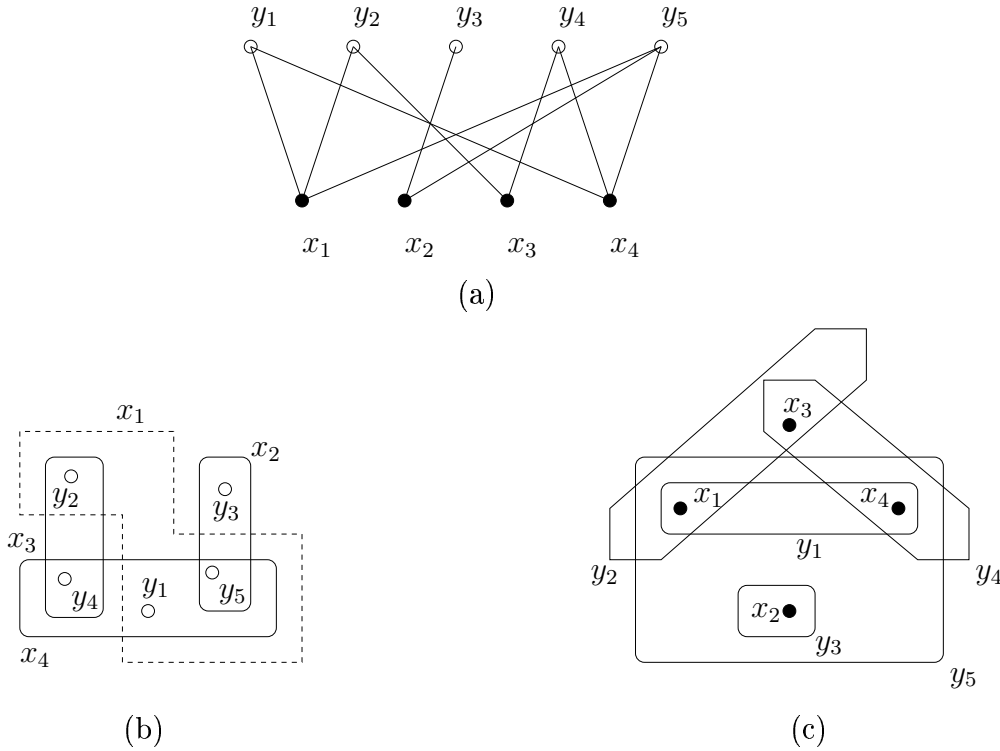


FIG. 1 – (a) Un biparti  $H$ , instance de  $minDGB$  : il faut choisir le plus petit nombre de  $x_j$  de sorte que chaque  $y_i$  soit voisin d’au moins un des  $x_j$  choisis. (b) L’interprétation *couverture d’ensemble* de l’instance  $H$  de  $minDGB$  : les  $y_i$  sont les éléments à couvrir par un nombre minimum de sous-ensembles  $x_j$ . (c) L’interprétation *transversal* de l’instance  $H$  de  $minDGB$  : les  $x_j$  sont les éléments dont il faut choisir un nombre minimum de sorte que chaque sous-ensemble  $y_i$  possède au moins un des éléments choisis.

toute instance  $H$  du problème  $minDGB$  pour laquelle il existe une instance  $(G, R)$  du problème  $minCRAS$  telle que  $H$  soit isomorphe à un  $V_1$ -simplifié de  $B(G, R)$ . Une telle instance  $(G, R)$  sera appelée une **CRAS-représentation** de  $H$  (par exemple, l’instance de  $minCRAS$  de la figure 3 est une *CRAS-représentation* de l’instance de  $minDGB$  de la figure 1 (a)).

Il est alors montré dans [CFGL05] que toute instance du problème  $minDGB$  est *CRAS-représentable*<sup>7</sup>, ce qui rend le problème  $minCRAS$  aussi difficile que le problème  $minDGB$ . Autrement dit, si on considère l’interprétation d’une instance  $(G, R)$  du problème  $minCRAS$  comme une donnée pour la recherche d’un transversal de cardinal minimum (sélectionner au moins une arête de  $G$  par chaîne de  $R$ ), perdre l’information précisant que les ensembles dont on cherche un transversal sont constitués d’arêtes

<sup>7</sup>Exprimé en d’autres termes, c’est l’argument essentiel de la preuve de la NP-complétude de  $PPM_1$  proposée dans [CFGL05].

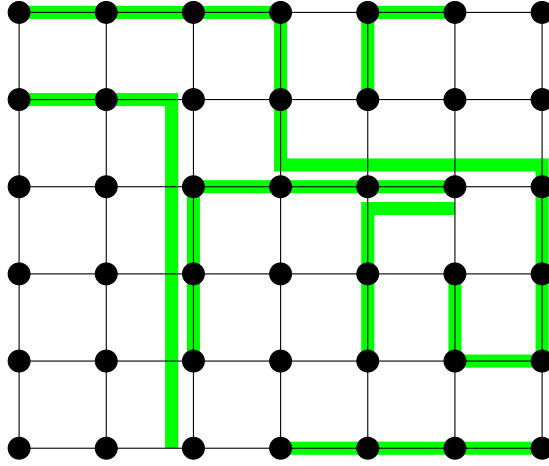


FIG. 2 – Une grille  $M_{[6 \times 7]}$  et 6 chaînes dont 5 sont des chaînes ligne-colonne.

de chaînes d'un même graphe ne modifie pas la nature du problème qui est d'être NP-difficile et non-APX.

Toutefois, là où les réseaux de communication sont concernés, des topologies particulières de graphes et des classes particulières de chaînes peuvent être pertinentes. C'est le cas des arbres et aussi le cas des grilles<sup>8</sup> : une **grille**  $M_{n \times m}$  est un graphe dont les sommets  $(i, j)$  sont définis par un numéro de ligne  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et un numéro de colonne  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , et où deux sommets sont adjacents si, et seulement si, ils ne diffèrent que sur une seule de leurs composantes et alors d'une valeur de 1. Dans une grille, une chaîne est une **chaîne de type ligne-colonne** lorsqu'elle possède un sommet  $(i, j)$  tel que tous ses autres sommets appartiennent à la ligne  $i$  ou à la colonne  $j$  (voir figure 2). Si ce sommet est unique, on l'appelle le **coin** de la chaîne, sinon on dit que la chaîne est de **type ligne** ou de **type colonne**.

Afin d'alléger un peu les locutions, si  $\mathcal{F}$  est une classe particulière de graphes, et si  $\mathcal{T}$  est un type particulier de chaînes, on dira qu'une instance de  $minDGB$  est  **$\mathcal{F}$ -représentable par des chaînes de type  $\mathcal{T}$**  si elle est  $CRAS$ -représentable par une instance  $(G, R)$  de  $minCRAS$  où  $G$  est un graphe de la classe  $\mathcal{F}$  et toutes les chaînes de  $R$  sont de type  $\mathcal{T}$ , la mention du type  $\mathcal{T}$  pouvant être omise lorsque ce type est indifférent.

Ainsi, nous montrons que tout graphe biparti est grille-représentable par des chaînes de type plus courtes chaînes, le calcul d'une représentation étant polynomial. Ce qui nous permet de conclure que le problème  $minCRAS$  reste NP-difficile et non-APX même restreint aux grilles et aux plus courtes chaînes, et d'en profiter pour finir de montrer que le problème  $PPM_r$  est NP-complet pour tout  $r \in ]0, 1]$ .

La suite de ce travail porte sur la présentation d'une heuristique gloutonne pour le problème  $minDGB$  exprimée sous la forme d'un algorithme

<sup>8</sup>Par exemple, en ce qui concerne les réseaux tout-optique, voir [Bea00, Chi97, SSV97, KT03].

qui calcule une solution avec garantie de performance dans un rapport  $\rho$  qui est un entier calculé par l'exécution de l'algorithme.

Il en résulte que lorsqu'on sait majorer  $\rho$  a priori par une constante  $k$  en restreignant les données acceptées par l'algorithme, on en conclut que le problème *minDGB* restreint en conséquence est  $k$ -APX, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme polynomial  $k$ -approché résolvant le problème. C'est notamment le cas pour le problème *minDGB* restreint aux instances arbre-représentables et pour le problème *minDGB* restreint aux instances grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne de même classe<sup>9</sup>, qu'on montre tous deux être 2-APX. Le résultat relatif aux instances arbre-représentables est déjà connu<sup>10</sup>, mais le fait qu'il existe des instances de *minDGB* qui sont arbre-représentables mais pas grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne, aussi bien que des instances de *minDGB* qui sont grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne mais pas arbre-représentables, renforce l'intérêt de la démarche présentée ici. Lorsque  $\rho = 1$ , l'algorithme *AminDGB* est évidemment exact. C'est notamment le cas pour le problème *minDGB* restreint aux instances qui sont chaîne-représentables, problème dont on retrouve ainsi la polynomialité, laquelle, à son tour, entraîne celle du problème restreint aux instances qui sont anneau-représentables<sup>11</sup>.

Enfin, nous évoquons brièvement la représentabilité « orientée » du problème *minDGB*. Lorsqu'il y a lieu (voir par exemple [BBG<sup>+</sup>97]) de représenter les réseaux de communication par des graphes orientés<sup>12</sup>, le problème *CRAS* s'étend « naturellement » sous forme du problème de *Contrôle de Routes Orientées par des Appareils de Surveillance* :

**Problème 5** *CROAS (Contrôle de Routes Orientées par des Appareils de Surveillance)*

**Donnée :** *Un graphe orienté connexe  $G$ , un ensemble  $R$  de chemins dans  $G$  et un entier positif  $h$ .*

**Question :** *Existe-t-il un sous-ensemble d'arcs  $F \subseteq E(G)$  avec  $|F| \leq h$  et tel que si  $P$  est un chemin de  $R$  alors  $E(P) \cap F \neq \emptyset$  ?*

---

<sup>9</sup>De façon informelle, si on écarte les chaînes qui sont de type ligne ou de type colonne, les chaînes de type ligne-colonne sont réparties en quatre classes suivant que leur coin est leur sommet de plus petit indice de ligne et de plus petit indice de colonne, respectivement de « plus petit, plus grand », « plus grand, plus petit » et « plus grand, plus grand » indice de ligne, indice de colonne. La répartition des chaînes de type ligne ou de type colonne peut facilement se faire ensuite, (d'ailleurs de différentes façons).

<sup>10</sup>Restreint aux arbres, le problème *minCRAS* est exactement le problème *MULTI-CUT*, pour lequel il existe un algorithme 2-approché [GVY96], y compris dans une version plus générale où les arêtes sont munies d'un poids positif ou nul.

<sup>11</sup>Ou encore cycle-représentable. Un cycle est un graphe, avec  $n \geq 3$ , isomorphe à la chaîne  $P_n$  augmentée de l'arête  $\{1, n\}$ .

<sup>12</sup>Si  $G$  est un graphe orienté, l'ensemble  $E(G)$  désigne l'ensemble de ses arcs, qui sont des couples de sommets. Un chemin d'ordre  $n$  est un graphe orienté isomorphe au graphe  $P_n$  défini par  $X(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $E(P_n) = \{(i, i+1) \mid 1 \leq i < n\}$ .



Nous montrons alors, en définissant par analogie les notions orientées, que toute instance de *minDGB* est également *CROAS*-représentable, mais nous montrons que le passage du cas non orienté au cas orienté ne transporte pas automatiquement les résultats. En effet, une **étoile** d'ordre  $n$  est un graphe  $G = (X, E)$  pour lequel les sommets de  $X$  peuvent être numérotés de 0 à  $n - 1$  de sorte que  $E = \{\{0, i\} | i \in [1..n - 1]\}$ , le sommet 0 étant le **centre** de l'étoile. On sait que restreint aux étoiles, le problème<sup>13</sup> demeure NP-difficile et 2-APX [GVY96] (au sens qu'on ne sait pas pour autant améliorer le facteur 2 valable pour les arbres en général), mais nous montrons que, dans ce cas particulier, l'orientation du graphe rend le problème plus facile : en définissant une **étoile orientée** comme une étoile dans laquelle chaque arête  $\{i, j\}$  est remplacée par un arc  $(i, j)$  et/ou un arc  $(j, i)$ , nous montrons que le problème *minCROAS* restreint aux étoiles orientées est, lui, polynomial.

La suite du rapport est organisée comme suit :

- la section 2 montre la grille-représentabilité par des plus courtes chaînes du problème *minDGB* et en déduit que le problème *minCras* est NP-difficile et non-APX ;
- la section 3 établit la NP-complétude du problème *DPGB<sub>r</sub>*, d'où on déduit celle du problème *PPM<sub>r</sub>* ;
- la section 4 propose l'algorithme *AminDGB* et sa variante *AminDGB<sub>k</sub>* qui offrent une garantie de performance, évaluée a posteriori dans le cas général, mais a priori pour certaines classes spécifiques de données ; en particulier, *AminDGB<sub>k</sub>* permet de conclure à la nature APX de la restriction du problème *minDGB* au cas des instances qui sont arbre-représentables ou grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne, ainsi qu'à la polynomialité du problème dans le cas des instances qui sont chaîne-représentables ou anneau-représentables ;
- la section 5 présente une version orientée de la *CRAS*-représentabilité du problème *DGB*, et montre que le problème *minCROAS* est à son tour NP-difficile et non-APX, tandis que le problème *minDGB* restreint aux instances qui sont étoile-orientée-représentables est polynomial ;
- la section 6 conclut le rapport.

## 2 CRAS-représentabilité de *DGB*

Soit  $H$  le graphe biparti représentant la relation d'appartenance des éléments d'un ensemble de cardinal 5 à ses sous-ensembles de cardinal 3,

---

<sup>13</sup>Il est équivalent au problème du MINIMUM SET-COVER. Voir par exemple les arbres de hauteur 1 dans [GVY96].

c'est-à-dire défini<sup>14</sup> par

$$\begin{aligned} V_1(H) &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ V_2(H) &= \binom{\{1, 2, 3, 4, 5\}}{3} \\ E(H) &= \{ \{i, C\} \mid i \in V_1(H), C \in V_2(H), i \in C \} \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une instance  $(G, R)$  du problème *minCRAS* pour laquelle on ait  $B(G, R) \approx H$ . Alors les arêtes de  $G$  sont les entiers de 1 à 5 et n'importe quel choix de trois de ces nombres définit l'ensemble des arêtes d'une des chaînes de  $R$ . On en conclut que  $G$  est connexe, que ses sommets sont de degré maximum 2, puisque sinon trois arêtes incidentes à un même sommet ne pourraient pas appartenir à une même chaîne de  $R$ , que donc  $G$  est une chaîne ou un cycle de longueur 5. Dans les deux cas, il est impossible que pour chaque choix de trois arêtes il existe une chaîne de  $G$  qui les contienne mais ne contienne pas les deux autres.

Cependant  $H$  est bien *CRAS*-représentable. On peut par exemple définir un graphe  $G$  par :

$$\begin{aligned} V(G) &= \{ x_i \mid 1 \leq i \leq 5 \} \cup \{ y_i \mid 1 \leq i \leq 5 \} \\ &\cup \{ z_{i,j,k}^1 \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \cup \{ z_{i,j,k}^2 \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \\ E(G) &= \{ \{x_i, y_i\} \mid 1 \leq i \leq 5 \} \\ &\cup \{ \{z_{i,j,k}^1, y_i\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \cup \{ \{z_{i,j,k}^1, x_j\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \\ &\cup \{ \{z_{i,j,k}^2, y_j\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \cup \{ \{z_{i,j,k}^2, x_k\} \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \} \end{aligned}$$

et en posant

$$R = \{ (x_i, y_i, z_{i,j,k}^1, x_j, y_j, z_{i,j,k}^2, x_k, y_k) \mid 1 \leq i < j < k \leq 5 \}$$

on peut vérifier que  $H$  est un  $V_1$ -simplifié de  $B(G, R)$ , ce qui met en correspondance les solutions optimales de  $H$  pour le problème *minDGB* avec une partie des solutions optimales de  $(G, R)$ . Cette mise en correspondance s'exprime plus généralement de la façon suivante, où on adopte la notation  $OPT_{minP}(I)$  pour désigner la valeur d'une solution optimale de l'instance  $I$  pour un problème d'optimisation *minP* :

**Lemme 1** *Si  $H$  est un graphe biparti *CRAS*-représentable, et si  $(G, R)$  est une *CRAS*-représentation de  $H$ , alors toute solution optimale de  $H$  pour le problème *minDGB* est, à une bijection près, une solution optimale de  $(G, R)$  pour le problème *minCRAS*. En particulier,  $OPT_{minDGB}(H) = OPT_{minCRAS}(G, R)$ .*

---

<sup>14</sup>La notation  $\binom{X}{k}$ , où  $X$  est un ensemble et  $k$  un entier, désigne l'ensemble des sous-ensembles de  $X$  de cardinal  $k$ . Nous l'avons empruntée à [MN98] .

**Preuve** Soit  $H$  un graphe biparti, soient  $x, x' \in V_1(H)$  tels que  $N_H(x) \subseteq N_H(x')$ , et soit  $H'$  le graphe obtenu en supprimant le sommet  $x$  du graphe  $H$ . Alors, en notant que  $V_2(H') = V_2(H)$ , tout  $X \subseteq V_1(H')$  qui domine  $V_2(H')$  dans  $H'$  domine  $V_2(H)$  dans  $H$  et, réciproquement, si  $X \subseteq V_1(H)$  domine  $V_2(H)$  dans  $H$ , alors  $X \setminus \{x\} \cup \{x'\}$  domine  $V_2(H')$  dans  $H'$ . Il en résulte que, pour le problème *minDGB*, toute solution optimale de  $H'$  est une solution optimale de  $H$ , résultat qui s'étend par récurrence à tout  $V_1$ -simplifié de  $H$ .

Maintenant si  $H$  est le graphe biparti du lemme, il est, par hypothèse, isomorphe à un  $V_1$ -simplifié de  $B(G, R)$ , disons encore  $H'$ . En vertu de ce qui précède, toute solution optimale  $X \subseteq V_1(H')$  de  $H'$  pour le problème *minDGB* est également une solution optimale de  $B(G, R)$  pour ce même problème, et, par définition de  $(G, R)$ , trivialement une solution optimale de  $(G, R)$  pour le problème *minCRAS*. L'isomorphisme est la bijection cherchée et l'égalité des valeurs des solutions optimales s'en déduit immédiatement. □

Le résultat suivant montre que le problème *minCRAS* est « aussi général » que le problème *minDGB*.

**Théorème 1** *Tout graphe biparti  $H$  est grille-représentable avec des chaînes de type plus courtes chaînes, et on sait calculer une telle représentation en un temps polynomial en fonction de  $|V_2(H)|$ . De plus, s'il existe un algorithme offrant une garantie de performance dans un rapport de  $\rho(|V_2(H)|)$  pour toute instance  $H$  du problème *minDGB*, alors il en existe un offrant une garantie de performance dans un rapport de  $\rho(|R|)$  pour toute instance  $(G, R)$  du problème *minCRAS*, et réciproquement.*

**Preuve** La figure 3 montre la réduction sur un exemple.

Soit  $H$  un graphe biparti avec  $V_1(H) = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $V_2(H) = \{y_1, \dots, y_m\}$ . Considérons la grille  $M = M_{n \times (n+1)}$  et, pour tout  $i \in [1, n]$  appelons  $e_i$  l'arête  $\{(i, i), (i, i + 1)\}$  de  $M$ .

À tout  $y \in V_2(H)$ , si  $i_1 < i_2 < \dots < i_{k_y}$  sont les indices  $i \in [1, n]$  pour lesquels  $x_i$  et  $y$  sont voisins dans  $H$ , on associe la chaîne  $P_y$  de  $M$  définie par :

- $(i_1, i_1)$  et  $(i_{k_y}, i_{k_y} + 1)$  sont ses extrémités ;
- pour tout  $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k_y}\}$  on a  $e_i \in E(P_y)$  ;
- si l'arête  $\{(i, j), (i, j + 1)\} \in E(P)$  alors  $x_i$  et  $y$  sont voisins dans  $H$  ;
- si l'arête  $\{(i, j), (i + 1, j)\} \in E(P)$  alors  $x_j$  et  $y$  sont voisins dans  $H$ .

En posant  $R = \{P_y\}_{y \in V_2(H)}$ , soit  $(M, R)$  l'instance du problème *minCRAS* associée à l'instance  $H$  du problème *minDGB*. Par construction de  $(M, R)$  :

- si  $e = \{(i, j), (i, j + 1)\}$  est une arête d'une chaîne  $C \in R$ , alors  $e_i$  est également une chaîne de  $C$  ;

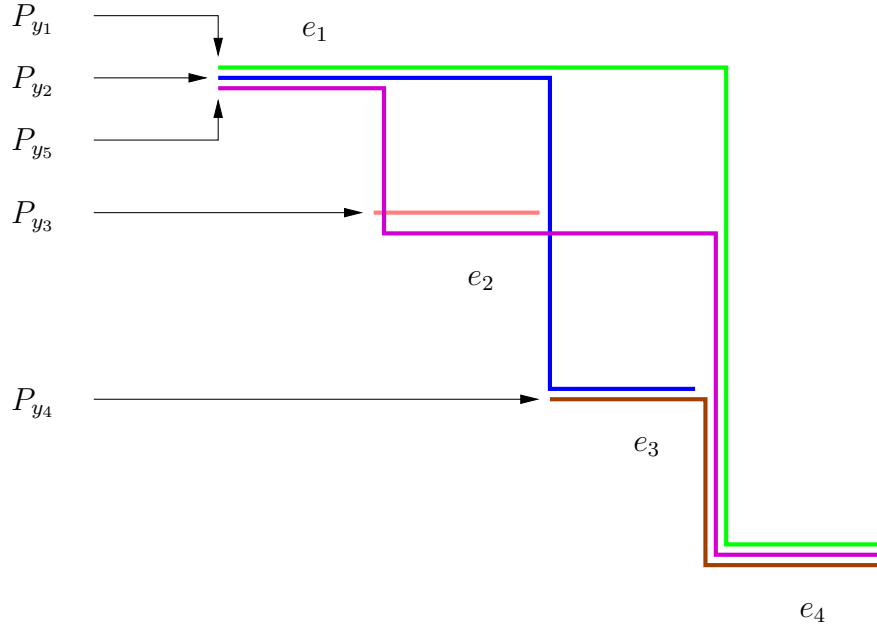


FIG. 3 – Une *CRAS*-représentation du biparti  $H$  de la figure 1 (a) dans une grille avec des plus courtes chaînes.

- si  $e = \{(i, j), (i + 1, j)\}$  est une arête d'une chaîne  $C \in R$ , alors  $e_j$  est également une chaîne de  $C$ .

Il en résulte que tout sommet  $e \in V_1(B(G, R)) \setminus \{e_i\}_{i \in [1, n]}$  est subsumé dans  $B(G, R)$  par un  $e_i$ ,  $i \in [1, n]$ , et donc que le sous-graphe de  $B(G, R)$  induit par  $\{e_i\}_{i \in [1, n]} \cup V_2(B(G, R))$  est un  $V_1$ -simplifié de  $B(G, R)$ . La bijection de  $V_1(H)$  dans  $\{e_i\}_{i \in [1, n]}$  définie par  $x_i \mapsto e_i$  permet de conclure que  $(G, R)$  est une grille-représentation de  $H$  avec des chaînes de type plus courtes chaînes, en notant que la construction de la représentation est bien polynomiale en fonction de  $|V_2(H)|$ .

Compte tenu du lemme 1, on conclut, pour ce qui concerne le résultat additionnel, en remarquant que  $|V_2(H)| = |V_2(B(G, R))| = |R|$ .

□

Les résultats connus sur le problème  $\text{minDGB}^{15}$  permettent d'en déduire immédiatement :

**Théorème 2** *Le problème  $\text{minCRAS}$ , même restreint aux plus courtes chaînes dans les grilles, est NP-difficile et non-APX. Il est approximable avec un facteur d'approximation de  $1 + \ln |R|$ .*

<sup>15</sup>Voir par exemple MINIMUM SET-COVER dans [ACG+03].

### 3 NP-complétude de $DPGB_r$ et de $PPM_r$

Le problème  $DGB$  possède une interprétation ensembliste comme couverture d'ensemble. On peut étendre « naturellement » cette interprétation au problème  $DPGB_r$  comme couverture  $r$ -partielle d'ensemble, ce qui apparente le problème  $DPGB_r$  au problème de *Couverture Partielle d'Ensemble* introduit par M. Kearns [Kea90], à la différence près que  $r$  est une constante pour le problème  $DGB_r$  et une donnée pour le problème de *Couverture Partielle d'Ensemble*. Ce qui rend bien sûr ce dernier NP-Complet puisque pour  $r = 1$  c'est le problème  $DGB$ .

Nous montrons ici que quelle que soit la valeur du rationnel  $r \in ]0, 1]$ , le problème  $DPGB_r$  est NP-Complet.

**Théorème 3** *Pour tout rationnel  $r \in ]0, 1]$ , le problème  $DPGB_r$  est NP-Complet.*

**Preuve** Il est clair que  $DPGB_r$  est dans NP. Montrons que le problème  $DGB$  restreint<sup>16</sup> aux graphes bipartis sans point isolé dans  $V_2$ , est polynomialement réductible au problème  $DPGB_r$ , ce qui établira le résultat. Un exemple de réduction est donné à la figure 4.

Soit  $I = (H, h)$  une instance du problème  $DGB$  et soit  $r = \frac{p}{q}$ . Soit  $I' = (H', p \times h)$  une instance de  $DPGB_r$  pour laquelle  $H'$  est défini par

$$H' = (p \otimes H) \cup \left( ((q - p) \times |V_2(H)|) \otimes K_2 \right)$$

c'est-à-dire que  $H'$  est l'union disjointe de  $p$  copies de  $H$  et du nombre nécessaire de copies de  $K_2$ , le graphe composé d'une unique arête, pour que  $|V_2(H')| = q \times |V_2(H)|$ . Ainsi, les sommets de  $V_2(H')$  qui proviennent des  $p$  copies de  $H$ , dont on notera  $p \otimes V_2(H)$  l'ensemble, sont en proportion de  $\frac{p}{q}$  dans  $V_2(H')$ .

Si  $X \in V_1(H)$  est une solution de l'instance  $I$  pour le problème  $DGB$ , on en déduit une solution  $X' = p \otimes X \subseteq V_1(H')$  de l'instance  $I'$  du problème  $DPGB_r$  :  $|X'| = p \times |X| \leq p \times h$  et  $X'$  domine  $p \otimes V_2(H)$  dans  $H'$ , c'est-à-dire domine  $H'$  dans une proportion  $\frac{|p \otimes V_2(H)|}{|V_2(H')|} = \frac{p \times |V_2(H)|}{q \times |V_2(H)|} = \frac{p}{q}$ .

Inversement, si  $X'$  est une solution de l'instance  $I'$  pour le problème  $DPGB_r$  et s'il existe un sommet  $y \in p \otimes V_2(H)$  qui n'a aucun voisin dans  $X'$ , comme  $|N(X')| \geq \frac{p}{q} \times |V_2(H')| = \frac{p \times q \times |V_2(H)|}{q} = |p \otimes V_2(H)|$ , il existe nécessairement un sommet  $y' \in V_2(H')$  n'appartenant pas aux  $p$  copies de  $H$  et qui est adjacent dans  $H'$  à un sommet de  $X'$ , disons  $x'$ , lequel  $x'$  n'est adjacent dans  $H'$  qu'à  $y'$ . Alors, si  $x$  est un voisin de  $y$  dans  $H$ ,  $(X' \setminus \{x'\}) \cup \{x\}$  est également une solution de l'instance  $I'$  pour le problème  $DPGB_r$ . Ce qui permet de conclure qu'il existe une solution  $X''$  de l'instance  $I'$  pour le problème  $DPGB_r$  qui domine  $p \otimes V_2(H)$  dans  $V_2(H)$ . Alors, puisque  $|X''| \leq p \times h$ , il existe nécessairement une des  $p$

---

<sup>16</sup>Cette restriction conserve la NP-complétude du problème.

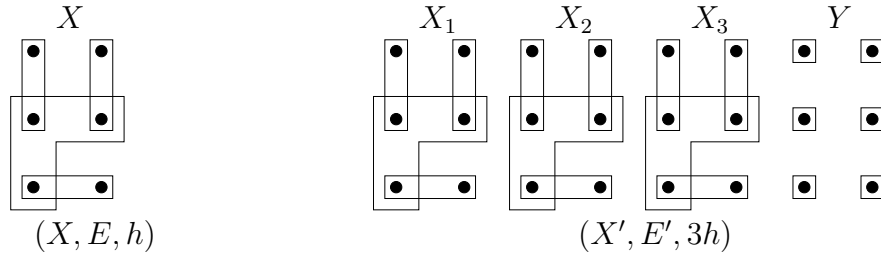


FIG. 4 – Exemple avec  $r = 3/4$  (une solution de  $DPGB_{3/4}$  pour  $(X', E', 3h)$  donne une solution de  $DGB$  pour  $(X, E, h)$  et réciproquement).

copies de  $H$ , disons  $H_{opt}$ , telle que  $|X'' \cap V_1(H_{opt})| \leq h$ , ce qui permet de conclure que l'instance  $I$  du problème  $DGB$  est une instance positive.

Ce qui achève la démonstration. □

Ce résultat nous permet maintenant de statuer sur la complexité du problème  $PPM_r$  :

**Théorème 4** *Le problème  $PPM_r$  avec poids unitaires est NP-Complet pour tout rationnel  $r \in ]0, 1]$ .*

**Preuve** En adaptant les preuves du lemme 1 et du théorème 1 afin de tenir compte de la proportion  $r$ , on montre que le problème  $DPGB_r$  est polynomialement réductible au problème  $PPM_r$ . Le théorème 3 permet de conclure. □

## 4 Un algorithme glouton pour $minDGB$

### 4.1 Une démarche gloutonne

Soit  $H$  un graphe biparti. Deux sommets  $x, y \in V_2(H)$  sont dits **en conflit**<sup>17</sup> s'ils sont à distance 2 dans  $H$ . Si  $y \in V_2(H)$ , on appelle **voisinage suffisant de  $y$  dans  $H$**  tout ensemble  $X \subseteq N_H(y)$  tel que quel que soit  $y' \in V_2(H)$ , si  $y'$  est en conflit avec  $y$  alors  $X \cap N_H(y') \neq \emptyset$ .

Tout  $y \in V_2(H)$  possède un voisinage suffisant trivial :  $N_H(y)$ . Mais le calcul d'un voisinage suffisant de cardinal minimum est en général difficile. Plus précisément, définissons comme suit le problème du *Voisinage Suffisant* :

**Problème 6** *VS (Voisinage Suffisant)*

---

<sup>17</sup>La terminologie employée ici provient de la *CRAS*-représentabilité de  $DGB$  : dans les représentations de problèmes de réseaux, notamment d'attribution de longueur d'ondes dans les réseaux tout-optique, deux chaînes d'un graphe qui partagent au moins une arête sont dites *en conflit* [BBG<sup>+</sup>97].

**Donnée :** Un graphe biparti  $H$ , un sommet  $y \in V_1(H)$  et un entier positif  $h$ .

**Question :** Existe-t-il un voisinage suffisant de  $y$  de cardinal au plus  $h$  ?

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 1** *Le problème VS est NP-complet.*

**Preuve** Le problème est clairement dans NP. Soit maintenant  $(H, h)$  une instance du problème *DGB*, et soit  $H'$  le graphe biparti obtenu en ajoutant à  $V_2(H)$  un sommet  $y_0$  adjacent à tous les sommets de  $V_1(H)$ . Alors tout  $X \subseteq V_1(H)$  est un voisinage suffisant de  $y_0$  dans  $H'$  si et seulement si  $N_H(X) = V_2(H)$ . On conclut immédiatement en rappelant que le problème *DGB* est NP-complet, même restreint aux graphes bipartis sans sommet isolé dans  $V_2$ .  $\square$

L'algorithme 1 adopte une démarche gloutonne qui calcule une solution d'une instance du problème *minDGB*, et fournit a posteriori une garantie de performances de cette solution.

**Données :** Un graphe biparti  $H$

**Résultat :** Un sous-ensemble  $X \subseteq V_1(H)$  qui domine  $V_2(H)$  et un rationnel  $\rho$  tel que  $|X| \leq \rho \times OPT_{minDGB}(H)$ .

$H_{courant} \leftarrow H$

$X \leftarrow \emptyset$

$i \leftarrow 0$

**tant que**  $V_2(H_{courant}) \neq \emptyset$  **faire**

$i \leftarrow i + 1$

    Choisir un sommet  $y_i \in V_2(H_{courant})$

    Choisir un voisinage suffisant  $X_i$  de  $y_i$

$X \leftarrow X \cup X_i$

    Retirer  $y_i$  de  $H_{courant}$  et tous les sommets  $y' \in V_2(H_{courant})$  en conflit avec  $y_i$

**fin**

$\rho \leftarrow \frac{|X|}{i}$

Retourner  $X$  et  $\rho$

**Algorithme 1 :** L'algorithme AminDGB.

**Proposition 2** *Appliqué à un graphe biparti  $H$ , l'algorithme 1 retourne un sous-ensemble  $X \subseteq V_1(H)$  qui domine  $V_2(H)$  et un rationnel  $\rho$  tels que  $|X| \leq \rho \times OPT_{minDGB}(H)$ .*

**Preuve** La convergence de l'algorithme est évidente. Appelons  $p$  la valeur finale affectée à  $i$  par l'algorithme. À l'itération  $i$ , soit  $Y_i \subseteq V_2(H_{courant})$  l'ensemble constitué du sommet  $y_i$  choisi et des sommets de  $V_2(H_{courant})$  qui sont en conflit avec lui dans  $H_{courant}$ , et soit  $Y'_i$  son complément dans  $V_2(H_{courant})$ . Comme  $X_i$  couvre  $Y_i$  dans  $V_2(H_{courant})$ , on vérifie que  $X = \bigcup_{i \in [1, p]} X_i$  domine  $V_2(H)$  dans  $H$ . D'autre part, aucun  $y_i$  n'est en conflit avec aucun sommet de  $Y'_i$ , donc avec aucun  $y_j$  pour  $j \in [i + 1, p]$ . Il en résulte que si  $X' \subseteq V_1(H)$  domine  $V_2(H)$  dans  $H$ , aucun sommet de  $X'$  n'est voisin de plus d'un  $y_i$ , pour  $i \in [1, p]$ , et donc que  $|X'| \geq p$ . Par conséquent  $OPT_{minDGB}(H) \geq p$  et l'inégalité  $|X| \leq \rho \times OPT_{minDGB}(H)$  s'en déduit immédiatement puisque  $|X| = p \times \rho$ .  $\square$

Dans la proposition 2, le rapport  $\rho$  dépend du nombre d'itérations effectuées par l'algorithme pour le calcul de la solution. On peut s'émanciper de ce décompte et le remplacer par une autre grandeur calculée au cours de l'exécution de l'algorithme, au prix d'un rapport de performance moins ajusté.

**Proposition 3** *Soit  $k_{max}$  la taille maximum prise par les voisinages suffisants choisis à chaque itération au cours de l'exécution de l'algorithme 1 appliqué au graphe biparti  $H$ . Alors l'ensemble  $X$  retourné par l'algorithme 1 est une solution  $k_{max}$ -approchée de l'instance  $H$  pour le problème  $minDGB$ .*

**Preuve** On s'appuie sur la proposition 2 et sur sa démonstration. On a :

$$p \leq OPT_{minDGB}(H)$$

et par construction de  $X$

$$|X| \leq \sum_{i \in [1, p]} |X_i|$$

(on montrerait d'ailleurs facilement que  $|X| = \sum_{i \in [1, p]} |X_i|$ ).

D'où :

$$\begin{aligned} |X| &\leq \frac{\sum_{i \in [1, p]} |X_i|}{p} \times OPT_{minDGB}(H) \\ &\leq \frac{\sum_{i \in [1, p]} k_{max}}{p} \times OPT_{minDGB}(H) = k_{max} \times OPT_{minDGB}(H) \end{aligned}$$

$\square$

Il ressort de ce qui précède que si on savait calculer polynomialement les voisinages suffisants élus à chaque itération, et si on savait majorer a priori leur taille par une constante entière  $k$ , alors le problème serait  $k$ -APX. Cela ne se peut dans le cas général, puisque le problème  $minDGB$  est non-APX. En revanche, le résultat suivant fixe des conditions suffisantes favorables.



Un voisinage  $k$ -suffisant est un voisinage suffisant de cardinal au plus  $k$ . Étant donné un entier positif  $k$ , un sommet de  $V_2(H)$  est dit  $k$ -dominable lorsqu'il possède un voisinage  $k$ -suffisant.

Étant donné un entier positif  $k$ , une classe de graphes bipartis  $\mathcal{C}$  est dite  $k$ -suffisante lorsque :

1. tout graphe biparti  $H \in \mathcal{C}$  possède au moins un sommet  $k$ -dominable qu'on sait déterminer polynomialement ainsi qu'un de ses voisinages  $k$ -suffisants ;
2. tout graphe  $H'$  obtenu à partir d'un graphe  $H \in \mathcal{C}$  par suppression de sommets de  $V_2(H)$  est encore dans  $\mathcal{C}$ .

**Données :** Un graphe biparti  $H$  appartenant à une classe  $k$ -suffisante

**Résultat :** Un sous-ensemble  $X \subseteq V_1(H)$  qui domine  $V_2(H)$  et tel que  $|X| \leq k \times OPT_{minDGB}(H)$ .

$H_{courant} \leftarrow H$

$X \leftarrow \emptyset$

$i \leftarrow 0$

**tant que**  $V_2(H_{courant}) \neq \emptyset$  **faire**

$i \leftarrow i + 1$

    Choisir un sommet  $k$ -dominable  $y_i \in V_2(H_{courant})$

    Choisir un voisinage  $k$ -suffisant  $X_i$  de  $y_i$

$X \leftarrow X \cup X_i$

    Retirer  $y_i$  de  $H_{courant}$  et tous les sommets  $y' \in V_2(H_{courant})$  en conflit avec  $y_i$

**fin**

Retourner  $X$

**Algorithme 2 :** L'algorithme  $AminDGB_k$ .

On peut alors, en se restreignant au cas des classes  $k$ -suffisantes de graphes bipartis, spécialiser l'algorithme  $AminDGB$  et définir pour tout entier positif  $k$  l'algorithme  $AminDGB_k$  (cf. algorithme 2), ce qui permet le résultat suivant.

**Théorème 5** *Soit  $k$  un entier positif et soit  $\mathcal{C}$  une classe  $k$ -suffisante de graphes bipartis. Alors le problème  $DGB$  restreint à la classe  $\mathcal{C}$  est  $k$ -APX.*

**Preuve** Il suffit d'appliquer l'algorithme 2 à une instance de la classe  $\mathcal{C}$ , en remarquant que, dans le cas des classes  $k$ -suffisantes, les opérations de choix de l'algorithme sont toujours définies et exécutables en temps polynomial. La proposition 3 permet de conclure.  $\square$

Si les conditions imposées pour qu'une classe de graphes bipartis soit  $k$ -suffisante apparaissent très fortes, la sous-section suivante montre que la  $CRAS$ -représentabilité du problème  $DGB$  fournit « naturellement » des classes de graphes bipartis  $k$ -suffisantes.

## 4.2 Des classes d'instances pour lesquelles $\text{minDGB}$ est APX

Nous présentons des classes de graphes bipartis dont la suffisance se déduit de leur  $\text{CRAS}$ -représentabilité.

Comme il est établi que tout graphe biparti est  $\text{CRAS}$ -représentable ([CFGL05], théorème 1), et comme toute solution optimale d'un biparti  $H$  pour le problème  $\text{minDGB}$  est, à une bijection près, une solution optimale de n'importe laquelle de ses  $\text{CRAS}$ -représentations pour le problème  $\text{minCRAS}$  (lemme 1), il est commode, pour étudier le problème  $\text{minDGB}$  dans ses versions de  $\text{CRAS}$ -représentation, d'étendre aux contrôles de routes dans les réseaux les définitions de  $k$ -suffisance introduites à la sous-section précédente.

Soit  $(G, R)$  une instance du problème  $\text{minCRAS}$ . On dit qu'un ensemble d'arêtes  $E \subseteq E(C)$  d'une chaîne  $C \in R$  est un **contrôle suffisant** de  $C$  dans  $(G, R)$  lorsque c'est un voisinage suffisant de  $C$  dans  $B(G, R)$ , le graphe biparti associé à l'instance  $(G, R)$ . On définit de même par extension les notions de **contrôle  $k$ -suffisant** d'une  $C \in R$  dans  $(G, R)$ , de **chaîne  $k$ -contrôlable** dans  $(G, R)$ , et de **classe  $k$ -suffisante d'instances du problème  $\text{minCRAS}$** .

Appliquer la démarche gloutonne mise en œuvre par l'algorithme 2 sur le biparti  $B(G, R)$  s'interprète alors en ces termes, en notant  $R_{\text{courant}}$  l'ensemble de chaînes modifié en cours d'exécution : à l'itération  $i$ , choisir une chaîne  $k$ -contrôlable  $C_i$  de  $R_{\text{courant}}$ , choisir un contrôle  $k$ -suffisant  $E_i$  de  $C_i$ , et supprimer  $C_i$  de  $R_{\text{courant}}$  ainsi que toutes les chaînes de  $R_{\text{courant}}$  en conflit avec elle. Le théorème 5 invite donc à rechercher des instances  $(G, R)$  du problème  $\text{minCRAS}$  telles que  $B(G, R)$  appartienne à une classe  $k$ -suffisante pour un entier positif  $k$ .

### 4.2.1 Classes 1-suffisantes

Compte tenu du théorème 5, quand il est restreint à une classe 1-suffisante de graphes bipartis, le problème  $\text{minDGB}$  devient polynomial. C'est le cas des graphes bipartis chaîne-représentables.

**Lemme 2** *Soit  $P$  une chaîne et  $R$  un ensemble de chaînes de  $P$ . Alors  $R$  possède une chaîne 1-contrôlable dans  $(P, R)$ .*

**Preuve** Soit  $P = \{x_1, \dots, x_n\}$  une chaîne et  $R$  un ensemble de chaînes de  $P$ . Pour toute chaîne  $C \in R$ , posons  $\text{imax}(C) = \max\{i \in [1, n] \mid x_i \in C\}$ , resp.  $\text{imin}(C) = \min\{i \in [1, n] \mid x_i \in C\}$ , et choisissons une chaîne  $C^*$  telle que  $\text{imax}(C^*)$  soit le plus petit possible, resp.  $\text{imin}(C^*)$  soit le plus grand possible. Alors  $\{\{x_{\text{imax}(C)-1}, x_{\text{imax}(C)}\}\}$ , resp.  $\{\{x_{\text{imin}(C)}, x_{\text{imax}(C)+1}\}\}$ , est un contrôle suffisant de  $C^*$  dans  $(P, R)$ . Ce qui permet de conclure.

□

**Proposition 4** *La classe des instances du problème  $minCRAS$  où le graphe est une chaîne, est une classe 1-suffisante.*

**Preuve** Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 1-suffisantes dont la proposition 2 affirme l'existence, est polynomial.  $\square$

On en déduit immédiatement de ce qui précède :

**Théorème 6** *Le problème  $minDGB$  restreint aux instances chaîne-représentables est polynomial.*

Où, de façon équivalente, le problème  $minCRAS$  restreint aux chaînes est polynomial.

Ce résultat peut se « généraliser » dans les grilles.

**Lemme 3** *Soit  $G$  une grille et  $R$  un ensemble de chaînes de type ligne ou de type colonne. Alors  $R$  possède une chaîne 1-contrôlable dans  $(G, R)$ .*

**Preuve** Appelons pôle d'une chaîne de type ligne, respectivement de type colonne, son sommet de plus petit numéro de colonne, respectivement de plus petit numéro de ligne. Toute chaîne ligne dont le pôle a un numéro de colonne maximum parmi les numéros de colonne des pôles des chaînes ligne de même numéro de ligne, respectivement toute chaîne colonne dont le pôle a un numéro de ligne maximum parmi les numéros de ligne des pôles des chaînes colonne de même numéro de colonne, est une chaîne 1-suffisante : son arête incidente à son pôle est un contrôle suffisant de la chaîne. Ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 5** *La classe des instances du problème  $minCRAS$  où le graphe est une grille et les chaînes sont des chaînes ligne ou des chaînes colonne est une classe 1-suffisante.*

**Preuve** Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 2-suffisantes dont la proposition 3 affirme l'existence, est polynomial.  $\square$

On en déduit immédiatement de ce qui précède :

**Théorème 7** *Le problème  $minDGB$  restreint aux instances grille-représentables par des chaînes qui sont des chaînes de type ligne ou des chaînes de type colonne est polynomial.*

Où, de façon équivalente, le problème  $minCRAS$  restreint aux grilles avec des chaînes qui sont des chaînes ligne ou des chaînes colonne est polynomial.

#### 4.2.2 Classes 2-suffisantes

Nous présentons deux classes de graphes bipartis dont les  $CRAS$ -représentations sont des instances pertinentes du problème  $minCRAS$

## Classes arbres-représentables

**Proposition 6** *Soit  $A$  un arbre et  $R$  un ensemble de chaînes de  $A$ . Alors  $R$  possède une chaîne 2-contrôlable dans  $(A, R)$ .*

**Preuve** Choisissons un sommet quelconque  $r$  de  $A$  et, pour toute chaîne  $C \in R$ , appelons coin de  $C$  le sommet de  $C$  qui est le plus proche de  $r$  dans  $A$ . Si on choisit  $C_m \in R$  de sorte que son coin soit le plus éloigné possible de  $r$ , on constate que l'ensemble des arêtes de  $C_m$  incidentes à son coin (il peut éventuellement n'y avoir qu'une arête), constitue un contrôle 2-suffisant de  $C_m$  dans  $(A, R)$ . Ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 7** *La classe des instances du problème  $\text{minCRAS}$  où le graphe est un arbre est une classe 2-suffisante.*

**Preuve** Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 2-suffisantes dont la proposition 6 affirme l'existence, est polynomial.  $\square$

On en déduit immédiatement du théorème 5 le résultat suivant.

**Théorème 8 ([GVY96])** *Le problème  $\text{minDGB}$  restreint aux instances arbre-représentables est 2-APX.*

Ou, de façon équivalente, le problème  $\text{minCRAS}$  restreint aux arbres est 2-APX.

Enfin, il est intéressant de remarquer que l'arbre-représentabilité du problème  $\text{minDGB}$  présente la particularité de pouvoir se passer de la  $V_1$ -simplification.

**Proposition 8** *Un graphe biparti  $H$  est arbre-représentable si et seulement si il existe une instance  $(A, R)$  de  $\text{minCRAS}$  telle que  $H$  soit isomorphe à  $B(A, R)$ .*

**Preuve** Découle immédiatement du lemme 4 ci-dessous.  $\square$

**Lemme 4** *Si  $(A, R)$  est une instance du problème  $\text{minCRAS}$  où  $A$  est un arbre, et si  $e \in V_1(B(A, R))$  est un sommet subsumé de  $B(A, R)$ , alors, en appelant  $A'$  l'arbre obtenu à partir de  $A$  en contractant l'arête  $e$  et  $R'$  l'ensemble des chaînes de  $A'$  obtenues à partir des chaînes de  $R$  en contractant si besoin l'arête  $e$ , le biparti  $B(A', R')$  est le sous-graphe du biparti  $B(A, R)$  obtenu par suppression du sommet  $e$ .*

**Preuve** Le fait que  $e$  soit subsumé dans  $B(A, R)$  signifie qu'aucune chaîne de  $R$  n'est réduite à l'arête  $e$  et la contraction de  $e$  entraîne de fait la contraction de chaque chaîne de  $R$  en une chaîne de  $A'$ . On conclut aisément.  $\square$

## Classes grille-représentables avec des chaînes de type ligne-colonne

Dans une grille, appelons **proprement ligne-colonne** les chaînes ligne-colonne qui ne sont pas de type ligne ni de type colonne. On peut les répartir en quatre classes suivant que leur coin est, parmi tous les sommets de la chaîne, leur sommet :

- **classe I** : de plus petit numéro de ligne et de plus petit numéro de colonne
- **classe II** : de plus petit numéro de ligne et de plus grand numéro de colonne
- **classe III** : de plus grand numéro de ligne et de plus grand numéro de colonne
- **classe IV** : de plus grand numéro de ligne et de plus petit numéro de colonne

**Lemme 5** *Soit  $G$  une grille et  $R$  un ensemble de chaînes proprement ligne-colonne appartenant à une même classe  $i$  (avec  $i \in \{I, II, III, IV\}$ ). Alors  $R$  possède une chaîne 2-contrôlable dans  $(G, R)$ .*

**Preuve** Montrons le par exemple pour la classe I. Les chaînes de  $R$  s'ordonnent suivant l'ordre produit sur les numéros de ligne et de colonne de leur coin. Soit  $C$  une chaîne de  $R$ , maximale pour ce préordre partiel. On constate que les deux arêtes de  $C$  incidentes à son coin en constituent un contrôle 2-suffisant. Ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 9** *La classe des instances du problème  $minCRAS$  où le graphe est une grille et les chaînes des chaînes proprement ligne-colonne appartenant à une même classe  $i$  (avec  $i \in \{I, II, III, IV\}$ ) est une classe 2-suffisante.*

**Preuve** Il suffit de constater que le calcul d'une des chaînes 2-suffisantes dont la proposition 5 affirme l'existence, est polynomial.  $\square$

Le fait que restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne le problème  $CRAS$  reste NP-complet [Bag05] confère son intérêt au résultat suivant.

**Théorème 9** *Le problème  $minDGB$  restreint aux instances grille-représentables par des chaînes de type ligne-colonne est APX.*

Ou, de façon équivalente, le problème  $minCRAS$  restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne est APX.

**Preuve** On démontre le théorème dans sa version  $minCRAS$ . Soit  $(G, R)$  une instance du problème  $minCRAS$  telle que  $G$  soit une grille et  $R$  un ensemble de chaînes ligne-colonne de  $G$ . Pour chaque classe  $i$  avec  $i \in \{I, II, III, IV\}$ , soient respectivement  $R_i$  le sous-ensemble des chaînes

de  $R$  qui sont dans la classe  $i$  et  $X_i$  le dominant retourné par l'algorithme 2 appliqué à l'instance  $(G, R_i)$ . D'après les résultats précédents (proposition 3 et proposition 5),  $|X_i| \leq 2 \times OPT_{minDGB}(G, R_i)$ , et par conséquent  $|X_i| \leq OPT_{minDGB}(G, R)$ . D'autre part, si  $R_0$  est l'ensemble des chaînes ligne et des chaînes colonne de  $R$ , soit  $X_0$  le dominant retourné par l'algorithme 2 appliqué à l'instance  $(G, R_0)$ . D'après les résultats précédents (proposition 3 et proposition 5),  $|X_0| \leq OPT_{minDGB}(G, R_0) \leq OPT_{minDGB}(G, R)$ . Alors

$$\bigcup_{0 \leq i \leq 5} X_i$$

est une solution de l'instance  $(G, R)$  de cardinal au plus

$$9 \times OPT_{minDGB}(G, R)$$

Ce qui permet de conclure.  $\square$

La preuve du théorème 9 établit plus précisément que le problème  $minDGB$  restreint aux instances grille-représentables par des chaînes de type ligne-colonne est 9-APX. En regroupant dans la démonstration les classes  $R_0, R_1$  et  $R_3$  d'une part, et  $R_2$  et  $R_4$  d'autre part, on aurait pu montrer que le problème est 4-APX. En fait, par une méthode différente, le problème a depuis été montré être 2-APX [Bag05], ce qui est la raison de notre moindre effort pour établir ici que le problème est APX.

### 4.2.3 Quelques remarques sur les classes 2-suffisantes

#### La classe des graphes bipartis cycle-représentables

**Proposition 10** *La classe des instances du problème  $minCRAS$  où le graphe est un cycle est 2-suffisante mais pas 1-suffisante.*

**Preuve** Soit  $(G, R)$  une instance du problème  $minCRAS$  où  $G$  est un cycle. Soit  $C \in R$  une chaîne minimale dans  $R$  au sens de l'inclusion des arêtes. On constate que l'ensemble des arêtes de  $C$  qui sont adjacentes à ses extrémités (il peut n'y avoir qu'une arête) constitue un contrôle 2-suffisant de  $C$ . Le calcul d'une telle chaîne étant manifestement polynomial, la classe des instances du problème  $minCRAS$  où le graphe est un cycle est bien 2-suffisante. En revanche, si  $G$  est un triangle et  $R$  l'ensemble de ses chaînes de longueur 2, aucune chaîne de  $R$  n'est 1-contrôlable, ce qui permet de conclure.  $\square$

Toutefois, le problème  $minCRAS$  restreint aux cycles est connu pour être polynomial. Nous montrons ici comment ce résultat peut se déduire du théorème 6.

**Corollaire 1** *Le problème  $minDGB$  restreint aux instances cycle-représentables est polynomial.*

Ou, de façon équivalente, le problème *minCRAS* restreint aux cycles est polynomial.

**Preuve** On démontre le résultat dans sa version *minCRAS*. Soit  $(G, R)$  une instance du problème *minCRAS* où  $G$  est un cycle, et soit  $e \in E(G)$ . Appelons respectivement  $G^e$  le graphe  $G$  privé de l'arête  $e$  et  $R^e$  l'ensemble des chaînes de  $R$  qui ne contiennent pas l'arête  $e$ . Soit alors  $X^e$  un contrôle optimal de  $(G^e, R^e)$ , qu'on sait calculer polynomialement en vertu du théorème 6, puisque  $G^e$  est une chaîne. On constate que tout élément de l'ensemble  $\{\{e\} \cup X^e\}_{e \in E(G)}$  de plus petit cardinal possible est une solution optimale de  $(G, R)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

### À propos des classes 2-suffisantes

Nous venons de voir que les instances de *DGB* qui sont arbre-représentables ou grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe (*I*, *II*, *III* ou *IV*) forment une classe 2-suffisante. En outre, l'ensemble des instances de *minDGB* qui sont arbre-représentables et l'ensemble de celles qui sont grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe ont à l'évidence une intersection non vide. Nous allons montrer qu'il ne s'agit pourtant pas du même ensemble. A cet effet, nous notons sous forme de graphe les conflits en définissant le **graphe des conflits** d'un biparti  $H$  comme le graphe admettant  $V_1(H)$  comme ensemble de sommets et en définissant le voisinage d'un sommet, dans le graphe des conflits, comme l'ensemble des sommets de  $V_1(H)$  qui sont en conflit avec lui.

**Lemme 6** *Soit  $H$  un graphe biparti et soit  $(G, R)$  une CRAS-représentation de  $H$ . Les graphes des conflits de  $H$  et de  $(G, R)$  sont isomorphes.*

**Preuve** Le résultat découle de la définition même de la *CRAS*-représentation : la suppression d'un sommet subsumé d'un biparti  $H$  ne change pas son graphe des conflits.  $\square$

**Proposition 11** *Il existe des instances de *minDGB* qui ne sont pas arbre-représentables mais grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe.*

**Preuve** Considérons le biparti  $H$  avec  $V_1(H) = \{x_0, \dots, x_5\}$ ,  $V_2(H) = \{y_0, \dots, y_6\}$  et dont les arêtes sont données par la figure 5 (a).

D'un côté on peut vérifier, grâce par exemple à la figure 5 (c), que  $H$  est bien grille-représentable avec des chaînes ligne-colonne d'une même classe.

D'un autre côté  $H$  n'est pas arbre-représentable. En effet, appelons  $G$  le graphe des conflits de  $H$  et soit  $(A, R)$  une arbre-représentation de  $H$ . D'après le lemme 6, le graphe des conflits de  $(A, R)$  est isomorphe à  $G$ .

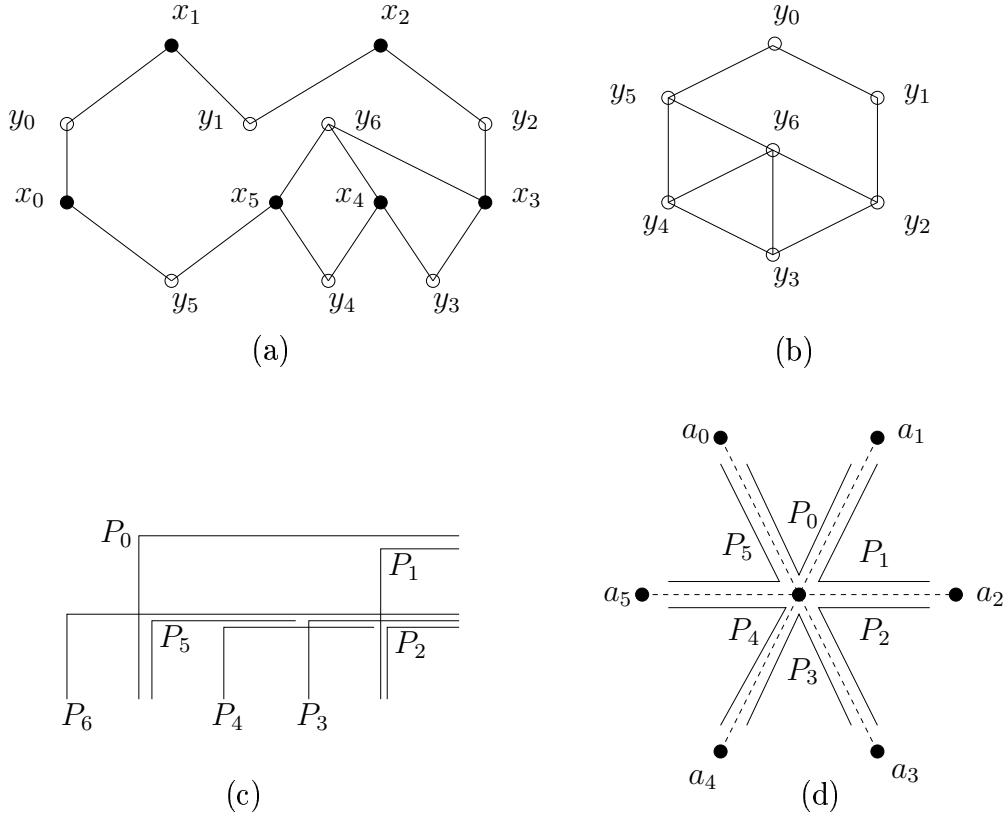


FIG. 5 – (a) Le biparti  $H$  d’une instance  $I$  de  $\min DGB$ . (b) Le graphe des conflits de  $H$  contient un cycle sans corde de longueur 6. (c) Une grille-représentation de  $I$  avec des chaînes ligne-colonne d’une même classe. (d) Si  $I$  est arbre-représentable alors toute arbre-représentation  $(A, R)$  contient une « pie » dont les chaînes sont les chaînes  $P_0$  à  $P_5$ . On peut identifier l’arête  $\{a_i, b\}$  au sommet  $x_i$  de  $H$  et la chaîne  $P_j$  au sommet  $y_j$  de  $H$ . Puisque  $A$  est un arbre, la septième chaîne  $P_6$  ne peut pas passer à la fois par les arêtes  $\{b, a_3\}$ ,  $\{b, a_4\}$  et  $\{b, a_5\}$ .



Comme  $G$  possède un cycle sans corde de longueur 6 dont  $(y_0, \dots, y_5)$  est un des parcours (cf. figure 5 (b)),  $A$  possède [GJ85] :

1. une étoile à 6 branches que nous noterons chacune  $\{a_i, b\}$  pour tout  $i \in [0, 5]$ ;
2. 6 chaînes  $P_0, \dots, P_5$  telles que pour tout  $i \in [0, 4]$ , les arêtes  $\{a_i, b\}$  et  $\{a_{i+1}, b\}$  appartiennent à la chaîne  $P_i$  et les arêtes  $\{a_5, b\}$  et  $\{a_0, b\}$  à la chaîne  $P_5$  (cf. figure 5 (d)).

(dans [GJ85], une étoile avec de telles chaînes est appelée « **pie** »).

La septième chaîne,  $P_6$ , est en conflit avec  $P_2, P_3, P_4$  et  $P_5$ , mais ni avec  $P_0$ , ni avec  $P_1$ . En considérant les sous-arbres de  $A$  engendrés par la suppression du sommet  $b$ , on constate que  $e_3 := \{a_3, b\}$  et  $e_5 := \{a_5, b\}$  sont des arêtes de  $P_6$  et que toute autre arête  $e$  de  $A$  générant dans  $B(A, R)$  un sommet de  $V_1(B(A, R))$  de degré 3 ne peut être que dans  $E(P_2) \cap E(P_3) \cap E(P_6)$  ou dans  $E(P_4) \cap E(P_5) \cap E(P_6)$ . Autrement dit,  $N_{B(A, R)}(e) = N_{B(A, R)}(e_3)$  ou  $N_{B(A, R)}(e) = N_{B(A, R)}(e_5)$ . Donc, contrairement à  $V_1(H)$ , il n'existe pas dans  $V_1(B(A, R))$  3 sommets de degré 3 dont les voisinages sont 2 à 2 différents. Le fait que la propriété reste vraie pour tout  $V_1$ -simplifié de  $B(A, R)$  permet de conclure.  $\square$

Mais l'ensemble des instances arbre-représentables n'est pas non plus inclus dans celui des instances grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne :

**Proposition 12** *Il existe des instance de  $minDGB$  qui ne sont pas grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne mais arbre-représentables, l'arbre pouvant éventuellement être binaire.*

**Preuve** Soit  $H$  une instance de  $minDGB$  avec  $V_1(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $V_2(H) = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}\}$ . Pour tout sommet  $x \in V_1(H)$  et  $y \in V_2(H)$ ,  $\{x, y\}$  est une arête de  $H$  ssi  $x \in y$  (voir figure 6).

**$H$  est arbre-représentable.** Soit  $I' = (A, R_A)$  une instance de  $minCRAS$  où  $A$  est un arbre d'ordre 6 : 4 feuilles et 2 nœuds internes de degré 3. Appelons  $e_i$  pour  $i \in [1, 5]$  les arêtes de  $A$ . L'une des extrémités de  $e_3$  est incidente aux arêtes  $e_1$  et  $e_2$ , l'autre extrémité de  $e_3$  est incidente aux arêtes  $e_4$  et  $e_5$  (voir figure 6). Pour tout  $y \in V_2(H)$ , la chaîne dont l'ensemble des arêtes est  $\{e_i | i \in y\}$  est une chaîne de  $R_A$  et  $R_A$  n'en possède pas d'autre. On peut facilement vérifier que le biparti associé à  $I'$  est  $H$ , qui est un arbre binaire.

**$H$  n'est pas grille-représentable avec des chaînes ligne-colonne.** Soit  $I'' = (G, R_G)$  une instance de  $minCRAS$  où  $G$  est une grille et  $R_G$  un routage de chaîne ligne-colonne. Si  $I''$  est une graphe-représentation

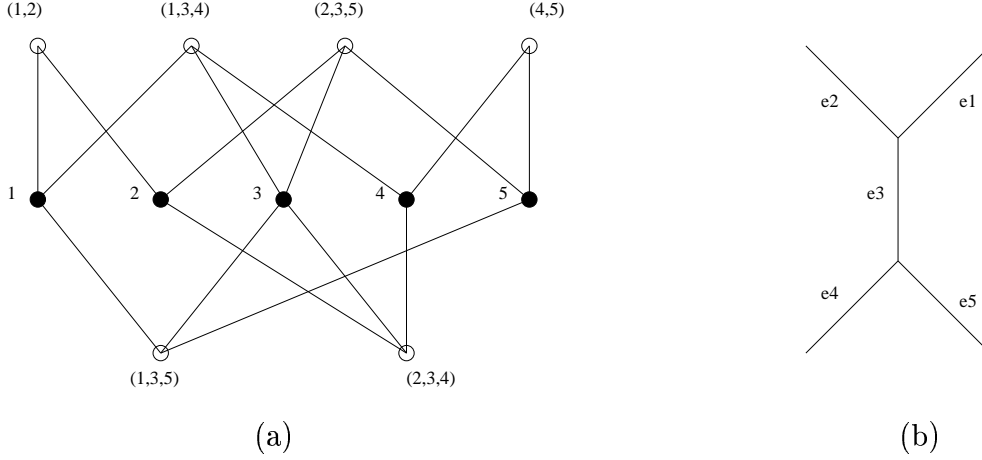


FIG. 6 – (a) Une instance  $H$  de  $minDGB$ . (b)  $H$  peut être représenté sur cet arbre : les chaînes sont toutes les chaînes possibles entre les feuilles de cet arbre.

de  $H$  alors il existe 5 arêtes  $e_i$  de  $G$ , avec  $i \in [1, 5]$ , et 6 chaînes  $P_j$  de  $R_G$ , avec  $j \in [1, 6]$ , telles que :

1.  $\{e_1, e_2\} \subseteq E(P_1)$  et  $\{e_3, e_4, e_5\} \cap E(P_1) \neq \emptyset$
2.  $\{e_4, e_5\} \subseteq E(P_2)$  et  $\{e_3, e_1, e_2\} \cap E(P_2) \neq \emptyset$
3.  $\{e_1, e_3, e_4\} \subseteq E(P_3)$  et  $\{e_2, e_5\} \cap E(P_3) \neq \emptyset$
4.  $\{e_1, e_3, e_5\} \subseteq E(P_4)$  et  $\{e_2, e_4\} \cap E(P_4) \neq \emptyset$
5.  $\{e_2, e_3, e_4\} \subseteq E(P_5)$  et  $\{e_1, e_5\} \cap E(P_5) \neq \emptyset$
6.  $\{e_2, e_3, e_5\} \subseteq E(P_6)$  et  $\{e_1, e_4\} \cap E(P_6) \neq \emptyset$

- (a) Compte tenu de 1., 3. et 5., respectivement 2., 5. et 6., on a la propriété que, pour chaque choix d'une arête dans l'ensemble  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , respectivement  $\{e_4, e_5, e_3\}$ ,  $R_G$  possède une chaîne qui ne contient pas l'arête choisie mais qui contient les deux autres.

On en conclut que  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , respectivement  $e_4, e_5$  et  $e_3$ , ne peuvent pas être alignées.

- (b) Supposons que  $e_1$  et  $e_3$  soient alignées. Alors  $e_2$  leur est orthogonale et, de plus, sa rangée (i.e. sa ligne ou sa colonne suivant que l'arête est ligne ou colonne) sépare  $e_1$  et  $e_3$  (à cause de (a)).

Si  $e_4$  est orthogonale à  $e_1$  et  $e_3$ , alors  $e_4$ , qui est donc parallèle à  $e_2$ , est alignée avec  $e_2$  (à cause de 5.), ce qui ne se peut (à cause de 3., puisque  $e_2$  sépare  $e_1$  et  $e_3$ ). Donc  $e_4$  est alignée avec  $e_1$  et  $e_3$  (à cause de 3.) et, par symétrie,  $e_5$  est également alignée avec  $e_1$  et  $e_3$ , ce qui contredit (a).

Donc  $e_1$  et  $e_3$  ne sont pas alignées et, par symétrie,  $e_2$  et  $e_3$  non plus. Il découle alors de (a) que  $e_3$  est orthogonale à  $e_1$  et  $e_2$  et que sa rangée les sépare.

- (c) Par symétrie,  $e_3$  est orthogonale à  $e_4$  et  $e_5$  et sa rangée les sépare. Donc  $e_1, e_2, e_4$  et  $e_5$  sont alignées (à cause de 5.), mais le fait que  $e_3$  sépare d'une part  $e_2$  et  $e_3$ , d'autre part  $e_4$  et  $e_5$ , contredit alors 1. et 2..
- (d) Ce qui permet de conclure. □

Notons qu'évidemment il existe des instances de *minDGB* qui ne sont ni arbre-représentables ni grille-représentables avec des chaînes ligne-colonne (d'une même classe ou pas) puisque le problème *minDGB* est connu pour être non-APX.

## 5 À propos du cas orienté

Soit  $(G, R)$  une instance du problème *minCROAS*. On note  $B(G, R)$  le graphe biparti pour lequel  $V_1 = E(G)$ ,  $V_2 = R$  et tel qu'un arc  $e \in E(G)$  est adjacent dans  $B(G, R)$  à un chemin  $C \in R$  si et seulement si  $e$  est un arc de  $C$ . Comme dans le cas non orienté, on constate que  $(G, R, h)$  est une instance positive du problème *CRAS* si et seulement si  $(B(G, R), h)$  est une instance positive du problème *DGB*, et on définit comme **CROAS-représentable** toute instance  $H$  du problème *minDGB* pour laquelle il existe une instance  $(G, R)$  du problème *minCROAS* telle que  $H$  soit isomorphe à un  $V_1$ -simplifié de  $B(G, R)$ . Une telle instance  $(G, R)$  sera appelée une **CROAS-représentation** de  $H$ .

En définissant les **grilles orientées** comme les graphes obtenus à partir des grilles par le remplacement de chaque arête par deux arcs opposés (on obtient donc un graphe orienté symétrique), le théorème 1 s'étend alors sous la forme :

**Théorème 10** *Tout graphe biparti  $H$  est grille-orientée-représentable avec des chemins de type plus courts chemins, et on sait calculer une telle représentation en un temps polynomial en fonction de  $|V_2(H)|$ . De plus, s'il existe un algorithme offrant une garantie de performance dans un rapport de  $\rho(|V_2(H)|)$  pour toute instance  $H$  du problème *minDGB*, alors il en existe un offrant une garantie de performance dans un rapport de  $\rho(|R|)$  pour toute instance  $(G, R)$  du problème *minCROAS*, et réciproquement.*

**Preuve** Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1 en «orientant» dans le sens croissant des numéros de lignes et de colonnes les arêtes de chaque chaîne  $P_y$  pour en faire des chemins. □

Ce qui, comme dans le cas non orienté, renseigne immédiatement sur la complexité du problème *minCROAS* :

**Théorème 11** *Le problème *minCROAS*, même restreint aux plus courts chemins dans les grilles orientées, est NP-difficile et non-APX. Il est approximable avec un facteur d'approximation de  $1 + \ln |R|$ .*

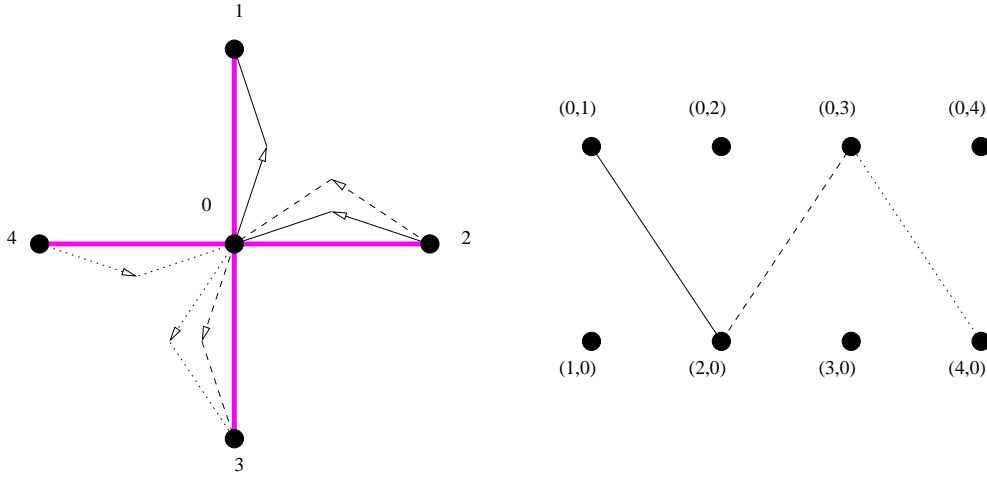


FIG. 7 – (a) Une instance  $(G, R)$  de CRAS où  $G$  est une étoile à 5 sommets et  $R$  un ensemble de 3 chemins. (b) Le biparti  $B = (X, Y, E)$  possède 3 arêtes. L’arête  $\{(2, 0), (0, 1)\}$  représente le chemin de  $R$  qui passe, dans l’ordre, par les sommets 2, 0 et 1 de l’étoile. L’arête  $\{(2, 0), (0, 3)\}$  représente le chemin qui passe par les sommets 2, 0 et 3. Enfin, l’arête  $\{(4, 0), (0, 3)\}$  représente le chemin de  $R$  qui passe par les sommets 4, 0 et 3.

Mais les résultats ne glissent pas tous à l’identique du cas non orienté au cas orienté, comme l’illustre le résultat suivant.

**Théorème 12** *Le problème CROAS restreint aux étoiles orientées est dans P.*

**Preuve** Soit  $I = (G, R, h)$  une instance du problème CROAS où  $G$  est une étoile orientée de sommets  $0, 1, \dots, n - 1$  et de centre  $0$ .

Nous construisons le biparti non orienté  $B = (X, Y, E)$  où  $X$  est le sous-ensemble des arcs de  $G$  dont l’origine est un sommet de l’intervalle  $[1, n]$  et  $Y$  le sous ensemble d’arcs de  $G$  dont l’origine est  $0$ . Il existe une arête entre un sommet  $x$  de  $X$  et  $y$  de  $Y$  si et seulement s’il existe dans  $R$  un chemin constitué des deux arcs  $x$  et  $y$  (cf. figure 7).

On vérifie alors que tout contrôle  $F$  de  $R$  dans  $G$  induit dans  $B$  une couverture  $Z$  des arêtes par des sommets avec  $|F| = |Z|$ . Réciproquement, toute couverture des arêtes par des sommets dans  $B$  induit un contrôle de  $R$  dans  $G$  de même cardinalité. Le fait que le problème de *Couverture des arêtes par des sommets* restreint aux graphes bipartis soit notoirement polynomial<sup>18</sup>, permet de conclure.  $\square$

<sup>18</sup>Il est équivalent, dans les graphes bipartis, au calcul d’un couplage de cardinal maximum (théorème de König-Egerváry). Voir par exemple [CR04].

## 6 Conclusion

Le problème *minCRAS* est NP-difficile et non-APX dans le cas général, et il reste non-APX si on le restreint aux grilles avec des plus courtes chaînes.

Une démarche gloutonne a été mise en œuvre par l'algorithme *AminDGB* qui peut, selon les restrictions de données imposées en entrée, conduire à des résultats avec garantie de performance, voire à des résultats exacts. Ainsi il a été prouvé que restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne de même classe, le problème *minCRAS* devient 2-approximable, ce qui permet de conclure immédiatement que ce même problème restreint aux grilles avec des chaînes de type ligne-colonne est APX. On a, par ailleurs, retrouvé la même approximation dans le cas des arbres (rappelons qu'il n'y a pas a priori de transformation «évidente» des instances dans les grilles avec des chaînes de type ligne-colonne en des instances dans les arbres, ni inversement). Enfin, appliqué aux chaînes, l'algorithme *AminDGB* donne le résultat exact et permet de le donner pour les cycles.

Dans le cas des étoiles, l'équivalence avec le problème de la *Couverture des arêtes d'un graphe par des sommets*<sup>19</sup> préserve les facteurs d'approximation. Ainsi, améliorer notre approximation dans les arbres améliorerait du même coup l'approximation pour le problème *Couverture des arêtes d'un graphe par des sommets*, problème largement étudié et pour lequel 2 est apparemment le meilleur rapport d'approximation constant connu. On notera cependant que la réciproque n'est pas «naturellement» assurée, ce qui invite à étudier plus avant les possibilités de l'algorithme *AminDGB*.

Enfin, le problème *minCROAS*, une extension directe du problème *minCRAS* au cas orienté, est également NP-difficile et non-APX dans le cas général, et il reste non-APX si on le restreint aux grilles orientées avec des plus courts chemins.

Cependant, le résultat obtenu pour les étoiles orientées, pour lesquelles le problème *minCROAS* est polynomial alors que le problème *minCRAS* dans les étoiles est équivalent au célèbre problème de couverture des arêtes par des sommets (en anglais VERTEX COVER), invite à poursuivre l'étude du problème du contrôle dans les graphes orientés.

## Références

- [ACG<sup>+</sup>03] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, and M. Protasi. *Complexity and Approximation*. Springer, 2003.
- [Bag05] G. Bagan. Sur quelques variations autour du problème du transversal minimum. Master's thesis, Université Montpellier 2, 2005. DEA d'Informatique.

---

<sup>19</sup>Voir par exemple MINIMUM VERTEX-COVER dans [ACG<sup>+</sup>03]

- [BBG<sup>+</sup>97] B. Beauquier, J-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Pérennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. In IEEE Press, editor, *Proc. of IPPS'97, 2nd Workshop on Optics and Computer Science (WOCS'97)*, Genève, apr 1997.
- [Bea00] Bruno Beauquier. *Communications dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, jan 2000.
- [CFGL05] Claude Chaudet, Éric Fleury, and Isabelle Guérin Lassous. Positionnement optimal de sondes pour la surveillance active et passive de réseaux. Colloque Francophone sur l'Ingénierie des Protocoles 2005 (CFIP), Bordeaux, mars 2005.
- [Chi97] Thierry Chich. *Optimisation du routage par déflexion dans les réseaux de télécommunications métropolitains*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, dec 1997.
- [CR04] Olivier Cogis and Claudine Robert. *Théorie des Graphes*. Vuibert, 2004.
- [GJ85] Martin Charles Golumbic and Robert E. Jamison. The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 38 :8–22, 1985.
- [GVY96] N. Garg, V. Vazirani, and M. Yannakakis. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications. *SIAM Journal on Computing*, 25(2) :235–251, 1996.
- [Kea90] Michael Kearns. *The Computational Complexity of Machines Learning*. MIT Press, Cambridge MA, 1990.
- [KT03] Mustapha Kchikech and Olivier Togni. Paths coloring algorithms in mesh networks. In Cristian Calude, Michael J. Dinneen, and Vincent Vajnovszki, editors, *DMTCS*, pages 193–202. Springer-Verlag GmbH, 2003. Lecture Notes in Computer Science (volume 2731).
- [MN98] J. Matoušek and J. Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Carendon Press, 1998. p. 56.
- [NT04] Hung X. Nguyen and Patrick Thiran. proceedings of active measurement for multiple link failures diagnosis in ip networks (pam2004). In *Passive and Active Measurement Workshop*, Antibes - Juan-lès-Pins, France, Avril 2004. Springer-Verlag. Lecture Notes of Computer Science (volume 3015).
- [SSV97] Heiko Schröder, Ondrej Sýkora, and Imrich Vrt'o. Optical all-to-all communication for some product graphs. In *Proceedings of the 24th Seminar on Current Trends in Theory and Practice of Informatics*, 1997.