



**HAL**  
open science

## De la granulosité des noyaux d'échantillonnage

Kevin Loquin, Olivier Strauss

► **To cite this version:**

Kevin Loquin, Olivier Strauss. De la granulosité des noyaux d'échantillonnage. LFA: Logique Floue et ses Applications, Oct 2006, Toulouse, France. pp.387-394. lirmm-00110398

**HAL Id: lirmm-00110398**

**<https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00110398v1>**

Submitted on 27 Oct 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# De la granulosité des noyaux d'échantillonnage

## About granularity of sampling kernels

Olivier Strauss<sup>1</sup>

Kevin Loquin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Olivier.Strauss@lirmm.fr

<sup>2</sup> Kevin.Loquin@lirmm.fr

LIRMM, Université Montpellier II

161, rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 5, France

### Résumé :

Nous proposons dans cet article de caractériser le comportement d'un noyau d'échantillonnage sommatif par une grandeur que nous appelons *granulosité*. Nous montrons que cette caractérisation permet une adaptation comportementale entre noyaux sommatifs. Nous comparons cette adaptation à l'adaptation utilisée classiquement en statistiques non paramétriques.

### Mots-clés :

granulosité, noyau sommatif, adaptation

### Abstract:

In this paper, we propose the *granularity* as a characterization of the behavior of a summative sampling kernel. We show that this characterization allows a behavioral adaptation. We compare this adaptation to the adaptation classically used in non parametric statistics.

### Keywords:

granularity, summative kernel, adaptation

## 1 Introduction

Les signaux numériques sont généralement des ensembles de valeurs réelles quantifiées provenant de l'observation d'un système physique que l'on souhaite mesurer, ou dont on souhaite analyser ou modifier le comportement. Ces valeurs sont organisées chronologiquement ou spatialement de façon ordonnée si la mesure est systématique ou désordonnée en cas d'observation aléatoire. Par exemple, un signal numérique acoustique est une série chronologique régulière dont les valeurs représentent l'amplitude de la déflagration locale perçue par une membrane réceptrice (micro) pendant une durée donnée. Une image numérique est une mesure locale (et incomplète) de la luminance en des sites régulièrement répartis sur un support (rétine). Une séquence vidéo est une me-

sure de la luminance échantillonnée indexée à la fois chronologiquement et spatialement.

S'il existe une grande quantité de problèmes en traitement du signal qui peuvent faire l'objet d'une approche purement numérique, la plupart des problématiques de filtrage, de reconstruction, de déconvolution ou d'analyse sont plus aisées à formaliser dans l'espace continu. Pour cette classe de problèmes, le noyau sommatif joue un rôle primordial de passage d'un problème continu à un problème discret et vice-versa. Il permet de définir un voisinage pondéré de chaque échantillon numérique, permettant d'étendre la valeur de la mesure aux points voisins, c'est l'interpolation, d'atténuer les effets des aléas de mesure en utilisant une ergodicité supposée de ce bruit, c'est la régularisation, ou enfin de simplement représenter la relation entre le signal original continu et son observation, c'est l'échantillonnage.

En traitement du signal, les noyaux sont souvent utilisés pour réaliser ces trois opérations de façon conjointe à tel point que les arguments avancés pour le choix d'une méthode aboutissent souvent à des prises de décision contradictoires.

En traitement d'images, plus particulièrement, la plupart des algorithmes d'estimation, de filtrage et d'analyse utilisent les noyaux sommatifs. Leur rôle principal est d'assurer le transfert continu/discret. La reconstruction tomographique en est un bon exemple. Globalement,

reconstruire une image tomographique consiste à estimer une image de la coupe d'un objet à partir de ses projections. La modélisation mathématique de la relation entre l'image à reconstruire et ses projections fait intervenir un opérateur intégrale, appelé transformée de Radon, dont la discrétisation fait intervenir un noyau sommatif. L'image est recherchée dans la classe des images obtenues par interpolation par un autre noyau sommatif d'une image échantillonnée.

En statistiques non paramétriques également, et plus particulièrement en estimation de densité de probabilité, les noyaux sommatifs sont très employés. Ils sont d'ailleurs le coeur de la méthode de Parzen Rosenblatt (voir [2, 4]).

Dans ces différents domaines applicatifs que sont le traitement du signal et l'estimation de densité de probabilité, la forme du noyau, par le biais de la fonction de base  $K$ , et son champ d'action ou son rayon d'influence, par le biais de son support  $D$  ou de sa largeur de bande  $\Delta$ , paramètrent les différents algorithmes ou différentes méthodes employés.

En traitement du signal, on constate souvent des guerres d'écoles pour imposer l'optimalité de tel ou tel noyau dans les méthodes. Alors qu'en estimation de densité de probabilité par la méthode à noyau, les noyaux sont supposés échangeables du moment que l'on adapte leurs largeurs de bande pour uniformiser leur comportement asymptotique.

Cette approche sous-entend qu'il existe une mesure permettant de caractériser le comportement du noyau, utilisé comme voisinage pondéré ou comme fenêtre d'intégration, avec une largeur de bande donnée. Le comportement d'un noyau peut être caractérisé par l'*étendue du voisinage pondéré* qu'il représente, qui est suivant les circonstances d'utilisation du noyau :

- son *pouvoir intégrateur*, lorsqu'on fait des acquisitions ou des mesures de signal,
- son *pouvoir de résolution*, dans la reconstruction d'un signal,

- sa *capacité à contenir de l'information ou à collecter des observations* pour l'estimation de densité par la méthode de Parzen Rosenblatt.

Par analogie avec les rough sets de Pawlak [3], on appelle **granulosité** cette mesure. Pour Pawlak, la granulosité (*granularity*) est un marqueur de résolution ou d'indistinguabilité de granules, notion qui rejoint la notion intuitive de pouvoir de résolution.

La variance, la largeur de bande ou de support de noyaux pourraient être de bons candidats, en ce sens que l'étendue du voisinage pondéré croît avec ces trois grandeurs. Cependant, la granulosité doit aussi permettre de définir des classes de noyaux dont les comportements sont équivalents. Aucun de ces trois indices ne convient alors.

Nous proposons de définir la **granulosité** d'un noyau sommatif en nous appuyant sur la transformation probabilité  $\rightarrow$  possibilité (ou transformation  $P \rightarrow \Pi$ ) proposée par Dubois et al. [1].

Cet article est organisé de la façon suivante : la section 2, est dédiée aux noyaux sommatifs et à leur utilisation en traitement du signal et en statistiques. Nous y présentons la notion d'adaptation entre noyaux sommatifs. Dans la section 3, nous présentons les noyaux non sommatifs et la transformation  $P \rightarrow \Pi$ . Cette transformation permet d'associer, à tout noyau sommatif, un noyau non sommatif. Dans la section 4, nous proposons une définition de la **granulosité** d'un noyau sommatif. Nous comparons ensuite, dans la section 5, l'adaptation basée sur ce marqueur de comportement à l'adaptation présentée en section 2.

## 2 Noyaux sommatifs

### 2.1 Noyaux d'échantillonnage ou passage continu/discret

Un noyau sommatif (ou noyau probabiliste) est une fonction  $\eta$  (parfois une distribution) généralement monomodale, symétrique,

centrée et vérifiant la propriété de sommativité :

$$\int_{\Omega} \eta(\omega) d\omega = 1 \quad (1)$$

Soit  $(S_n)_{n=1, \dots, N}$  un signal échantillonné de dimension finie.  $S_n$  peut être considéré comme la valeur de la fonction de mesure au point  $\omega_n$  :

$$S_n = S(\omega_n) \quad (2)$$

Le signal  $S(\omega)$  peut être vu comme une convolution du signal  $s(\omega)$  avec la réponse indicielle du capteur  $\nu(\omega)$  :

$$S(\omega) = \int_{\Omega} s(u) \nu(\omega - u) du \quad (3)$$

Parce que  $S(\omega)$ , l'observation de  $s(\omega)$ , est échantillonnée, on n'a accès à cette observation qu'en des valeurs discrètes et généralement uniformément espacées,  $(\omega_n)_{n=1, \dots, N}$ . Soit  $\Delta$  ce pas d'échantillonnage :

$$\omega_n = \omega_0 + n\Delta \quad (4)$$

Le noyau de reconstruction  $\eta$  permet de réaliser une interpolation de l'observation échantillonnée  $(S_n)_{n=1, \dots, N}$ , par la formule :

$$\hat{S}(\omega) = \sum_{n=1}^N \eta(\omega - \omega_n) S_n = (S * \eta)(\omega) \quad (5)$$

Donc en final, il existe une relation entre la valeur du signal reconstruite par interpolation, et la valeur du signal original :

$$\hat{S}(\omega) = \sum_{n=1}^N \eta(\omega - \omega_n) \int_{\Omega} s(u) \nu(\omega_n - u) du \quad (6)$$

Et donc,

$$\hat{S}(\omega) = \int_{\Omega} s(u) \left( \sum_{n=1}^N \eta(\omega - \omega_n) \nu(\omega_n - u) \right) du \quad (7)$$

Si l'on souhaite que le noyau  $\eta$  ne réalise qu'une interpolation, c'est-à-dire, tel que  $\hat{S}(\omega_n) = S_n$ ,  $\forall n \in \{1, \dots, N\}$ , il faut et il suffit que son support soit dans  $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$ .

En ce qui concerne le noyau  $\nu$ , il représente l'intégration spatiale ou temporelle du signal original  $s$ . Si les conditions de Shannon sont respectées concernant l'échantillonnage, alors le support de ce noyau est aussi dans l'intervalle  $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$ . La formule (7) montre que la relation entre la valeur du signal reconstruite par interpolation  $\hat{S}$ , et la valeur du signal original  $s$  se fait au travers d'un noyau  $\kappa(\omega)$ , de support  $\left(-\Delta, \Delta\right)$  tel que :

$$\hat{S}(\omega) = \int_{\Omega} s(u) \kappa(\omega - u) du \quad (8)$$

où

$$\kappa(\omega - u) = \sum_{n=1}^N \eta(\omega - \omega_n) \nu(\omega_n - u) \quad (9)$$

## 2.2 Lien avec les noyaux de Parzen et Rosenblatt

Soit  $f$  une densité de probabilité. L'estimateur à noyau de Parzen Rosenblatt de cette densité utilisant le noyau sommatif pair  $K$  et la largeur de bande  $\Delta$  est donné par :

$$f_{K\Delta}(x) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=1}^N K\left(\frac{x - x_n}{\Delta}\right) \quad (10)$$

où  $\{x_1, \dots, x_N\}$  est un échantillon de  $N$  observations issues d'une expérience dont la densité de probabilité sous-jacente est  $f$ .

Le noyau sommatif  $K$  n'est pas de largeur de bande  $\Delta$ , mais le noyau *dilaté*  $K_{\Delta}$ , défini par :

$$K_{\Delta}(u) = \frac{1}{\Delta} K\left(\frac{u}{\Delta}\right). \quad (11)$$

l'est, et reste sommatif.

La mesure empirique  $\mu_N$ , des  $N$  observations, est donnée par

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{x_n}. \quad (12)$$

avec  $\delta_{x_n}$  la mesure de Dirac en  $x_n$ .

On remarque aisément que

$$f_{K\Delta}(x) = (\mu_N * K_\Delta)(x) \quad (13)$$

Le lien entre cette expression (13) et l'expression (5) apparait immédiatement, permettant ainsi de faire une analogie entre la reconstruction d'un signal et l'estimation de densité de probabilité par noyau. Dans ces deux expressions, le noyau de largeur de bande  $\Delta$  ( $\eta$  pour (5) ou  $K_\Delta$  pour (13)), jouera un rôle d'interpolation de la mesure des  $N$  observations  $S$  pour (5) ou  $\mu_N$  pour (13).

Il semble donc naturel d'utiliser les mêmes critères pour définir une mesure du comportement des noyaux sommatifs dans ces deux applications différentes.

### 2.3 Adaptation entre noyaux sommatifs par la méthode de Parzen Rosenblatt

Le problème de l'adaptation entre deux noyaux sommatifs  $K_1$  et  $K_2$ , consiste à définir une relation entre leurs largeurs de bande respectives  $\Delta_{K_1}$  et  $\Delta_{K_2}$  qui rendra les noyaux  $K_1$  et  $K_2$  équivalents, en identifiant leur comportement asymptotique.

Le comportement asymptotique est caractérisé par la distance (ou l'erreur) *AMISE* [5] (asymptotic mean integrated squared error) entre l'estimateur à noyau et la densité sous-jacente (à estimer)  $f$  :

$$AMISE = \frac{R(K)}{N\Delta} + \frac{\Delta^4 \sigma_K^4 R(f'')}{4} \quad (14)$$

où  $R(\phi) = \int \phi^2(u)du$  et  $\sigma_\phi^2 = \int u^2 \phi(u)du$ .

On appelle la largeur de bande optimale  $\Delta_K^*$ , la valeur de la largeur de bande qui minimise l'erreur *AMISE*. Cette minimisation est obtenue par annulation de la dérivée de l'expression (14), par rapport à  $\Delta$ . On obtient :

$$\Delta_K^* = \left[ \frac{R(K)}{\sigma_K^4 R(f'')} \right]^{\frac{1}{5}} N^{-\frac{1}{5}} \quad (15)$$

La relation d'adaptation entre  $\Delta_{K_1}^*$  et  $\Delta_{K_2}^*$ , peut être obtenue en faisant le rapport des largeurs de

bande optimales donnée par l'expression (15).

On obtient

$$\Delta_{K_2}^* = \zeta_{K_1}^{K_2} \Delta_{K_1}^* \quad (16)$$

où  $\zeta_{K_1}^{K_2}$ , le coefficient d'adaptation de  $K_2$  à  $K_1$  est tel que :

$$\zeta_{K_1}^{K_2} = \left[ \frac{R(K_2)}{\sigma_{K_2}^4} \right]^{\frac{1}{5}} \left[ \frac{R(K_1)}{\sigma_{K_1}^4} \right]^{-\frac{1}{5}} \quad (17)$$

On voit, par l'expression (15), que la largeur de bande optimale dépend de la densité à estimer (via  $R(f'')$ ) et du nombre d'observations  $N$ . Le facteur d'adaptation  $\zeta_{K_1}^{K_2}$  ne dépend lui que des caractéristiques des noyaux  $K_1$  et  $K_2$ . Ce facteur est donc calculable a priori et permet de reporter la connaissance que l'on a du comportement de l'estimateur basé sur le noyau  $K_1$  avec une largeur de bande  $\Delta_{K_1}$  donnée (pas nécessairement optimale), sur un estimateur basé sur le noyau  $K_2$ , en choisissant la largeur de bande  $\Delta_{K_2} = \zeta_{K_1}^{K_2} \Delta_{K_1}$ .

## 3 Noyaux non sommatifs et transformation $P \rightarrow \Pi$

### 3.1 Noyaux non sommatifs

De même qu'un noyau sommatif peut être associé à une distribution de probabilité, un noyau non sommatif (ou noyau possibiliste) peut être associé une distribution  $\pi$  de possibilité vérifiant la propriété de normalisation :

$$\max_{x \in \Omega} \pi(x) = 1 \quad (18)$$

Cette propriété des noyaux non sommatifs est le pendant de la propriété de sommativité (1) des noyaux sommatifs.

Il y a une analogie complète entre distribution de possibilité, et sous-ensemble flou. Une distribution de possibilité  $\pi$  définit un sous-ensemble flou  $F$  de  $\Omega$ , par identification avec sa fonction d'appartenance  $\pi(x) = \mu_F(x)$ .

### 3.2 Transformation $P \rightarrow \Pi$

Dubois et al. ont proposé une transformation permettant de passer d'une distribution de pro-

babilité à une distribution de possibilité. Celle-ci permet d'associer un noyau non-sommatif à tout noyau sommatif.

Cette transformation s'appuie sur trois principes :

1. *Consistance.* Soit  $\mathcal{P}(\Pi) = \{P / \forall A \subset \Omega \text{ mesurable}, P(A) \leq \Pi(A)\}$ . On dira que la transformation est consistante, si  $P \in \mathcal{P}(\Pi)$ , lorsque  $P$  et  $\Pi$  sont les acteurs de la transformation.
2. *Spécificité maximale.*  $\Pi$  résultat de la transformation est minimale au sens de l'inclusion ( $\Pi \subseteq \Pi' \Leftrightarrow \forall A \subset \Omega \text{ mesurable}, \Pi(A) \leq \Pi'(A)$ ), ou de l'aire produite par la distribution de possibilité, c'est-à-dire  $\int_{\Omega} \pi(x) dx$ .
3. *Préservation de l'ordre.* Propose qu'un évènement plus probable qu'un autre est aussi plus possible, autrement dit, pour les distributions associées  $p(x) \geq p(x') \Rightarrow \pi(x) \geq \pi(x')$ .

Cette transformation s'appuie sur la représentation par  $\alpha$ -coupes des distributions de possibilité, en identifiant ses  $\alpha$ -coupes avec les intervalles de confiance de niveau  $(1 - \alpha)$  d'une distribution probabiliste.

**Définition 1 .** *Le sous-ensemble flou de confiance, induit par une densité de probabilité continue  $p$  autour de  $x^*$ , est la distribution de possibilité, notée  $\pi^*$ , dont les  $\alpha$ -coupes sont les intervalles de confiance de niveau  $(1 - \alpha)$  à spécificité maximale (c'est-à-dire minimaux au sens de l'inclusion d'ensembles) induits par la densité de probabilité  $p$  autour de  $x^*$ . Autrement dit,*

$$\pi^*(x) = \sup \{1 - P(I_{\alpha}^*), x \in I_{\alpha}^*\}$$

Le résultat fondamental dans le cas des noyaux sommatifs, en général unimodaux, symétriques autour du mode  $x^m$ , continus, est le théorème suivant toujours issu de [1] :

**Théorème 1 .** *Pour une distribution de probabilité unimodale (de mode  $x^m$ ), symétrique, continue et sans palier constant, notée  $p$ , le sous ensemble flou de confiance induit par  $p$  autour du mode  $x^m$  est la distribution de possibilité, notée  $\pi^m$ , obtenue par transformation  $P \leftrightarrow \Pi$ , c'est-à-dire, qui vérifie les principes de consistance, de spécificité maximale et de préservation de l'ordre. On a les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall x \in [-\infty, x^m], \pi^m(x) &= 1 - 2P([x, x^m]) \\ \forall x \in [x^m, +\infty], \pi^m(x) &= 1 - 2P([x^m, x]) \end{aligned}$$

où  $P$  est la mesure de probabilité associée à  $p$ .

**Remarque 1 .**  $\pi^m$  est symétrique autour de  $x^m$ , autrement dit,  $\forall x, \pi^m(x) = \pi^m(2x^m - x)$ . Pour  $x^m = 0$ ,  $p$  et  $\pi$  sont paires.

### 3.3 La transformation pour des noyaux usuels

Le tableau 1 est une table (non exhaustive) de transformations de noyaux sommatifs usuels en noyaux non sommatifs. Sa lecture fait intervenir deux fonctions  $g$  et  $h$ , de supports respectifs  $D_g$  et  $D_h$ .

La fonction  $g$  (première colonne) est la partie négative (valable pour  $x < 0$ ) du noyau sommatif de base paire  $K$ , que l'on prolonge, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$K(x) = g(-|x|) \quad (19)$$

La fonction  $h$  (deuxième colonne), est la partie négative (valable pour  $x < 0$ ) du noyau non sommatif  $\pi_K$  associé à  $K$  par transformation  $P \rightarrow \Pi$ , que l'on prolonge, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$\pi_K(x) = h(-|x|) \quad (20)$$

De plus, on peut retrouver le noyau non sommatif associé au noyau dilaté  $K_{\Delta}$  de largeur de bande  $\Delta$  associé à  $K$ , comme défini par l'expression (11), grâce à l'expression :

$$\pi_{K_{\Delta}}(x) = \pi_K\left(\frac{x}{\Delta}\right) \quad (21)$$

L'expression du noyau sommatif  $K_{\Delta}^m$  et de son noyau non sommatif associé  $\pi_{K_{\Delta}^m}$ , symétrique centré en  $x^m$ , dont les fonctions de base respectives sont  $g$  et  $h$  sont donnés par les expressions

$$\forall x \in \mathbb{R}, K_{\Delta}^m(x) = \frac{1}{\Delta} g\left(-\frac{|x-x^m|}{\Delta}\right) \quad (22)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \pi_{K_{\Delta}^m}(x) = h\left(-\frac{|x-x^m|}{\Delta}\right) \quad (23)$$

Tableau 1 – noyaux transformés

	sommatif $g(x)$	non sommatif $h(x)$
	$D_g = [-1, 0]$	$D_h = [-1, 0]$
(a)	$1/2$	$(1+x)$
(b)	$(1+x)$	$1+2x+x^2$
(c)	$\frac{3}{4}(1-x^2)$	$1+\frac{3}{2}x-\frac{x^3}{2}$
(d)	$\frac{35}{32}(1-x^2)^3$	$1-\frac{35}{16}(x-x^3+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^7}{7})$
(e)	$\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{2}x)$	$1+\sin(\frac{\pi}{2}x)$
(f)	$\frac{3}{8}(3-5x^2)$	$1+\frac{9}{4}x-\frac{5x^3}{4}$
	$D_g = ]-\infty, 0]$	$D_h = ]-\infty, 0]$
(g)	$\frac{1}{2a}e^{\frac{x}{a}}$	$e^{\frac{x}{a}}$

Ces noyaux ont pour noms usuels : (a) uniforme, (b) triangulaire, (c) Epanechnikov, (d) triweight, (e) cosinus, (f) Deheuvels et (g) exponentiel

## 4 Granulosité et adaptation

### 4.1 Granulosité d'un noyau non sommatif

Une caractéristique des noyaux non sommatifs, ou des distributions de possibilité, déjà très utilisée dans la littérature est la *spécificité* d'un sous-ensemble flou  $F$ , notée  $Sp(F)$ , à valeur dans  $[0, 1]$ , introduite par Yager [6, 7]. Ce concept de spécificité, peut être interprété comme une mesure de précision. C'est un indice qui décroît avec la quantité d'information que peut contenir ce sous-ensemble flou. Elle indique la capacité d'un sous-ensemble flou à ne contenir qu'un seul élément.

La granulosité d'un noyau non sommatif que nous proposons ici, est un indice dual de la

spécificité d'un sous-ensemble flou. C'est une valeur qui croît avec la quantité d'information que peut contenir un sous-ensemble flou. Donc, ce marqueur doit être croissant au sens de l'inclusion des sous-ensembles flous, définie pour  $F$  et  $G$  deux sous-ensembles flous de  $\Omega$ , par  $F \subset G \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \mu_F(x) \leq \mu_G(x)$ . En nous inspirant de la cardinalité d'un sous ensemble flou défini sur un domaine fini, nous proposons pour un noyau non sommatif défini sur un domaine infini :

**Définition 2 .** La granulosité d'un noyau non sommatif  $\pi$  est donnée par

$$G(\pi) = \int_{\mathbb{R}} \pi(x) dx \quad (24)$$

qui est bien un indice croissant avec l'inclusion des sous-ensembles flous (ou des distributions de possibilités) :  $\pi \leq \pi' \Rightarrow G(\pi) \leq G(\pi')$ .

### 4.2 Granulosité d'un noyau sommatif

**Définition 3 .** La granulosité d'un noyau sommatif  $K$ , notée  $\Gamma_K$  est égale à la granulosité de son noyau non sommatif associé par la transformation probabilité  $\rightarrow$  possibilité.

Ainsi, pour un noyau d'échantillonnage  $K_{\Delta}$ , de largeur de bande  $\Delta$ , dont le noyau non sommatif obtenu par transformation  $P \rightarrow \Pi$  est noté  $\pi_{K_{\Delta}}$ , on a

$$\Gamma_K = \int_{\mathbb{R}} \pi_{K_{\Delta}}(x) dx \quad (25)$$

### 4.3 Adaptation entre noyaux sommatifs par méthode possibiliste

Nous venons de définir la granulosité d'un noyau sommatif comme indicateur de son comportement. Donc, adapter un noyau  $K_{\Delta_1}^1$ , de largeur de bande  $\Delta_1$  à un noyau  $K_{\Delta_2}^2$ , de largeur de bande  $\Delta_2$ , consiste à identifier leurs granulosités.

A chaque noyau  $K_{\Delta}$ , de largeur de bande  $\Delta$ , peut être associé un noyau de base  $K$ , voir

l'expression (11). Notons  $\gamma_K$ , la granulosité du noyau  $K$ , donnée par  $\gamma_K = \int_{\mathbb{R}} \pi_K(x) dx$ .

**Théorème 2 .** Soit  $K_{\Delta}$  un noyau sommatif paire de largeur de bande  $\Delta$ , on a

$$\Gamma_K = \gamma_K \Delta \quad (26)$$

où  $\Gamma_K$  et  $\gamma_K$  sont les granulosités respectives des noyaux  $K_{\Delta}$ , et  $K$ , qui vérifient (11).

**Preuve du théorème 2.**

Rappel :  $\pi_{K_{\Delta}}(x) = \pi_K(\frac{x}{\Delta})$  (voir expression (21)), d'où

$$\begin{aligned} \Gamma_K &= \int_{\mathbb{R}} \pi_{K_{\Delta}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \pi_K(\frac{x}{\Delta}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Delta \pi_K(v) dv = \Delta \gamma_K \end{aligned}$$

L'adaptation étant déduite de l'égalité

$$\Gamma_{K_{\Delta_1}^1} = \Gamma_{K_{\Delta_2}^2} \quad (27)$$

On a, d'après le théorème 2, la relation d'adaptation entre  $K^1$  et  $K^2$  suivante :

$$\Delta_2 = \xi_{K^1}^{K^2} \Delta_1 \quad (28)$$

où  $\xi_{K^1}^{K^2}$ , le coefficient d'adaptation de  $K^2$  à  $K^1$  est tel que

$$\xi_{K^1}^{K^2} = \frac{\gamma_{K^1}}{\gamma_{K^2}} \quad (29)$$

## 5 Expérimentation et comparaison

Le tableau 2 contient les coefficients d'adaptation des noyaux  $K(x)$

- (a) d'Epanechnikov :  $\frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}$ ,
- (b) Triweight :  $\frac{35}{32}(1 - x^2)^3\mathbb{1}_{[-1,1]}$  et
- (c) Gaussien :  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,

par rapport au noyau uniforme  $U(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$ , obtenus par les deux méthodes présentées dans cet article. La première colonne contient les coefficients d'adaptation obtenus par la méthode de Parzen Rosenblatt. La seconde, ceux obtenus par la méthode possibiliste. La construction de

Tableau 2 – Comparaison des coefficients d'adaptation

	$\zeta_U^K$	$\xi_U^K$
(a)	1.2724	1.3333
(b)	1.7115	1.8286
(c)	0.5747	0.6270

la granulosité d'un noyau sommatif dans la section 4 justifie dans un premier temps de proposer cette grandeur comme mesure du comportement d'un noyau sommatif. Le tableau 2 justifie dans un deuxième temps cette affirmation, car les coefficients d'adaptation sont très proches pour ces deux méthodes différentes. Autrement dit, l'uniformisation des granulosités de noyaux est très proche de l'uniformisation des comportements asymptotiques des estimateurs de Parzen Rosenblatt utilisant ces noyaux.

La figure 1 justifie également notre proposition de caractériser le comportement d'un noyau en tant que voisinage pondéré par la granulosité. Les figures 1(a) et 1(b) comportent des estima-

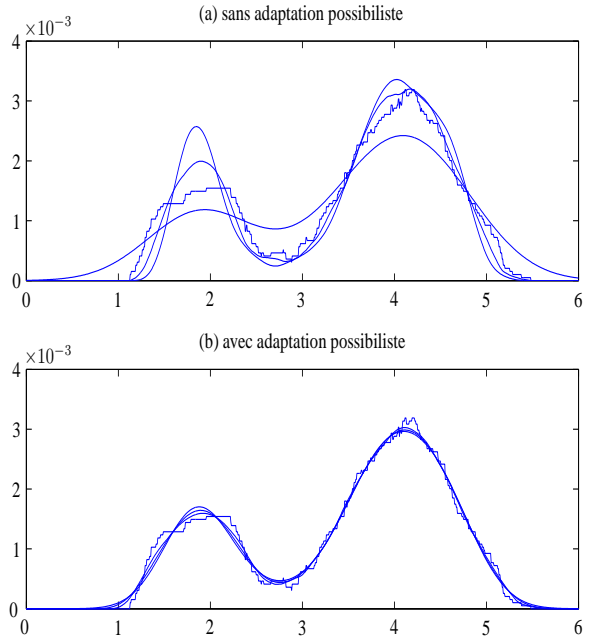


Figure 1 – Estimations de densité de probabilité par noyau



tions par noyau uniforme, d'Epanechnikov, triweight et Gaussien, de la densité sous-jacente à  $N = 107$  observations de la longueur (en mètres) du *Old Faithfull Geyser* localisé dans le parc de *Yellowstone* (U.S.A.). La figure 1(a) contient ces estimations sans adapter les comportements des noyaux. La même largeur de bande  $\Delta$  est fixée pour les quatre estimateurs de cette figure. La figure 1(b) contient ces estimations avec adaptation des comportements des noyaux par rapport au noyau uniforme.

Tableau 3 – Granulosité de noyaux usuels de base

	$K(x)$	$\gamma_K$
(a)	$\frac{1}{2}$	1
(b)	$1 -  x $	$2/3$
(c)	$2.25 * e^{\frac{1}{u^2-1}}$	0.6679
(d)	$\frac{3}{4}(1 - x^2)$	$4/3$
(e)	$\frac{35}{32}(1 - x^2)^3$	$35/64$
(f)	$\frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{2}x)$	$2 - 4/\pi$
(g)	$\frac{1}{\pi/2 - \ln 2} \left( \frac{1- x }{1+u^2} \right)$	$\frac{2\pi+4 \ln 2-8}{\pi-2 \ln 2}$
(h)	$\frac{2}{3} \mathbb{1}_{ x  < \frac{1}{2}} + \frac{4}{3}(1 -  x ) \mathbb{1}_{ x  \geq \frac{1}{2}}$	$7/9$
(i)	$\frac{3}{8}(3 - 5x^2)$	$3/8$
(j)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	1.5948
(k)	$\frac{1}{2a} e^{-\frac{ x }{a}}$	$1/2a$

Le tableau 3 contient les granulosités  $\gamma_K$ , des noyaux usuels de bases  $K$  de support  $D = [-1, 1]$  suivants : (a) uniforme, (b) triangulaire, (c) hyperlisse, (d) Epanechnikov, (e) triweight, (f) cosinus, (g) triangulaire sur quadratique, (h) trapézoïdal et (i) Deheuvels, et de support  $D = \mathbb{R}$  suivants : (j) Gaussien et (k) exponentiel.

Retrouver le coefficient d'adaptation d'un de ces 11 noyaux par rapport à un autre de ces noyaux, revient à faire un simple rapport des granulosités de base. Par exemple, le coefficient d'adaptation du noyau hyperlisse (c) par rapport au noyau trapézoïdal (h) sera calculé par :  $\xi_{(h)}^{(c)} = \gamma_{(h)}/\gamma_{(c)} = 1.1645$ .

## 6 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article le concept de **granulosité** d'un noyau sommatif, comme un indice de son comportement en tant que voisinage pondéré. Nous avons identifié cette granulosité d'un noyau sommatif à la granulosité de son noyau non sommatif associé par la transformation  $P \rightarrow \Pi$ .

Nous avons proposé une adaptation entre noyaux sommatifs par égalité des granulosités. Il s'avère que cette adaptation rejoint celle utilisée par la communauté des statistiques non paramétriques

On peut discuter de la pertinence de notre construction de la granulosité, et proposer d'autres indices, peut-être plus adéquats, du comportement de noyaux possibilistes, particulièrement si ceux-ci ont un domaine infini.

La suite de notre travail va concerner l'utilisation de l'aptitude des noyaux non sommatifs à représenter des classes de noyaux sommatifs, pour définir de nouvelles méthodes d'estimation robuste.

## Références

- [1] D. Dubois, H. Prades, L. Foulloy, and G. Mauris. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable Computing*, 10 :273–297, 2004.
- [2] E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33 :1065–1076, 1962.
- [3] Z. Pawlak. *Rough sets*. Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [4] M. Rosenblatt. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27 :832–837, 1956.
- [5] J. S. Simonoff. *Smoothing Methods in Statistics*. Springer-Verlag, 1996.
- [6] R. R. Yager. Measuring tranquility and anxiety in decision making : en application of fuzzy sets. *Internat. J. General Systems*, 8 :139–146, 1982.
- [7] R. R. Yager. Entropy and specificity in a mathematical theory of evidence. *Internat. J. General Systems*, 9 :249–260, 1983.