



**HAL**  
open science

## Les Histogrammes Quasi-Continus

Olivier Strauss, Frédéric Comby

► **To cite this version:**

Olivier Strauss, Frédéric Comby. Les Histogrammes Quasi-Continus. JDS 2003 - 34es Journées de Statistique, Société Française de Statistique (SFdS), Jun 2003, Lyon, France. pp.847-850. lirmm-00269531

**HAL Id: lirmm-00269531**

**<https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00269531>**

Submitted on 14 May 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Les histogrammes quasi-continus

Olivier Strauss, Frédéric Comby

LIRMM, Université Montpellier II, 161, rue Ada,  
34392 Montpellier Cedex 5, France  
e-mail : [strauss@lirmm.fr](mailto:strauss@lirmm.fr), [comby@lirmm.fr](mailto:comby@lirmm.fr)

*RÉSUMÉ* : Nous présentons, dans cet article, un outil permettant d'estimer la probabilité imprécise d'un événement réel imprécis basé sur l'accumulation d'événements réels imprécis.

*ABSTRACT*: This paper describes a new method, called rough histograms, that performs an imprecise estimation of the probability of an imprecise event based on imprecise real data.

*MOTS CLÉS* : histogramme, probabilité imprécise, possibilité, ensembles flous grossiers.

*KEYWORDS*: Histograms, imprecise probabilities, possibility, fuzzy rough sets.

## 1. Introduction.

Le concept de densité de probabilité est fondamental en statistique. Lorsqu'on connaît la densité de probabilité  $f(x)$  d'un événement réel  $x$ , il est possible de calculer la probabilité de n'importe quel événement imprécis donné sous forme d'intervalle :  $[a, b]$  grâce à :  $P([a, b]) = \int_a^b f(x).dx$ .

Lorsque cette densité est inconnue, il est possible d'en faire une estimation en utilisant un échantillon de  $n$  observations réelles  $(x_1 \dots x_n)$ . L'approche paramétrique suppose connue la forme de la densité de probabilité et consiste à en estimer les paramètres. Depuis les travaux de Parzen (Parzen, 1979), la communauté scientifique s'intéresse de plus en plus aux estimateurs non-paramétriques. La démarche non-paramétrique est moins rigide. Elle suppose bien sûr qu'il existe une densité de probabilité sous-jacente mais laisse les données s'exprimer plutôt que de les contraindre à adopter une forme paramétrique pré-déterminée.

Lorsque les données réelles permettant l'estimation de la densité de probabilité sont imprécises, cette imprécision devrait se répercuter sur la densité de probabilité estimée pour donner une sorte de "densité imprécise de probabilité" (Walley, 1991). A notre connaissance, aucune méthode d'estimation de densité ne prend en compte la précision des données d'apprentissage.

Nous proposons, dans cet article, une nouvelle technique permettant d'estimer une probabilité imprécise à partir d'un échantillon d'événements imprécis en substituant à la notion de densité de probabilité, celle d'histogramme quasi-continu.

## 2. Les histogramme quasi-continus.

La théorie des histogrammes quasi-continus (HQC) est basée sur celle des sous ensembles flous grossiers (Dubois et al., 1990). Le but est de dissocier la granularité de l'histogramme de la précision des informations que l'on en extrait.

### 2.1 Partition floue de l'espace.

Pour atténuer les effets dus au caractère arbitraire du partitionnement de l'espace, les histogrammes quasi-continus sont construits sur une partition floue de l'espace réel (Bezdec 1981). Une partition binaire, de granularité  $\Delta$ , d'un intervalle  $\Psi$  de l'univers du discours  $\Omega$  est un ensemble d'intervalles disjoints de largeur  $\Delta$  recouvrant  $\Psi$ . Une partition floue de  $\Psi$  ayant la même granularité est un ensemble d'intervalles flous  $C_k$  de fonction d'appartenance  $\mu_k(x)$  dont la largeur ( $\int \mu_k(x) dx$ ) est égale à  $\Delta$ .

### 2.2 Accumulation de données précises.

Soit  $(x_1 \dots x_n)$ , un échantillon de  $n$  données. L'accumulation dans l'histogramme quasi-continu défini par la partition des  $p$  intervalles flous  $(C_1 \dots C_p)$  est donnée par :

$$Acc_k = \sum_{i=1}^n \mu_k(x_i) \quad [1]$$

où  $Acc_k$ , l'accumulateur associé à la cellule  $C_k$ , représente le nombre des données de l'échantillon compatibles avec l'intervalle  $C_k$  de fonction d'appartenance  $\mu_k$ .

### 2.3 Accumulation de données imprécises.

Un échantillon de données imprécises peut être aisément représenté par un ensemble d'intervalles ordinaires ou flous  $(X_1 \dots X_n)$ . On doit alors remplacer l'accumulateur précis de la formule [1] par un accumulateur imprécis dont les bornes supérieures ( $\overline{Acc}_k$ ) et inférieures ( $\underline{Acc}_k$ ) sont estimées comme suit :

$$\overline{Acc}_k = \sum_{i=1}^n \Pi(C_k; X_i) \quad \underline{Acc}_k = \sum_{i=1}^n N(C_k; X_i) \quad [2]$$

où  $\Pi(C_k; X_i)$  (rsp.  $N(C_k; X_i)$ ) est la possibilité (rsp. la nécessité) de la donnée  $X_i$  restreinte à la cellule  $C_k$ . Cette imprécision de l'accumulateur caractérise l'adéquation entre la granularité de la partition sur laquelle est construit l'histogramme et la précision des données accumulées.

## 3. Probabilité d'un événement.

### 3.1 Probabilité précise.

Soit  $(x_1 \dots x_n)$ , un échantillon de  $n$  données issues d'une distribution de probabilité de densité  $p(x)$ , et  $W_\Gamma = [m - \Gamma/2, m + \Gamma/2]$  un intervalle de granularité  $\Gamma$ . Il existe entre  $P(W_\Gamma)$  et  $p(x)$  la relation suivante :

$$P(W_\Gamma) = \int_{m-\Gamma/2}^{m+\Gamma/2} p(x)d(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nb(W_\Gamma;(x_i))}{n} \quad [3]$$

où  $Nb(W_\Gamma;(x_i))$  est le nombre de données de  $(x_i)$  appartenant à l'intervalle  $W_\Gamma$  et  $P(W_\Gamma)$  la probabilité d'avoir un élément de la distribution  $(x_i)$  dans l'intervalle  $W_\Gamma$ . La densité de probabilité en  $m$  (centre de l'intervalle  $W_\Gamma$ ) peut être vue comme une limite de  $P(W_\Gamma)$  lorsque  $\Gamma$  tend vers 0. Le cardinal de l'échantillon considéré étant fini, on peut considérer que la distribution est uniforme dans l'intervalle (Silvermann 1998) et l'on affecte au centre de l'intervalle la densité empirique de probabilité  $\hat{p}(m)$ .

$$\hat{p}(m) \cong \frac{1}{\Gamma} \frac{Nb(W_\Gamma;(x_i))}{N} \quad [4]$$

Lorsque l'échantillon des données est fini, la notion générale de densité de probabilité doit être remplacée par celle de densité de probabilité à granularité  $\Gamma$  pour prendre en compte l'effet de la densité locale des données sur l'estimation.

### 3.2 Probabilité imprécise.

Lorsque les données sont imprécises, l'estimation de la probabilité est imprécise. Soit  $(X_1 \dots X_n)$  un échantillon de  $n$  données imprécises, et l'ensemble  $W_\Gamma$  de granularité  $\Gamma$ . À la notion de dénombrement des données appartenant à l'intervalle  $W_\Gamma$  on doit substituer celle de nombre supérieur et inférieur de données compatibles avec  $W_\Gamma$  :

$$\overline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) = \sum_{i=1}^n \Pi(W_\Gamma;X_i) \quad \text{et} \quad \underline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) = \sum_{i=1}^n N(W_\Gamma;X_i) \quad [5]$$

On représente alors la probabilité empirique  $P(W_\Gamma)$  par ses valeurs extrêmes :

$$\bar{P}(W_\Gamma) = \frac{\overline{Nb}(W_\Gamma;(x_i))}{\overline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) + \underline{Nb}(W_\Gamma^c;(x_i))}; \quad \underline{P}(W_\Gamma) = \frac{\underline{Nb}(W_\Gamma;(x_i))}{\underline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) + \overline{Nb}(W_\Gamma^c;(x_i))} \quad [6]$$

avec  $W_\Gamma^c$  complémentaire de  $W_\Gamma$ . Il est facile de vérifier que  $\bar{P}(W_\Gamma)$  et  $\underline{P}(W_\Gamma)$  sont bien les bornes supérieure et inférieure de toutes les probabilités que l'on peut construire sur des dénombrements bâtis sur l'échantillon imprécis  $(X_1 \dots X_n)$ .

### 4. Estimation de la probabilité imprécise d'un événement imprécis.

La manipulation des formules [5] et [6] est particulièrement malaisée dans le cas de calculs récursifs ou itératifs (e.g. recherche de fractile ou de modes imprécis). Cependant, si on connaît la valeur des accumulateurs d'un HQC de granularité  $\Delta$  sur un support  $\Psi$ , il est possible de faire une estimation du nombre de données  $X_i$  compatibles avec tout ensemble de granularité  $\Gamma > \Delta$  dont le support est inclus dans  $\Psi$ . Les données étant imprécises, les estimations de ces nombres sont imprécises.

Nous ne donnons ici que les formules dans le cas imprécis. Le cas précis peut être facilement déduit du cas imprécis en posant  $\overline{Acc}_k = \underline{Acc}_k = Acc$ .

Le pire cas est obtenu en utilisant un transfert possibiliste des accumulateurs :

$$\underline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) = \sum_{k=0}^p \underline{Acc}_k \Pi(C_k;W_\Gamma) \quad \text{et} \quad \overline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) = \sum_{k=0}^p \overline{Acc}_k N(C_k;W_\Gamma) \quad [7]$$

Le cas “le plus probable” est obtenu en utilisant une technique inspirée du transfert pignistique de croyance suggéré par Philippe Smets (Smets, 1994) :

$$\underline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) = \sum_{k=0}^p \underline{Acc}_k \frac{|W_\Gamma \cap C_k|}{|C_k|} \quad \text{et} \quad \overline{Nb}(W_\Gamma;(x_i)) = \sum_{k=0}^p \overline{Acc}_k \frac{|W_\Gamma \cap C_k|}{|C_k|} \quad [8]$$

On utilise alors les formules [3], [4] et [6] pour retrouver la probabilité de  $W_\Gamma$ .

## 5. Conclusion et discussion.

Nous avons montré, dans cet article, qu’il était possible d’utiliser un histogramme quasi-continu pour estimer la probabilité imprécise d’un événement de type intervalle à partir d’un échantillon de données imprécises. Cet outil est simple à utiliser. Dans d’autres articles nous avons montré qu’il permettait de réaliser des statistiques d’ordre (Strauss et al., 1999), des statistiques modales uni- et multivariées (Strauss et al., 2000) et nous l’avons appliqué à l’estimation du mouvement dominant dans une séquence d’images (Comby et al., 2001).

## 6. Références

- Bezdek J., *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. N.Y., Plenum, 1981.
- Dubois D., Prade H., Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *International journal of general systems*, 17(2-3), pp191-200, 1990.
- Comby F., Strauss O., Aldon M.J., Possibility theory and rough histograms for motion estimation in a video sequence, *IWVF4*, pp. 473-483. Capri, Italy, 2001.
- Parzen, E., Nonparametric statistical data modeling, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, pp. 105-131, 1979.
- Silverman B., *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall, 1998.
- Smets P., The transferable belief model. *Artificial Intelligence* (66) pp. 191-243, 1994
- Strauss O., Lavarec E., Histogrammes approchés : application aux statistiques d’ordre, *LFA99*, pp .161-168, Valenciennes, France, Octobre 1999.
- Strauss O., Comby F., Aldon M.J., Rough histograms for robust statistics. *International Conference on Pattern Recognition*, vol2, pp. 688-691. September 2000.
- Walley, P. (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall, New York, 1991.