Solution exacte pour les problèmes de recouvrement sous contrainte sur le degré des noeuds

Massinissa Merabet, Sylvain Durand, Miklós Molnár

Solution exacte pour les problèmes de recouvrement sous contraint sur le degré des noeuds

Massinissa Merabet[1], Sylvain Durand[1], Miklos Molnar[1]

Laboratoire LIRMM, Université Montpellier 2
161 rue Ada, 34095 Montpellier Cedex 5 France
{merabet, sylvain.durand, molnar}@lirmm.fr

Mots-clés : *arbre de recouvrement, homomorphisme, contrainte sur le degré.*

1 Introduction

Le problème de recherche d'arbre de recouvrement de coût minimum sous contrainte sur le degré des noeuds (Degree Constrained Minimum Spanning Tree -DCMST) [1, 5] est très étudié dans le domaine de la théorie des graphes et trouve son domaine d'application principalement dans les réseaux. La majorité des recherches sur les structures de recouvrement sous contrainte sur le degré des noeuds sont basées sur les arbres de recouvrement. Cependant, il existe des applications qui n'imposent pas explicitement un sous-graphe comme solution. Une structure plus flexible appelée «hiérarchie» est proposée. Les hiérarchies peuvent être perçues comme une généralisation des arbres car contrairement aux arbres de recouvrement (qui se limitent à un seul passage), les hiérarchies peuvent passer plusieurs fois par les noeuds et les arêtes du graphe. Ceci leurs permet de satisfaire les contraintes sur le degré des noeuds plus facilement. Cette nouvelle structure n'est pas un sous-graphe mais un homomorphisme d'un arbre dans le graphe. Un homomorphisme est une application $h: W \to V$ entre deux graphes $Q = (W, F)$ et $G = (V, E)$ qui associe un sommet de V à chaque sommet de W en préservant l'adjacence [2]. Si Q est un graphe connexe sans cycle (un arbre) alors le triplet (Q, h, G) défini une *hiérarchie dans* G [4]. Nous étudions le problème de la hiérarchie de recouvrement de coût minimum d'un graphe sous contrainte sur le degré des noeuds (Degree Constrained Minimum Spanning Hierarchy -DCMSH). Ce problème consiste à trouver une hiérarchie de recouvrement $H = (Q, h, G)$ de coût minimum d'un graphe G telle que le degré de chaque sommet de Q dans H est inférieur ou égal à une borne R.

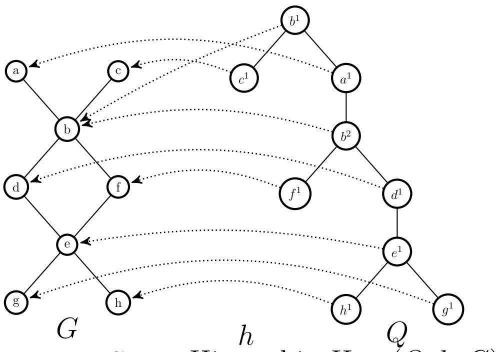


FIG. 1 – Hierarchie $H = (Q, h, G)$

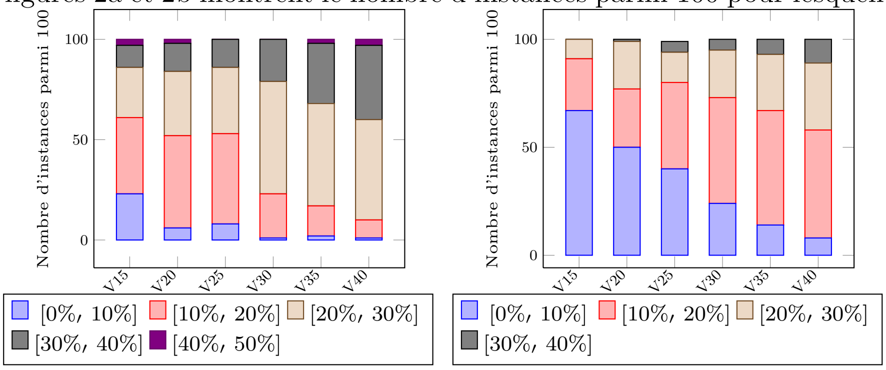
Dans le graphe G de la figure 1, le degré du sommet b ou e est égal à 4 dans tous les arbres de recouvrement de G. Par contre, le degré maximum dans H est égal à 3 car le sommet b est dupliqué. Ainsi, pour $R = 3$, il n'existe pas d'arbre de recouvrement réalisable de G mais il existe au moins une hiérarchie de recouvrement réalisable.

2 Formulation du PLNE

Nous avons formulé ce nouveau problème à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers. Dans notre modèle, la connexité est garantie par une formulation de flot. Basée sur l'analogie des hiérarchies avec les chemins élémentaires et non-élémentaires, une hiérarchie peut être considérée comme étant un «arbre non-élémentaire». Le flot peut alors transiter plus d'une fois dans chaque direction d'une arête, chaque passage doit donc être différencié. La principale difficulté est alors de trouver l'application associant un sommet du graphe à chaque sommet dans l'arbre non-élémentaire en préservant l'adjacence des sommets et en respectant la contrainte sur le degré des noeuds. Dans notre formulation on propose de dupliquer seulement les arêtes. Afin de diminuer la complexité calculatoire, une borne supérieure sur le nombre de duplications est proposée [3]. Évidemment, résoudre notre programme linéaire ne donne pas de solution pour le problème DCMSH car la relation doit être faite entre la duplication d'arêtes et la duplication de sommets. L'arbre non-élémentaire doit être calculé sur la base du flot retourné par le PLNE. Cette étape peut être réalisée en temps polynomial. Des détails sont présentés dans [3].

3 Résultats expérimentaux

Pour démontrer l'avantage des hiérarchies de recouvrement par rapport aux arbres, nous avons calculé et comparé les coûts des solutions optimales des problèmes DCMST et DCMSH pour des graphes aléatoires. On considère des graphes aléatoires de taille différente : $|V| \in \{15, 20, 25, 30, 35, 40\}$. La densité (le ration entre le nombre d'arêtes et le nombre de sommets) est fixée à 2. Afin d'avoir un jeu de test significatif, cent instances avec un cout aléatoire sur les arêtes sont générées pour chaque valeur de $|V|$. Ces problèmes sont résolus pour $R = 2$ et $R = 3$. Les figures 2a et 2b montrent le nombre d'instances parmi 100 pour lesquelles il y a une



(a) $R = 2$ (b) $R = 3$

FIG. 2 – Nombre d'instances en fonction de l'intervalle d'amélioration de la solution

amélioration inclue dans un intervalle spécifique concernant chaque valeur de $|V|$. Pour $R = 2$, on observe que pour $|V| \geq 30$, les hiérarchies améliorent le coût de plus de 20% pour plus de 75% des instances. L'amélioration augmente en fonction de l'augmentation de la taille des instances. Pour $R = 3$, l'amélioration est moins importante car il est plus facile de trouver un «bon» arbre de recouvrement. On peut observer que pour $|V| = 40$, les hiérarchies améliorent le coût de plus de 20% pour plus de 40% des instances.

4 Conclusion et perspectives

Dans cette étude nous avons montré que, pour les problèmes de recouvrement sous contrainte sur le degré des noeuds, les hiérarchies constituent une bonne alternative aux arbres de recouvrement. Comme perspective, nous envisageons la réduction du temps de calcule du PLNE en ajoutant des élagages encore plus efficaces.

Références

[1] N. Deo and L. Hakimi. The shortest generalized hamiltonian tree. In *6th Annual Allerton Conference*, pages 879–888, Illinois, USA, 1968.

[2] P. Hell and X Zhu. Homomorphisms to oriented paths. *Discrete Mathematics*, 132 :107 – 114, 1994.

[3] M. Merabet, S. Durand and M. Molnár. Exact solution for bounded degree connected spanning problems. Technical report RR12027, Laboratory of Informatics, Robotics, and Micro-electronics of Montpellier - LIRMM, 2012.

[4] M. Molnár. Hierarchies for Constrained Partial Spanning Problems in Graphs. Technical report PI-1900, 2008.

[5] S.S. Ravi, Madhav V. Marathe, S. S. Ravi, Daniel J. Rosenkrantz, Harry B. Hunt, and III. Approximation algorithms for degree-constrained minimum-cost network-design problems. *Algorithmica*, 31 :58–78, 2001.