

# Solutions pour assurer la reproductibilité numérique de la simulation de l'effet des vagues sur les côtes

R. NHEILI  
P. LANGLOIS et C. DENIS  
Université de Perpignan

RAIMS 2015, Rennes



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Telemac-Mascaret
  - Assemblage élément fini
  - En parallèle: assemblage des points d'interface
  - Non-reproductibilité de Tomawac
- 3 Obtenir l'associativité de l'addition parallèle
  - CompAss
  - ReprodAss
  - IntAss
- 4 Conclusion et perspectives

- L'arithmétique flottante souffre d'erreurs d'arrondi.
- Les opérations à virgule flottante ne sont pas associatives  
 $(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c)$
- Les résultats de calculs en virgule flottante dépendent de l'ordre de calcul.

## Non-reproductibilité en parallèle à cause de l'ordre indéfini de la réduction

- Des code de simulation de plusieurs domaines souffre de non-reproductibilité
  - debug, validation, agrément juridiques
- Reproductibilité  $\neq$  Précision

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Telemac-Mascaret
  - Assemblage élément fini
  - En parallèle: assemblage des points d'interface
  - Non-reproductibilité de Tomawac
- 3 Obtenir l'associativité de l'addition parallèle
  - CompAss
  - ReprodAss
  - IntAss
- 4 Conclusion et perspectives

# open TELEMAC-MASCARET

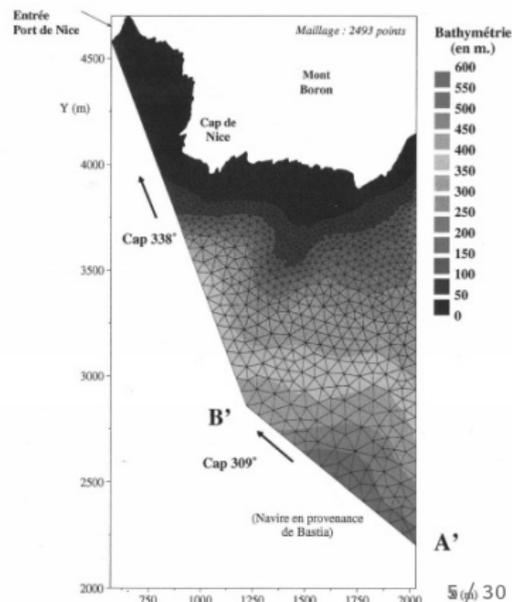
The mathematically superior suite of solvers



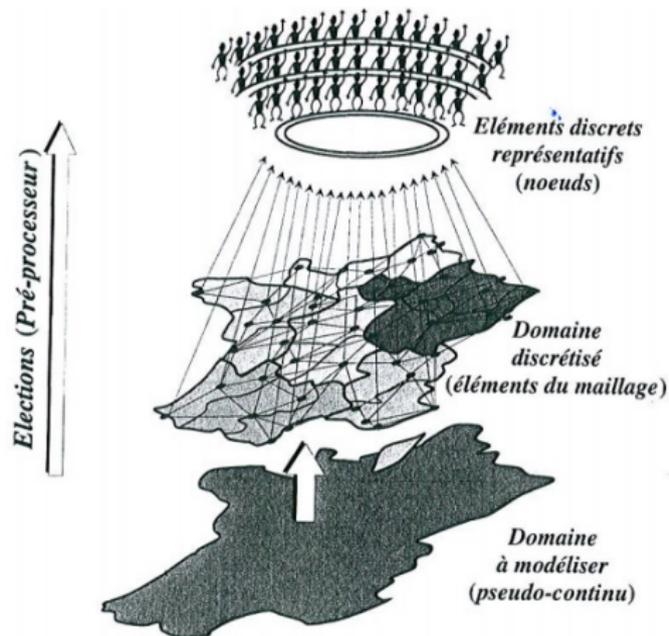
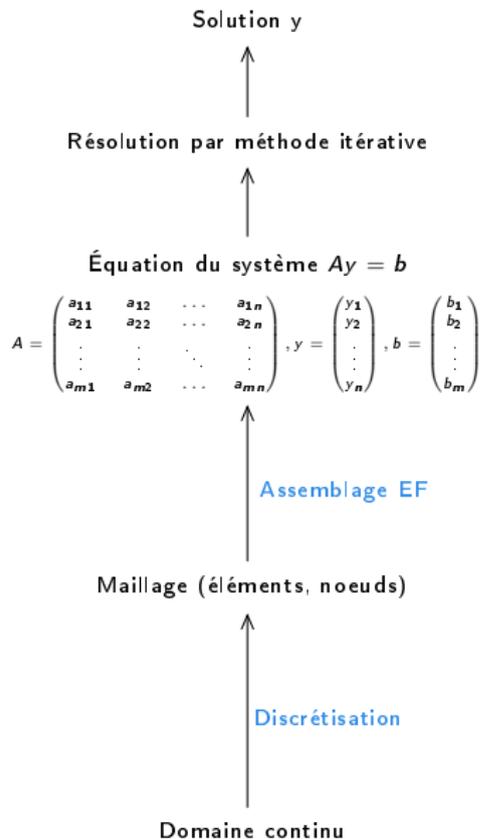
- Simulation de la mécanique des fluides à surface libre [3].
- 20 ans, LNHE (EDF R&D), 4000 utilisateurs enregistrés.
- Ensemble de modules en Fortran 90.
- La méthode des éléments finis EF.

## Tomawac :

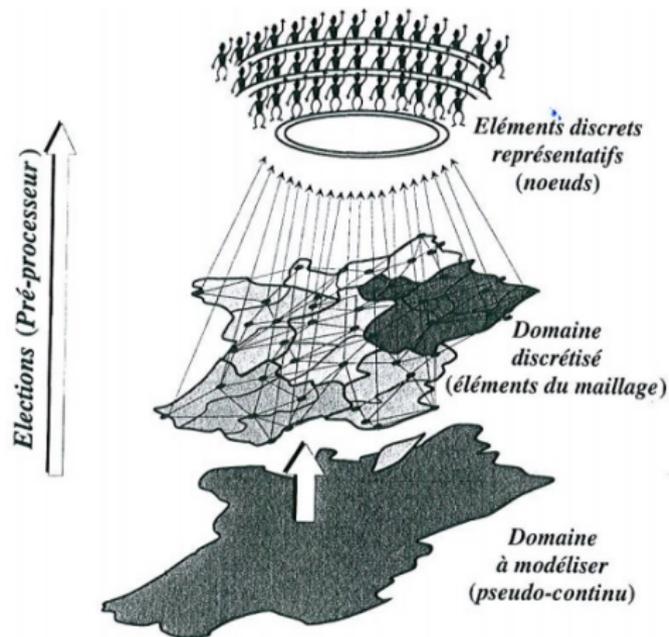
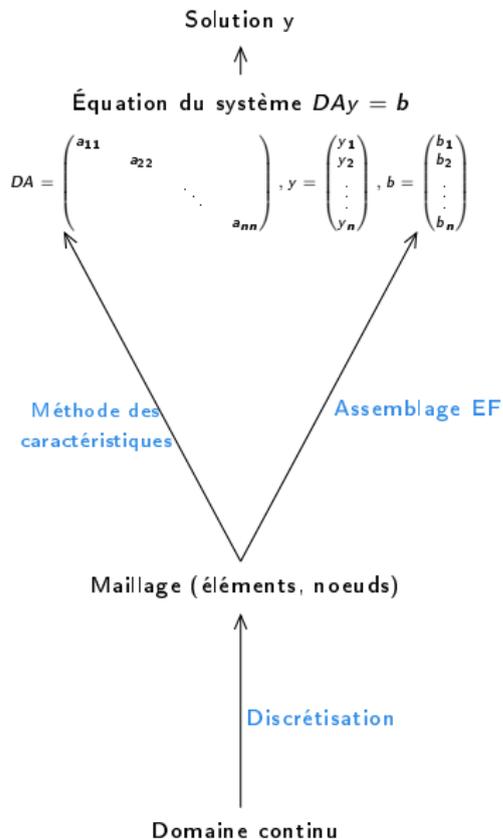
- Propagation de la houle dans les zones côtières.
- Inconnues : hauteur, direction et fréquence moyenne de la houle.
- Cas de test Nice : étudier les vagues créées par des navires rapides



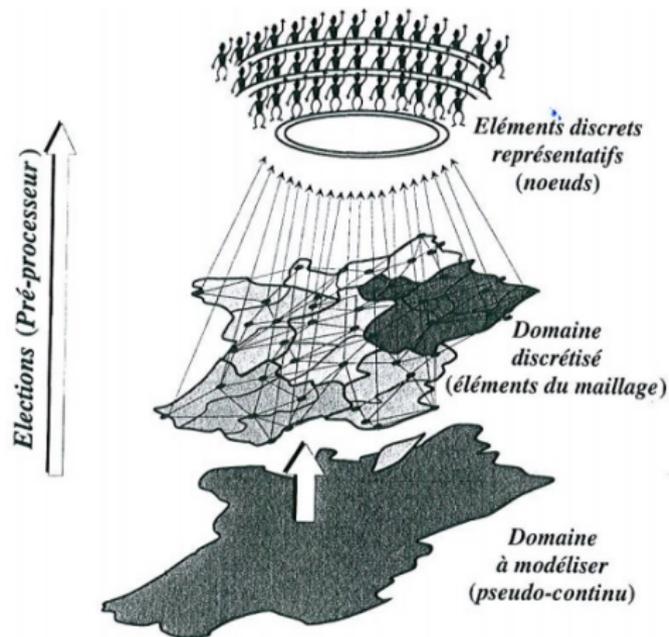
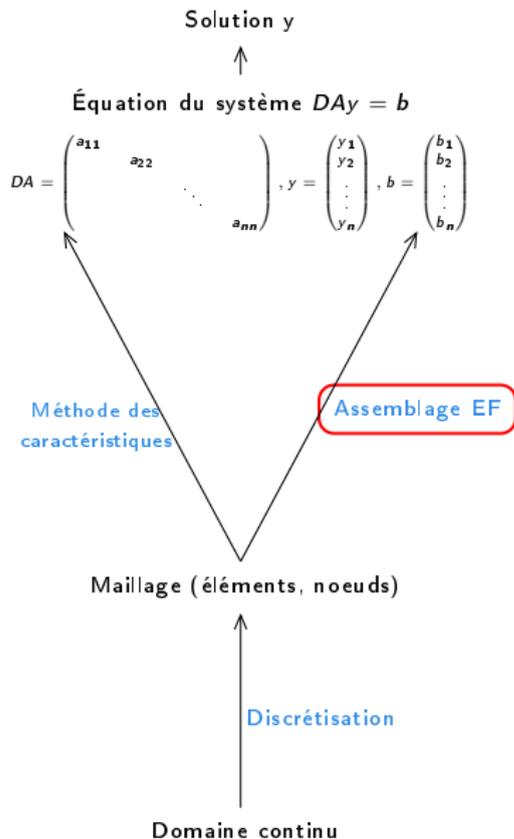
## Méthode élément fini :



## Tomawac méthode EF :



## Tomawac méthode EF :

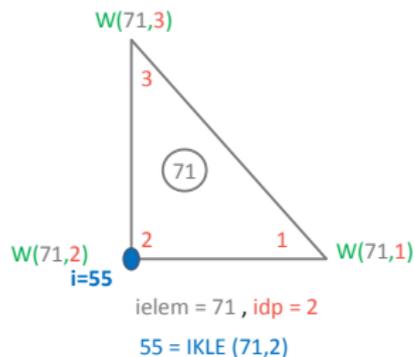


Numéro de l'élément = 71

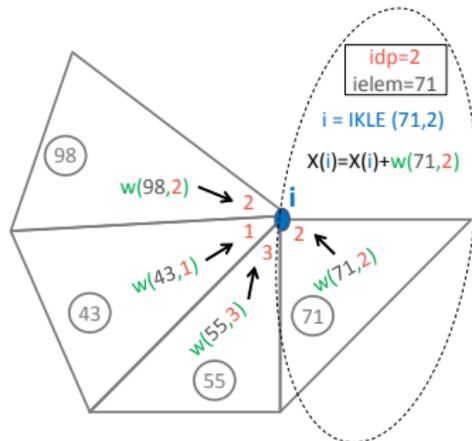
Numéro local des nœuds pour chaque élément = 1, 2, 3

Numéro global du nœud ,  $i=IKLE(\text{ielem}, \text{idp}) = 55$

Les contributions de l'élément au nœud  $\text{idp}$ ,  $W(\text{ielem}, \text{idp})$



## Assemblage élément fini



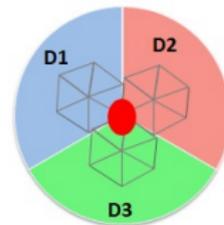
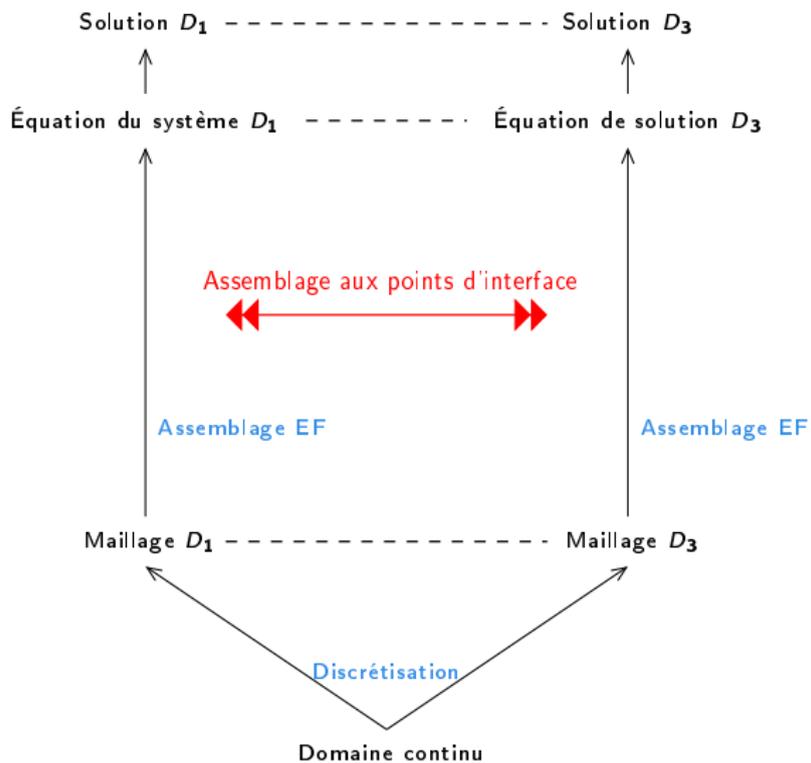
```
for idp= 1, ndp
```

```
  for ielem= 1, nelem
```

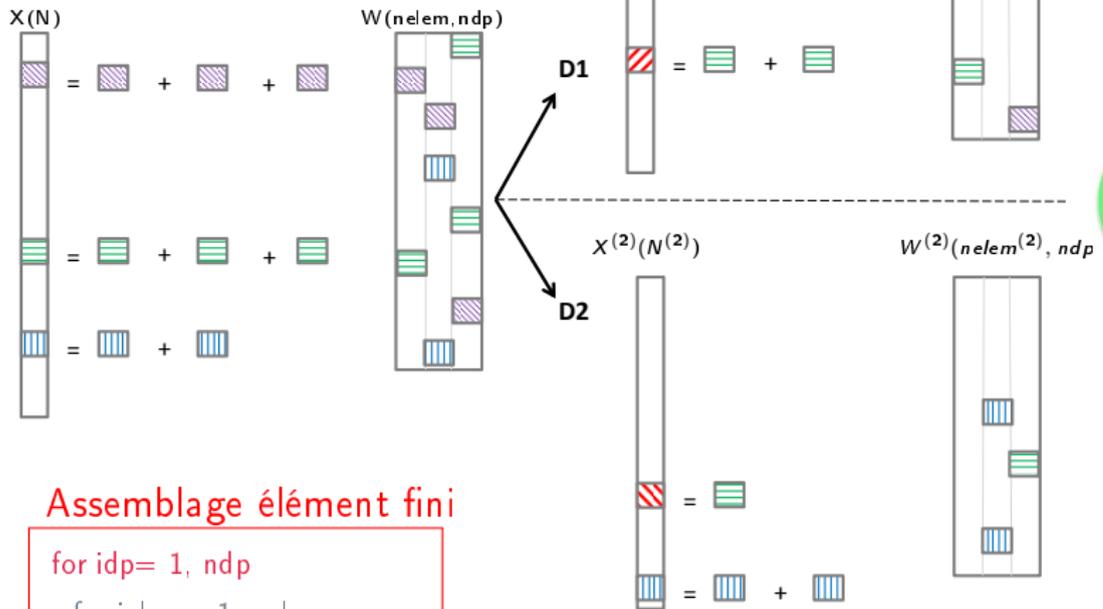
```
     $i=IKLE(\text{ielem}, \text{idp})$ 
```

```
     $X(i) = X(i) + W(\text{ielem}, \text{idp})$ 
```

## Méthode EF parallèle : ex. 3 processeurs



## Séquentiel VS. Parallèle



## Assemblage élément fini

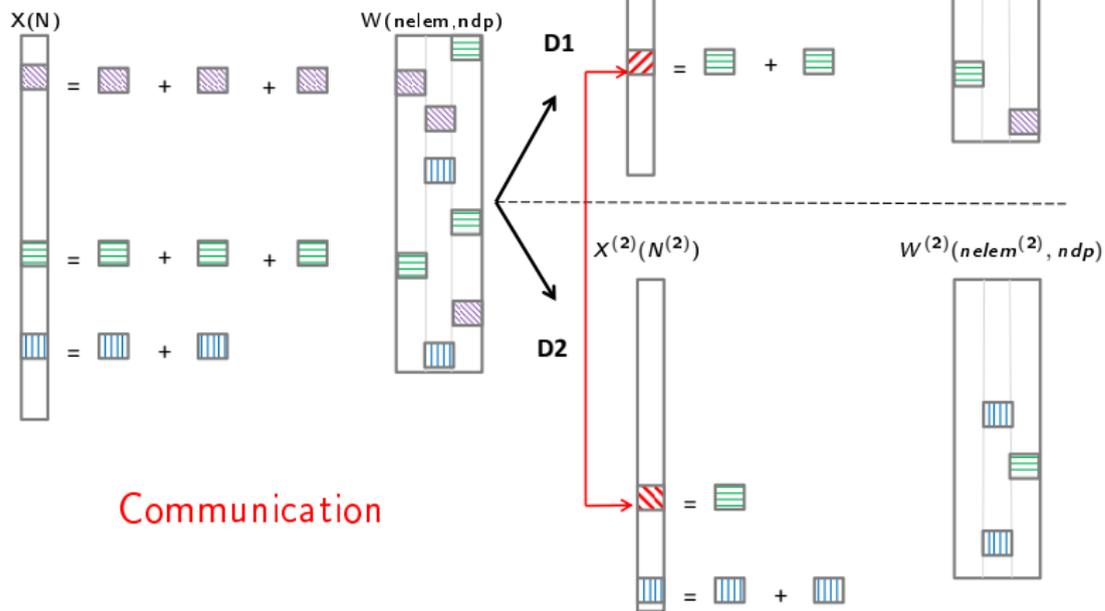
```
for idp= 1, ndp
```

```
  for ielem= 1, nelem
```

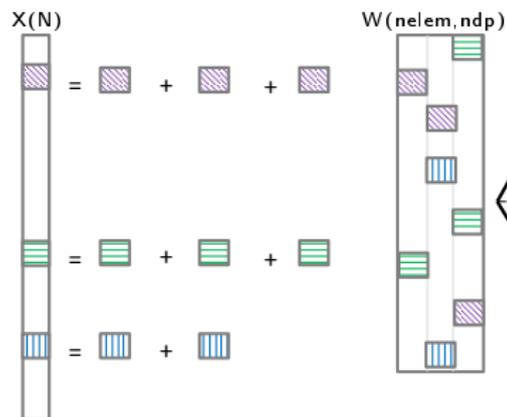
```
    i=IKLE(ielem, idp)
```

```
    X(i)=X(i)+W(ielem,idp)
```

## Séquentiel VS. Parallèle



## Séquentiel VS. Parallèle


 $X^{(1)}(N^{(1)})$ 
 $W^{(1)}(nelem^{(1)}, ndp)$ 

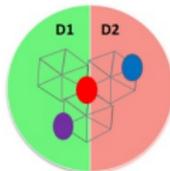
D1

D2

 $X^{(2)}(N^{(2)})$ 
 $W^{(2)}(nelem^{(2)}, ndp)$ 

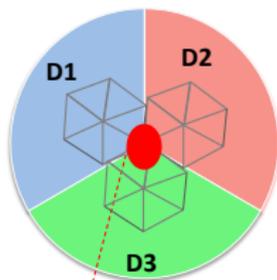
Assemblage au point d'interface

$$X(i) = \sum_{D_p} X(i)$$



## Assemblage des points d'interface:

- $X(i) = \sum_{D_p} X(i)$  : p nombre de sous-domaines



PI: Point d'interface (i)

$$X(i) = X^{(1)}(i) + X^{(2)}(i) + X^{(3)}(i)$$

$$X(i) = X^{(2)}(i) + X^{(1)}(i) + X^{(3)}(i)$$

$$X(i) = X^{(3)}(i) + X^{(1)}(i) + X^{(2)}(i)$$



Non associativité

$$X(i) \neq X(i) \neq X(i)$$

Contrainte de continuité

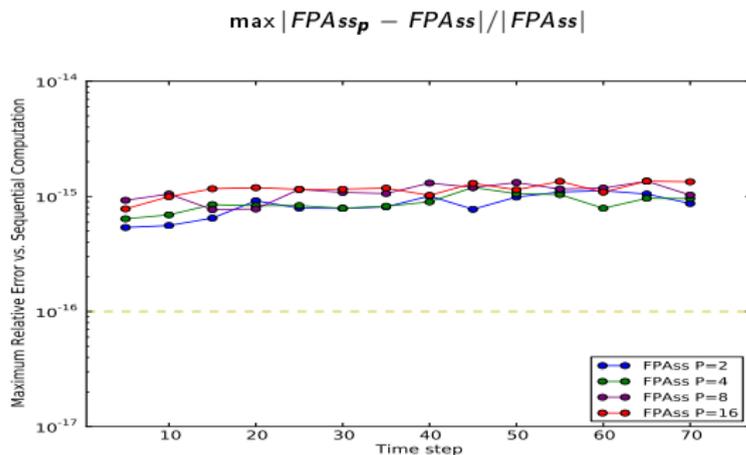


$$X(i) = X(i) = X(i) = \max(X(i), X(i), X(i))$$

Le max des sommes n'est pas reproductible  
séquentiel VS parallèle  
p- parallèle  $D_1..D_p$  VS q- parallèle  $D_1..D_q$  :  $p \neq q$

Assemblage en nombre flottant :

- $FPA_{ss_p}$  vs  $FPA_{ss}$  :  $p$  nombre de sous-domaines
  - $FPA_{ss_p} \neq FPA_{ss}$
  - $FPA_{ss_p} \neq FPA_{ss_q}$  :  $p \neq q$



Non-reproductibilité de la fréquence moyenne de la houle FMOY, cas de test Nice, Tomawac

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Telemac-Mascaret
  - Assemblage élément fini
  - En parallèle: assemblage des points d'interface
  - Non-reproductibilité de Tomawac
- 3 Obtenir l'associativité de l'addition parallèle
  - CompAss
  - ReprodAss
  - IntAss
- 4 Conclusion et perspectives

## Comment obtenir la reproductibilité de Tomawac?

- CompAss : accumuler les erreurs d'arrondi pour compenser le résultat.
- ReprodAss : utiliser des algorithmes de somme reproductible.
- IntAss : utiliser des entiers pour calculer des sommes exactes [1].

## Comment obtenir la reproductibilité de Tomawac?

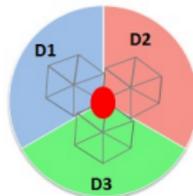
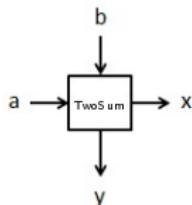
- **CompAss** : accumuler les erreurs d'arrondi pour compenser le résultat.
- **ReprodAss** : utiliser des algorithmes de somme reproductible.
- **IntAss** : utiliser des entiers pour calculer des sommes exactes [1].

```
for idp= 1, ndp
```

```
  for ielem= 1, nelem
```

```
    i=IKLE(ielem, idp)
```

```
    X(i)=X(i)+W(ielem,idp)
```



D1

D2

D3

Assemblage EF par sous-domaines

 $\forall i \in \text{points du maillage, } W_i(e_n); i \in e_1, e_2, \dots, e_n$ 

similar

$$X(i) = W_i(e_1) + W_i(e_2) + \dots + W_i(e_n)$$

similar

$$\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_n$$

$$E(i) = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

Assemblage PI

Si  $i \in [PI]$  Point d'interface : accumuler les erreurs  $\Delta$  et  $E$  $X(i), E(i)$ 

$$X(i) = X^{(2)}(i) + X^{(1)}(i) + X^{(3)}(i)$$

 $X(i), E(i)$ 

similar

$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2$$

similar

$$E(i) = ((E^{(2)}(i) + E^{(1)}(i) + \varepsilon_1) + E^{(3)}(i) + \varepsilon_2)$$

Correction de l'assemblage EF

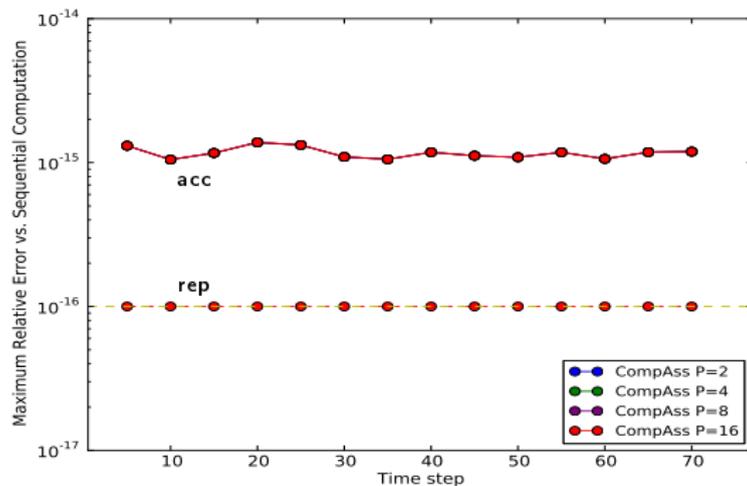
 $\forall i \in \text{points du maillage : ajouter à } [X] \text{ les erreurs accumulées}$ 

similar

$$X(i) = X(i) + E(i)$$

similar

- CompAss est reproductible.
- CompAss est plus précis



$A^s$  : séquentiel,  $A^P$  : parallèle  
 $\max_{rel} (A1, A2) = |A1 - A2| / |A2|$

Précision :  
 $acc = \max_{rel} (CompAss^P, FPAss^s)$

Reproductibilité :  
 $rep = \max_{rel} (CompAss^P, CompAss^s)$

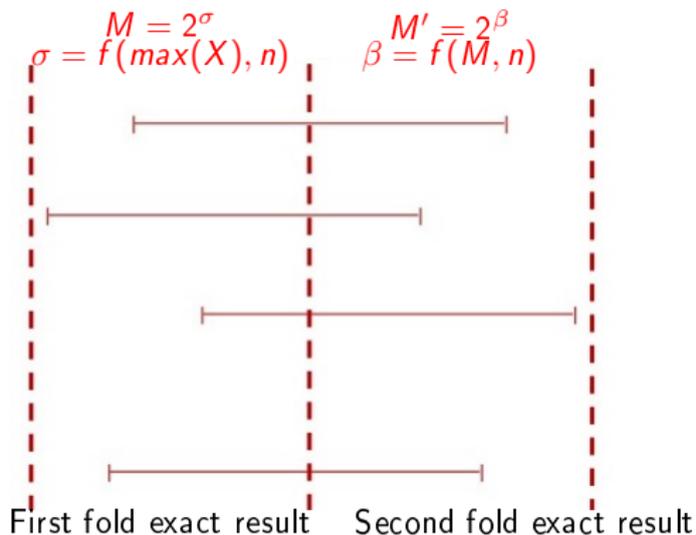
Reproductibilité et précision de la fréquence moyenne de la houle FMOY (Nice test case, Tomawac).

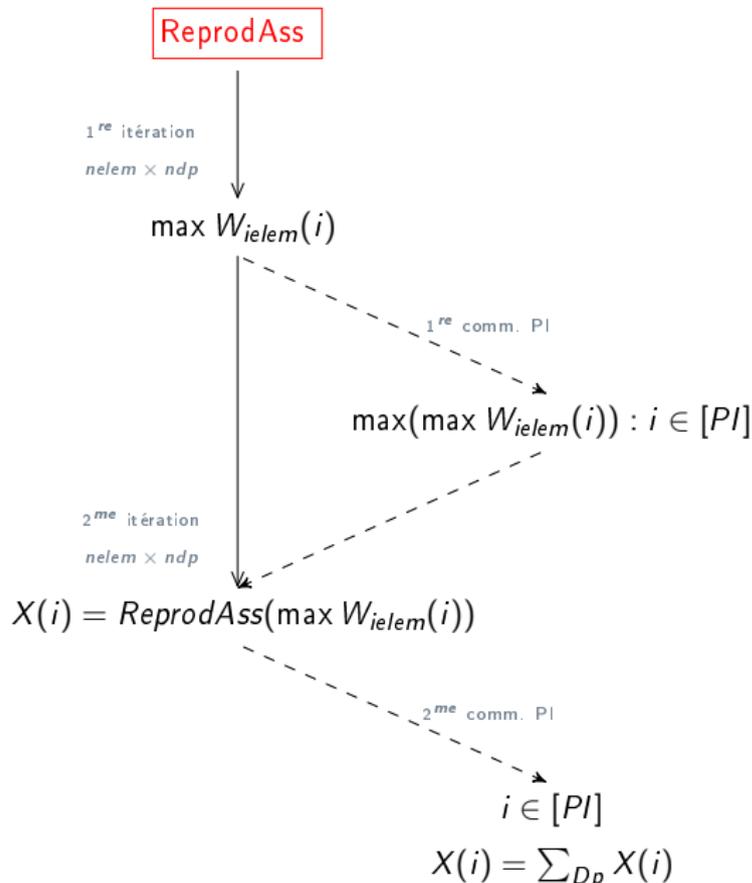
# Comment obtenir la reproductibilité de Tomawac?

- CompAss : accumuler les erreurs d'arrondi pour compenser le résultat.
- **ReprodAss** : utiliser des algorithmes de somme reproductible.
- IntAss : utiliser des entiers pour calculer des sommes exactes [1].

## Somme reproductible de Demmel-Nguyen [2] :

- Parallel K-fold reproducible summation
- Somme exacte de chaque tranche définie avec le  $\max x_i$
- Progresser K fois  $\Rightarrow$  plus précis
- Besoin de 2 réductions : max et sum





```

for idp= 1, ndp
  for ielem= 1, nelem
    i=IKLE(ielem, idp)
    X(i)=X(i)+W(ielem,idp)
  
```

ReprodAss nécessite :

2 itérations  $nelem \times ndp$

- 1- Récupérer  $\max W_{ielem}(i)$
- 2- Calculer  $X(i)$

2 phases de communication

- 1- assembler  $\max W_{ielem}(i)$
- 2- assembler  $X(i)$

- ReprodAssK1 est reproductible.
  - Peu précis à priori
- ReprodAssK2 est reproductible.
  - plus précis : CompAss = ReprodAssK2

$A^S$  : séquentiel,  $A^P$  : parallèle

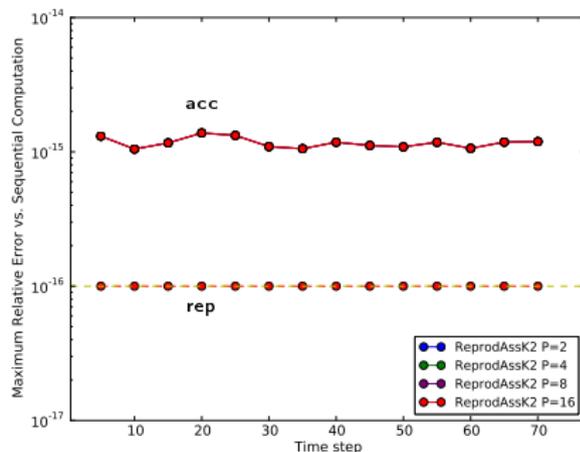
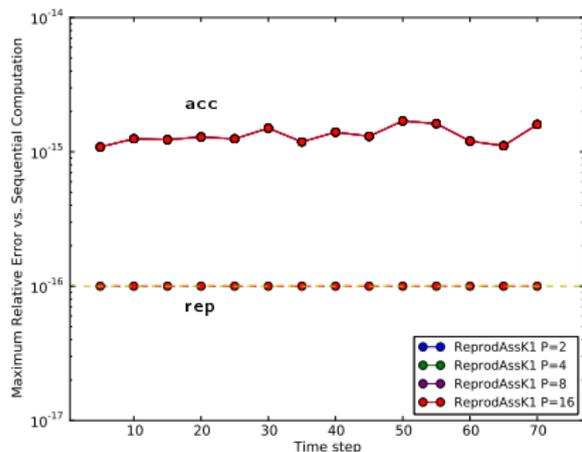
$$\max_{rel}(A1, A2) = |A1 - A2|/|A2|$$

Précision :

$$acc = \max_{rel}(ReprodAss^P, FPAss^S)$$

Reproductibilité :

$$rep = \max_{rel}(ReprodAss^P, ReprodAssK^S)$$

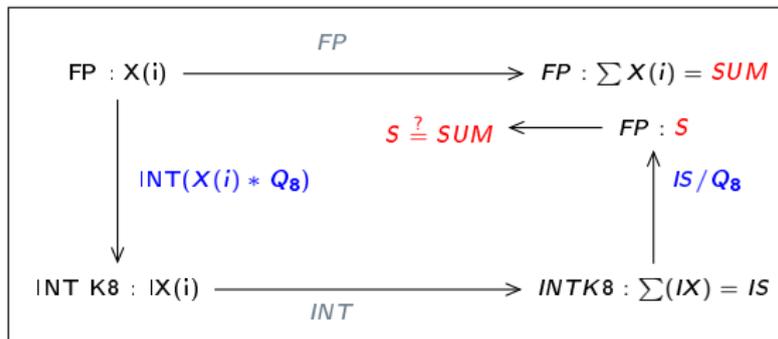


# Comment obtenir la reproductibilité de Tomawac?

- CompAss : accumuler les erreurs d'arrondi pour compenser le résultat.
- ReprodAss : utiliser des algorithmes de somme reproductible.
- IntAss : utiliser des entiers pour calculer des sommes exactes [1].

La conversion :  $IX = \text{INT}(X * Q_8)$  où  $Q_8 = \frac{\max(\text{INT K8})}{\max(|X|) * N}$

- $X$  (nombre flottant),  $IX$  (nombre entier)
- $\max(\text{INT K8})$  : plus grande valeurs représentable du type entier 8 bytes ( $2^{63} - 1$ )
- $\max(X)$  : max de  $X$
- $N$  : nombre d'addition



$$S = SUM \text{ si } X * Q_8(X, N) \in \text{INTK8}$$

$$Q_8(X, N) = \frac{\max(\text{INT } K_8)}{\max(X) * N}$$

Exemple :  $N = 10$

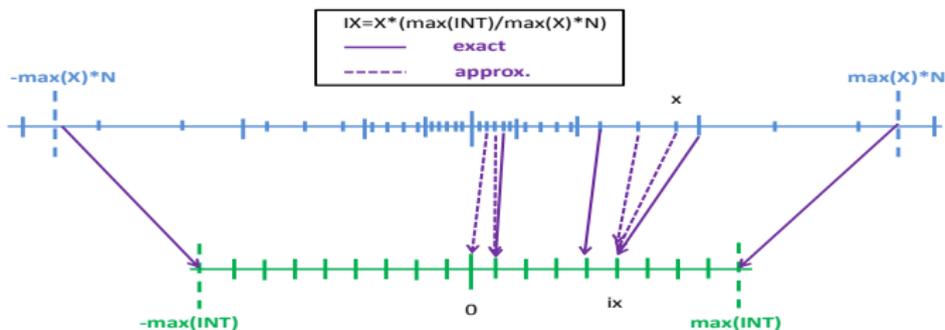
$X \in [10^2, 10^6[$  ,  $\max(X) = 10^6$

$IX \in [0, 10^8[$  ,  $\max(IX) = 10^8$

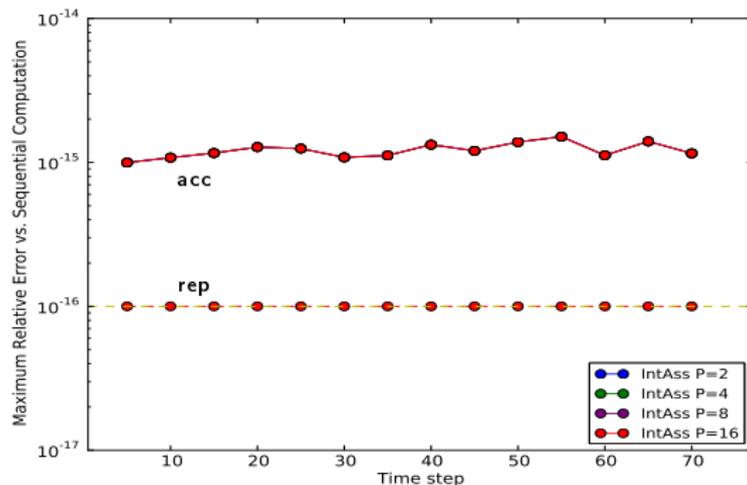
$$Q = \frac{10^8}{10^6 * 10} = 10$$

X=	100.0	100.1	...	100.11	...	100.2	...	100.26	...
	✓	✓	...	✗	...	✓	...	✗	...
IX=	1000	1001	...	1001	...	1002	...	1002	...

$$IX = \text{INT}(X * Q_8)$$



- Assemblage EF et PI en entier
- IntAss est reproductible.
- Perte de précision pendant les conversions
  - $Q_8(X, N) = 2^\alpha$  et faible dynamique de X améliore la précision



$A^S$  : séquentiel,  $A^P$  : parallèle

$$\max_{rel}(A1, A2) = |A1 - A2| / |A2|$$

Précision :

$$acc = \max_{rel}(IntAss^P, FPAss^S)$$

Reproductibilité :

$$rep = \max_{rel}(IntAss^P, IntAss^S)$$

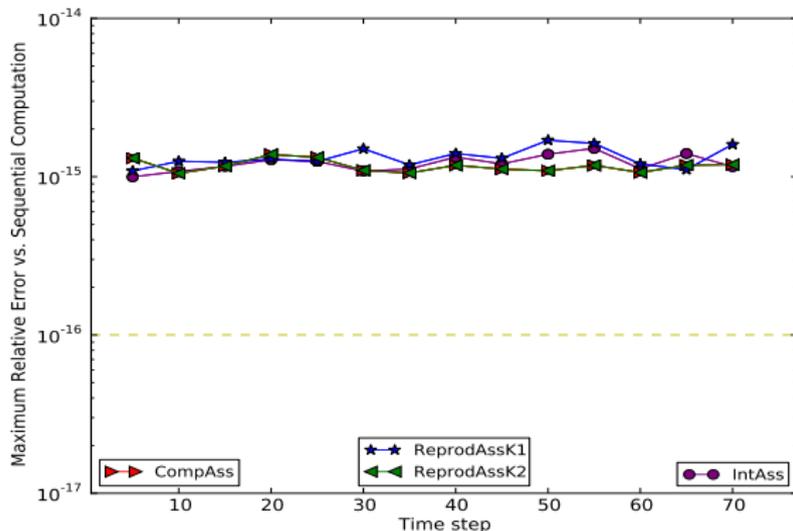
Reproductibilité et précision de la fréquence moyenne de la houle FMOY (Nice test case, Tomawac).

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Telemac-Mascaret
  - Assemblage élément fini
  - En parallèle: assemblage des points d'interface
  - Non-reproductibilité de Tomawac
- 3 Obtenir l'associativité de l'addition parallèle
  - CompAss
  - ReprodAss
  - IntAss
- 4 Conclusion et perspectives

## 3 solutions pour assurer la reproductibilité de Tomawac:

- CompAss : plus précis
- ReprodAss
  - k=1 : perte de précision
  - k=2 : plus précis
- IntAss : perte de précision



$A^s$  : séquentiel,  $A^P$  : parallèle

$$\max_{rel}(A1, A2) = |A1 - A2| / |A2|$$

Précision :

$$\max_{rel}(CompAss^P, FPAss^s)$$

$$\max_{rel}(ReprodAssK1^P, FPAss^s)$$

$$\max_{rel}(ReprodAssK2^P, FPAss^s)$$

$$\max_{rel}(IntAss^P, FPAss^s)$$

# Perspective

## Reproductibilité du module Telemac-2D!

### Résolution d'un système linéaire

- Assemblage élément fini et point d'interface
  - coefficient matrice et **second membre**
- Produit scalaire, produit matriciel...



Open telemac.

<http://www.opentelemac.org>, v.7.0, Release notes, 2014.



James W. Demmel and Hong Diep Nguyen.

Fast reproducible floating-point summation.

In *Proc. 21th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*. Austin, Texas, USA, 2013.



Jean-Michel Hervouet.

*Hydrodynamics of free surface flows: Modelling with the finite element method.*

John Wiley & Sons, 2007.



Takeshi Ogita, Siegfried M. Rump, and Shin'ichi Oishi.

Accurate sum and dot product.

26(6):1955–1988, 2005.