А. Шень

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

Издание второе, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 514.112
ББК 22.151.0
Ш47

Шень А.

Ш47 Геометрия в задачах. — М.: МЦНМО, 2015. — 2-е изд., стереотип. — 240 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0255-5

Сборник задач по геометрии рассчитан на школьников средних и старших классов, а также преподавателей и любителей математики. Он содержит более 750 задач, по большей части снабжённых решениями, а также задачи для самостоятельного решения (многие — с указаниями). Каждый раздел предваряется кратким перечнем сведений, нужных для понимания и решения задач. Необходимые чертежи (более 450) вынесены на поля.

Прорешав задачи сборника, читатель познакомится с основными фактами и методами школьного курса планиметрии и (мы надеемся) получит удовольствие.

Первое издание книги вышло в 2013 г.

ББК 22.151.0

Фотография на обложке: Бьярне Паг Бюрнак (Bjarne Pagh Byrnak), см. `www.bjarne.altervista.org/rct/introduction.html`.

ISBN 978-5-4439-0255-5

Памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

Оглавление

Предисловие

Дорогие читатели-школьники и их родители![1]

В этой книжке собрано более 750 задач по школьному курсу планиметрии, по большей части несложных (но есть и трудные). В их число входят основные теоремы этого курса. Решая задачи, вы познакомитесь с основными фактами и методами планиметрии (или вспомните их ещё раз, если уже проходили в школе).

Задачи разбиты по темам. Перед каждым разделом мы кратко напоминаем основные определения и факты, которые могут понадобиться при решении задач. Бóльшая часть задач снабжена решениями. Тем не менее мы советуем не торопиться читать решение. Лучше сначала попробовать решить задачу (или хотя бы как следует осознать её условие). Тогда решения (иногда довольно краткие) будет легче прочесть и понять.

В книжке также приводятся задачи для самостоятельного решения. Многие из них снабжены краткими указаниями.

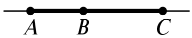
Желаем успехов!

[1]Обсуждение принципов отбора задач для этого сборника, рассчитанное на преподавателей математики, вынесено в послесловие.

1. Измерение отрезков

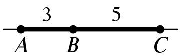
Две геометрические фигуры (отрезки, углы, треугольники и др.) считаются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.

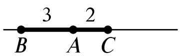
Отрезки равны, если равны их длины.



Если точка B лежит на отрезке AC, то $AB + BC = AC$.

1. На прямой выбраны три точки A, B и C, причём $AB = 3$, $BC = 5$. Чему может быть равно AC? (Есть разные возможности.)

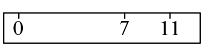




▷ Если точка B находится между точками A и C, то это расстояние равно $3+5 = 8$. Но возможен и другой случай, когда B находится вне отрезка AC. Нарисовав картинку, убеждаемся, что в этом случае расстояние равно $5 - 3 = 2$. ◁

2. На прямой выбраны четыре точки A, B, C, D, причём $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD? Укажите все возможности.

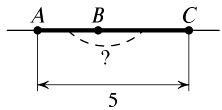
▷ Сначала посмотрим, чему может быть равно расстояние между точками A и C. Как и в предыдущей задаче, тут есть две возможности (точка B внутри AC или вне) — и получается либо 3, либо 1. Теперь мы получаем две задачи: в одной из них $AC = 3$ и $CD = 4$, в другой — $AC = 1$, $CD = 4$. Каждая имеет по два ответа, так что всего ответов получается четыре: $4+3$, $4-3$, $4+1$ и $4-1$. Ответ: расстояние AD может равняться 1, 3, 5 или 7. ◁



3. На деревянной линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11 сантиметров. Как отложить с её помощью отрезок в (а) 8 см; (б) 5 см?

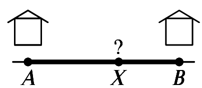
▷ Используя деления 7 и 11, легко отложить 4 сантиметра. Сделав это дважды, получим отрезок в 8 сантиметров. Отложить 5 сантиметров немного сложнее: умея откладывать 8 и 7, можно отложить 1 сантиметр. Сделав это 5 раз, получаем 5 сантиметров. ◁

Можно сделать иначе: мы умеем откладывать 4 см и 1 см, так что можно отложить их подряд и получить 5 см. Ещё один способ: $5 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 7$, так что достаточно отложить 3 раза по 11 см и потом 4 раза по 7 в другую сторону. (Преимущество приведённого сначала способа в том, что он годится для любого целого числа сантиметров.)

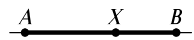


4. Точка B лежит на отрезке AC длиной 5. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и BC.

▷ Точку B можно выбирать по-разному. Например, пусть она делит отрезок AC на части в 1 см и 4 см. Середины этих частей (отрезков AB и BC) отстоят от B на 0,5 см и на 2 сантиметра, всего получается 2,5 см. Попробовав другие варианты расположения точки B, можно убедиться, что во всех случаях расстояние между серединами отрезков AB и BC равно 2,5 см. Почему? Дело в том, что это расстояние составлено из половин отрезков AB и BC. Вместе эти отрезки составляют 5 см, значит, их половины вместе составят 2,5 см. ◁



5. В деревне у прямой дороги стоят две избы A и B на расстоянии 50 метров друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до изб была бы наименьшей?

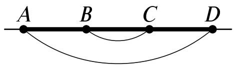


$AX + XB = AB$

▷ Если действовать по справедливости, то надо построить колодец посередине между избами: тогда до каждой будет 25 метров, а в сумме 50. Однако с точки зрения условия задачи любая точка X на участке дороги между A и B одинаково хороша, поскольку в сумме отрезки AX и XB составляют 50 метров. (Например, если построить колодец в 10 метрах от A, то расстояния будут 10 и 40 метров, то есть 50 в сумме.) ◁

6. Та же задача для трёх и четырёх изб, стоящих вдоль дороги с интервалами в 50 метров: где надо строить колодец в этом случае?

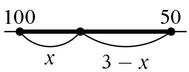
▷ Для трёх изб: если среднюю избу не учитывать, то все точки на отрезке между крайними избами были бы одинаково хороши. Значит, наилучшее положение колодца для трёх изб — у средней избы.



Для четырёх изб (обозначим их A, B, C, D): будем отдельно рассматривать две крайние избы (A, D) и отдельно две средние (B, C). В первом случае все точки отрезка AD одинаково хороши: сумма расстояний до A и D будет 150 метров. Во втором наименьшую сумму длин (50 метров) дают точки меньшего отрезка BC. Ответ: наименьшая сумма длин (200 метров) достигается для всех точек из отрезка BC. ◁

7. В деревне A живёт 100 школьников, в деревне B живёт 50 школьников. Расстояние между деревнями 3 километра. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

▷ Здесь кажется справедливым построить школу ближе к A, так как там больше школьников. Но насколько ближе? Иногда предлагают построить деревню в километре от A и в двух от B (вдвое больше школьников — вдвое ближе школа). Но с точки зрения поставленной задачи (суммарное расстояние как можно меньше) этот вариант не наилучший — лучше всего построить школу прямо в A.



В этом можно убедиться так: если расстояния от школы до A и B равны x и $3 - x$ соответственно, то суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, равно $100x + 50(3 - x) = 100x + 150 - 50x = 50x + 150$, так что оно наименьшее (и равно 150 км), когда $x = 0$. ◁

То же самое можно объяснить и без формул: каждый метр сдвига школы в сторону A сокращает на метр путь для 100 школьников и удлиняет на метр путь для 50 школьников, то есть суммарный путь уменьшается на 50 метров.

Можно сказать ещё и так: разделим всех школьников A произвольным образом на две группы по 50 человек. Если бы второй группы не было, то было бы всё равно, где строить школу (задача о колодце) — а с точки зрения второй группы лучше всего строить её в A.

Ещё несколько задач

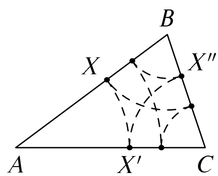
8. На прямой даны точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, а отрезок AC длиннее BC на 1. Найдите длины отрезков AC и BC. Может ли точка B лежать вне AC?

9. На прямой даны точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, а отрезок AC длиннее BC в полтора раза. Найдите длины отрезков AC и BC. (Укажите все возможности.)

10. Точка B делит отрезок AC в отношении $2 : 1$. Точка D делит отрезок AB в отношении $3 : 2$. В каком отношении делит точка D отрезок AC?

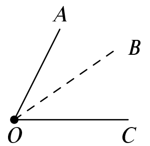
11. Точки C, D и E делят отрезок AB в отношении $1 : 2$, $1 : 3$ и $1 : 4$ соответственно. В каком отношении точка D делит отрезок CE?

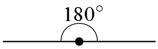
12. На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка X. Затем на стороне AC взята точка X', для которой $AX = AX'$. После этого на стороне BC взята точка X'', для которой $CX' = CX''$ и так далее (см. рисунок). Докажите, что после нескольких раз мы попадём в исходную точку X.

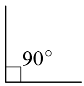


13. Шесть машин едут по дороге из города А в город Б. В данный момент они находятся в разных точках дороги, но известно, что суммарное расстояние, которое проехали (считая от А) все машины — 75 километров, а до Б осталось им ехать (тоже в сумме) 45 километров. Какова длина дороги из А в Б?

2. Измерение углов







Углы равны, если равны их величины.

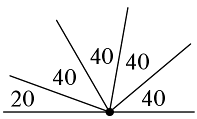
Если луч OB делит угол AOC на две части, то угол AOC равен сумме его частей AOB и BOC. (запись: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$).

Развёрнутый угол (угол между двумя половинами одной прямой) считается равным 180 градусам (180°). Другими словами, градус — это 1/180 часть развёрнутого угла.

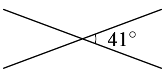
Прямой угол — половина развёрнутого, т. е. 90°.

Углы, меньшие прямого, называют *острыми*, большие прямого — *тупыми*.

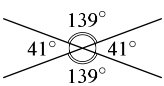
14. Имеется деревянный угольник с углом в 40°. Как построить с его помощью угол (а) 80°; (б) 160°; (в) 20°?



▷ Построить угол в 80° просто — надо отложить дважды угол по 40°. Дальше получатся углы в 120° и в 160° (который нам нужен). Заметим теперь, что 20° — это дополнение 160° до развёрнутого угла, так что если мы продолжим одну из сторон угла в 160° за его вершину, то получим искомый угол в 20°. ◁



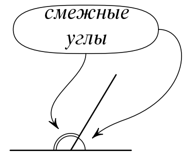
15. Один из четырёх углов, образующихся при пересечении двух прямых, равен 41°. Чему равны три остальных угла?



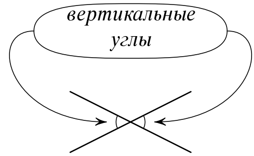
▷ Соседние углы дополняют угол в 41° до развёрнутого, который составляет 180°, поэтому они содержат $180° - 41° = 139°$. В свою очередь, чтобы дополнить угол в 139° до развёрнутого, нужен угол в $180° - 139° = 41°$. Таким образом, два угла из трёх равны 139°, а один — 41°. ◁

16. В Париже в течение долгого времени хранился эталон метра (пока метр не стали определять через скорость света и единицы времени), однако эталона градуса там никогда не было. Как вы думаете, почему?

▷ Специального эталона не нужно: любая прямая может считаться эталоном развёрнутого угла. ◁



> При пересечении двух прямых образуются четыре угла. Если два из них имеют общую сторону, их называют *смежными*, если не имеют — *вертикальными*.



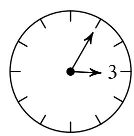
17. Смежные углы в сумме составляют развёрнутый угол (180°). Выведите отсюда, что вертикальные углы равны.

▷ Рассуждаем как в задаче 15 — каждый из двух вертикальных углов дополняет смежный с ними угол до развёрнутого, значит, они равны. ◁

18. На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? Часовая стрелка?

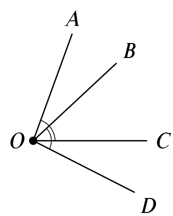
▷ За час минутная стрелка делает целый оборот, за полчаса она поворачивается на 180° (развёрнутый угол). Полчаса — это 30 минут, значит, за минуту она поворачивается на $1/30$ часть угла в 180°, то есть на $180/30 = 6^\circ$.

Часовая стрелка за час проходит $1/12$ часть круга, то есть движется в 12 раз медленнее минутной. За минуту она поворачивается на $0{,}5^\circ$. ◁



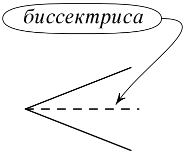
19. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки ровно в 3 часа 05 минут?

▷ За пять минут, прошедших после 3 часов, минутная стрелка повернётся на 30°. Но для правильного ответа надо учесть, что повернётся и часовая стрелка. На сколько? За час она поворачивается на одно часовое деление циферблата, то есть на те же 30°. Значит, за 5 минут она повернётся на $1/12$ долю от 30°, то есть на $2{,}5^\circ$. Теперь легко получить ответ: из начального угла в 90° надо вычесть 30° и прибавить $2{,}5^\circ$, получится $62{,}5^\circ$. ◁



20. Из точки O выходят лучи OA, OB, OC, OD (см. рисунок). Известно, что $\angle AOC = \angle BOD$. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.

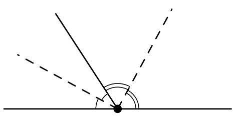
▷ Если из равных величин вычесть одно и то же — останутся равные. Здесь так и происходит: из равных углов AOC и BOD мы вычитаем их пересечение — угол BOC. Остаются как раз углы AOB и COD. ◁



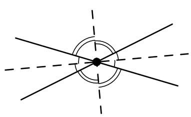
Луч, делящий угол пополам, называется его *биссектрисой.*

Два луча (или две прямые), образующие прямой угол, называют *перпендикулярными.*

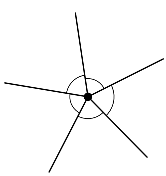
21. Докажите, что биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.



▷ Рассмотрим два смежных угла, каждый из которых разделён биссектрисой на две равные части. Таким образом, развёрнутый угол разделён на четыре части — две равные половины одного угла и две равные половины другого. Если из этих четырёх частей оставить только две (по одной из каждой пары равных), то они составят половину развёрнутого угла, то есть прямой угол. Первая часть задачи решена.



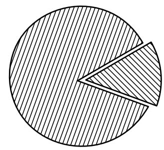
Пусть теперь даны две прямые, в пересечении которых получается четыре угла. Нам надо доказать, что биссектрисы противоположных (вертикальных) углов лежат на одной прямой, то есть продолжают друг друга. Проведём биссектрисы всех четырёх углов. Мы уже видели, что соседние из них образуют прямой угол. Два прямых угла в сумме дают развёрнутый, так что противоположные биссектрисы действительно лежат на одной прямой. ◁



22. Пять лучей, выходящих из одной точки, разрезают плоскость на пять равных углов. Найдите величину этих углов.

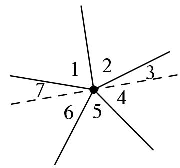
▷ В сумме эти пять углов составляют полный круг, то есть два развёрнутых угла, то есть $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. Каждый из них составляет одну пятую от 360°, то есть $360/5 = 72^\circ$. ◁

Эта задача и её решение требуют некоторых комментариев. Дело в том, что разные учебники геометрии по-разному трактуют понятие угла. Можно считать, что угол — это геометрическая фигура, составленная из двух лучей. А можно считать, что угол — это не сами лучи, а часть плоскости, между ними содержащаяся. При таком понимании два луча с общей вершиной определяют два угла: они получаются, если сделать разрезы по сторонам. Один из этих углов меньше развёрнутого, а другой больше.



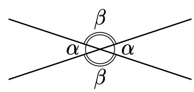
При первом подходе максимально возможная величина угла — это 180° (развёрнутый угол), при втором — 360° (полный круг, который можно условно считать дополнением к углу в 0°).

Какое отношение это имеет к предыдущей задаче? Вот какое: если мы разрешаем углы больше 180°, то всё просто — угол в 360° разрезан на 5 равных частей, сумма которых равна 360°, и т. д. Если же мы не хотим говорить об углах, больших 180°, то это рассуждение не годится и надо действовать чуть сложнее. Проведём какую-нибудь прямую через заданную точку, которая разделит два из пяти углов на части. Всего получится 7 частей. В сумме эти части дают столько же, сколько наши пять углов (каждый разрезанный угол равен сумме двух его частей). С другой стороны, эти части складываются в два развёрнутых угла, поэтому в сумме дают $2 \times 180°$.



23. Из точки выходят четыре луча, делящие плоскость на четыре угла. При этом оказалось, что (считая против часовой стрелки) первый угол равен третьему, а второй — четвёртому. Докажите, что лучи составляют две прямые (продолжая друг друга).

▷ Обозначим первый и третий углы (они равны) через α, а второй и четвёртый — через β. Тогда $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 360°$, то есть $2\alpha + 2\beta = 360°$, поэтому $2(\alpha + \beta) = 360°$, и $\alpha + \beta = 180°$. А рядом находящиеся углы, в сумме дающие 180°, составляют развёрнутый угол. ◁



Ещё несколько задач

24. Имеется деревянный угольник с углом в 19°. Как построить с его помощью угол в 1°? ⟨Что будет, если откладывать угол в 19°, пока не получится полный круг?⟩

25. Прямой угол разделен двумя лучами на три угла. Один из них на 10° больше другого и на 10° меньше третьего. Найдите величины углов. [Ответ: 30°, 20°, 40°.]

26. Прямой угол разделен двумя лучами на три угла. Один из них в два раза меньше другого и в три раза меньше третьего. Найдите величины углов. [Ответ: 15°, 30°, 45°.]

27. В полдень минутся и часовая стрелки совпали. Когда они совпадут в следующий раз? [Ответ: Через $12/11$ часа.]

28. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? Сколько раз они образуют развёрнутый угол? прямой угол?

29. Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20°. $\langle$Всего 20 лучей, 20 углов по 20° дают $400^\circ > 360^\circ$.$\rangle$

30. Из одной точки выходят четыре луча OA, OB, OC, OD (перечисленные по часовой стрелке), которые делят плоскость на четыре угла, три из которых таковы: $\angle AOB = 45^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle COD = 105^\circ$. Найдите четвёртый угол AOD. Найдите углы AOC и BOD. [Ответ: 120°, 135°, 165° (если брать угол, меньший 180°; если складывать BOC и COD, то получится угол в 195°, больший развёрнутого).]

31. Из одной точки проведены три луча OA, OB и OC. Известно, что $\angle AOB = 10^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$. Чему может быть равен угол AOC? Укажите все возможности. [Ответ: 10°, 30°.]

32. Из одной точки проведены четыре луча OA, OB, OC и OD. Известно, что $\angle AOB = 10^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$ $\angle COD = 40^\circ$. Чему может быть равен угол AOD? Укажите все возможности. [Ответ: 10°, 30°, 50°, 70°.]

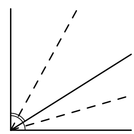
33. Угол AOB равен 100°. Луч OC проведён так, что угол AOC на 10° больше угла BOC. Чему равны углы AOC и BOC? (Укажите все возможности.) [Ответ: 55°, 45°; другой вариант — 135°, 125°.]

34. Угол AOB равен 100°. Луч OC проведён так, что угол AOC в полтора раза больше угла BOC. Чему равны углы AOC и BOC? (Укажите все возможности.) [Ответ: 60°, 40°; другой вариант — 156°, 104°.]

35. Из точки провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла, которые пронумеровали по часовой стрелке. Докажите, что если первый и третий углы равны, то биссектрисы второго и четвёртого лежат на одной прямой.

36. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые тоже являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме 180°, и два остальных — тоже.

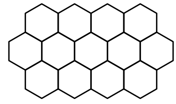
37. Прямой угол разделён на два. Найдите угол между биссектрисами получившихся углов.



38. Из бумаги вырезано много одинаковых углов, величина которых составляет целое число градусов. Известно, что 21 такой угол можно приложить друг к другу, и они ещё не заполнят всей плоскости, а 22 уже не поместятся. Найдите величину углов. [Ответ: $360/21 > x > 360/22$; $x = 17^\circ$.]

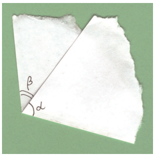
39. Можно ли нарисовать треугольник и точку внутри него, из которой любая сторона видна под прямым углом? $\langle 3 \times 90 = 270 < 360. \rangle$

40. Пчелиные соты состоят из примыкающих друг к другу одинаковых шестиугольников, в которых все углы равны. Чему равны эти углы?



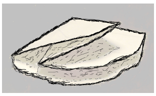
41. Из точки O на плоскости выходят четыре луча OA, OB, OC и OD (перечислены против часовой стрелки). Известно, что сумма углов AOB и

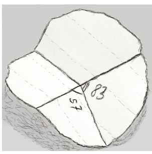
COD равна 180°. Докажите, что биссектрисы углов *AOC* и *BOD* перпендикулярны.



42. Кусок бумаги с прямым краем перегнули по прямой и сплющили (см. рисунок). Как найти угол β, зная угол α?

43. Вы хотите нарисовать в тетрадке прямой угол, но забыли угольник дома. Как это можно сделать? [Ответ: Взять листок бумаги с прямым краем и сложить его пополам; если прямого края нет, можно сначала сложить сам листок вдвое и потом вчетверо.]

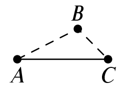




44. Клочок бумаги согнули и сплющили, а потом развернули и отметили линии сгиба — четыре луча, которые образуют четыре угла. Оказалось, что два из этих углов (соседние) равны 57° и 83°. Чему равны остальные два угла?

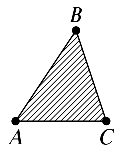
3. Неравенство треугольника

> Если точка B не лежит на отрезке AC, то расстояние AC меньше суммы расстояний AB и BC.



прямой путь $(A \to C)$ *короче непрямого* $(A \to B \to C)$

45. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон. (Треугольник — фигура из трёх точек, не лежащих на одной прямой, соединённых отрезками. Точки эти называются *вершинами*, а отрезки — *сторонами* треугольника.)



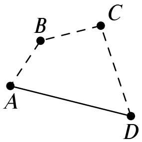
▷ На самом деле эта задача всего-навсего повторяет приведённое выше утверждение: если A, B и C — вершины треугольника, AC — одна из его сторон, а AB и BC — две другие стороны, то как раз и надо доказать, что $AC < AB + BC$. (Точка B не лежит на отрезке AC, так как точки A, B и C не лежат на одной прямой.) ◁

Поэтому приведённое выше неравенство ($AC < AB + BC$) так и называют — *неравенство треугольника.*

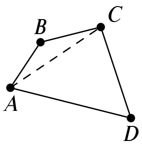
Неравенство треугольника можно сформулировать и так: $AB + BC \geqslant AC$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B лежит на отрезке AC.

46. Расстояние AB равно 5, а расстояние BC равно 3. Может ли расстояние AC быть равно 9? Может ли расстояние AC быть равно 1?

▷ На оба вопроса ответ отрицательный. В первом случае это невозможно, так как AC не может быть больше $AB + BC = 5 + 3 = 8$. Во втором случае дело немного сложнее, и надо применить неравенство треугольника к тем же точкам в другом порядке. Если $AC = 1$, то получится, что $AC + CB = 3 + 1 = 4$; между тем $AB = 5$. Получается, что $AB > AC + CB$, чего не может быть (неравенство треугольника, только точки переименованы). ◁



47. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что $AD \leqslant AB + BC + CD$.



▷ Это неравенство можно было бы называть *неравенством четырёхугольника* и прочесть так: сторона четырёхугольника не меньше суммы трёх других его сторон. (Или так: ломаный путь $ABCD$ не короче прямого AD.) Оно является следствием неравенства треугольника, и чтобы увидеть это, достаточно провести в четырёхугольнике диагональ. В самом деле, если в сумме $AB + BC + CD$ заменить два первых слагаемых на AC, то по неравенству треугольника сумма уменьшится (или останется той же, если точка B лежит на отрезке AC). Остаётся второй раз применить неравенство треугольника и заметить, что $AC + CD \geqslant AD$.

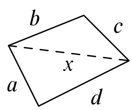
Повторим наше рассуждение более формально. По неравенству треугольника, $AB + BC \geqslant AC$. Прибавляя к обеим частям CD, видим, что $AB + BC + CD \geqslant AC + CD$. С другой стороны, по неравенству треугольника $AC + CD \geqslant AD$. ◁

48. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра (суммы сторон).

▷ Здесь удобно обозначить стороны треугольника буквами a, b и c. Тогда полупериметр будет $(a+b+c)/2$ и нам надо доказать, что сторона треугольника (пусть a) меньше, то есть что

$$a < \frac{a+b+c}{2}.$$

Удобнее умножить обе части неравенства на 2 и доказывать, что $2a < a + b + c$. А это понятно, поскольку $a < b + c$ по неравенству треугольника и остаётся добавить a к обеим частям. ◁

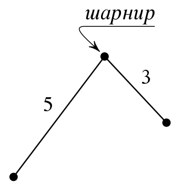


49. Докажите, что в четырёхугольнике любая диагональ меньше половины периметра (суммы четырёх сторон).

▷ Пусть диагональ четырёхугольника со сторонами a, b, c, d равна x (см. рисунок). Она разбивает его на два треугольника. Запишем два неравенства для этих треугольников:

$$x < a + b; \; x < c + d.$$

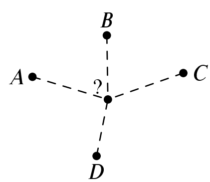
Если их сложить, получится, что $2x < a+b+c+d$. Остаётся поделить обе части пополам. ◁



50. Двухзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 5 и 3 см, концы которых соединены так, что могут вращаться друг относительно друга (см. рисунок). Какое расстояние (минимальное и максимальное) может быть между другими концами?

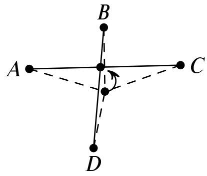
▷ Вопрос можно сформулировать так: в каких пределах может меняться расстояние AC, если $AB = 5$, $BC = 3$? Неравенство треугольника говорит, что AC не может быть больше $AB + BC = 5 + 3 = 8$ см. Это значение достигается, если точки A, B, C лежат на одной прямой (в указанном порядке). Итак, максимальное значение AC есть 8. С другой стороны, расстояние AC не может быть меньше 2, так как в этом случае $AC + CB$ было бы меньше $2 + 3 = 5$, что противоречит неравенству $AC + CB \geqslant AB$. Минимальное значение $AC = 2$ достигается, когда C лежит на отрезке AB. ◁

Наглядно это можно пояснить так: если тянуть за концы шарнира, стараясь максимально развести их друг от друга, то он полностью раскроется, отрезки AB и BC будут продолжать друг друга и расстояние AC будет равно 8. Напротив, если мы пытаемся приблизить C к A насколько возможно, то C будет на отрезке AB. При этом AC будет равно 2.



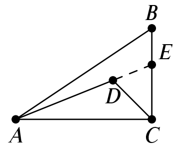
51. Четыре дома A, B, C и D расположены в вершинах четырёхугольника (см. рисунок). Где нужно вырыть колодец X, чтобы сумма расстояний от него до четырёх домов была наименьшей?

▷ Если заботиться только о жителях домов A и C, забыв об интересах жителей B и D, то оптимальными будут точки X на отрезке AC (и с точки зрения суммы $AX + XC$ они все одинаково хороши). Аналогичным образом, с точки зрения суммы

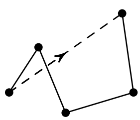


$BX + XD$ оптимальными являются точки отрезка BD. Тем самым точка пересечения AC и BD является оптимальной во всех отношениях: для неё обе суммы $AX+XC$ и $BX+XD$ принимают минимально возможные значения, и, следовательно, общая сумма $AX + BX + CX + DX$ также минимальна. ◁

52. Внутри треугольника ABC взята точка D. Докажите, что $AD + DC \leqslant AB + BC$.

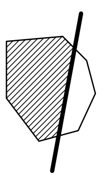


▷ Чтобы решить эту задачу, сделаем, как говорят, *дополнительное построение*: продолжим отрезок AD за точку D до пересечения со стороной BC. Назовём точку пересечения E. Теперь возьмём $AE + EC$ в качестве промежуточной величины для сравнения. Путь $A–B–C$ длиннее пути $A–E–C$, ведь участок $E–C$ у них общий, а $AB + BE$ длиннее AE по неравенству треугольника. Далее, путь $A–E–C$ длиннее пути $A–D–C$, поскольку участок $A–D$ у них общий, а $DE + EC > DC$. ◁



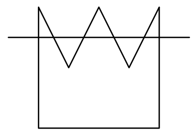
53. Докажите, что длина ломаной линии (непрерывной линии, составленой из нескольких отрезков) не меньше расстояния между её концами. (Таким образом, прямой путь всегда короче непрямого.)

▷ Будем спрямлять наш путь постепенно. Возьмём какой-то участок пути из двух звеньев PQ и QR и заменим участок $P–Q–R$ на отрезок $P–R$. По неравенству треугольника путь сократится, а количество звеньев ломаной уменьшится на 1. После нескольких таких сокращений мы и получим прямой путь. ◁



54. Многоугольник разрезали по прямой на две части. Докажите, что периметр каждой из частей меньше периметра исходного многоугольника. (Другими словами, если отрезать от бумажного многоугольника кусок, сделав прямой разрез, то его периметр уменьшится.)

▷ Периметр каждой из частей отличается от полного периметра исходного многоугольника тем, что ломаный участок пути заменён на прямой. От этого периметр может только уменьшиться. ◁



Эта задача требует некоторого пояснения. Вообще говоря, прямая может делить многоугольник не на две части, а на три или даже больше (см. рисунок). Такие многоугольники называют *невыпуклыми*. Но и в этом случае периметр каждой части (по тем же причинам) не больше периметра исходного многоугольника.

Можно по-разному объяснять, что такое выпуклый многоугольник. Вот несколько вариантов: многоугольник выпуклый, если

- всякий отрезок, соединяющий две точки внутри многоугольника, целиком лежит в нём;
- многоугольник лежит по одну сторону от любой прямой, проведённой по его стороне;
- все углы в нём меньше 180°;
- его можно вырезать из бумаги, разрезая её по прямым.

Интуитивно ясно, что все эти свойства описывают одни и те же многоугольники (как говорят математики, *эквивалентны*), но строго доказать это (и даже сформулировать) совсем не просто.

55. Один выпуклый многоугольник лежит внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего.

$\triangleright$ Внутренний многоугольник можно вырезать из внешнего, проводя разрезы по сторонам. Каждый из таких разрезов отрезает от остающегося многоугольника кусок и (как мы видели в задаче 54) уменьшает периметр, пока в итоге не получится внутренний многоугольник. $\triangleleft$

Ещё несколько задач

56. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей? [Ответ: $x/2 + x < 2x$, нет.]

57. Трёхзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 2, 5 и 8 см. Какое расстояние (минимальное и максимальное) может быть между его концами? [Ответ: 1, 15.]

58. Докажите, что в четырёхгольнике сумма диагоналей меньше периметра (суммы сторон).

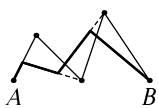
59. Внутри треугольника ABC взята точка X. Докажите, что сумма расстояний $XA + XB + XC$ не меньше половины периметра треугольника. ⟨Воспользуйтесь неравенством $XA + XB \geqslant AB$ и аналогичными.⟩

60. Один выпуклый четырёхугольник находится внутри другого. Может ли сумма диагоналей внутреннего четырёхугольника быть больше суммы диагоналей внешнего? ⟨Может, особенно если у внешнего одна диагональ длинная, а другая — короткая.⟩

61. Утверждение задачи 52 является простым следствием задачи 54. Почему? ⟨Меньший треугольник можно получить из большего, отрезав кусок дважды.⟩

62. Может ли прямая пересекать все стороны невыпуклого 4-угольника? [Ответ: Да.]

63. Может ли прямая пересекать все стороны невыпуклого 5-угольника? ⟨Нет: мы не можем пять раз перейти прямую канаву и вернуться в исходную точку.⟩



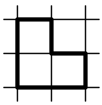
64. Две черепахи, ведущая и ведомая, ползут по плоскости из A в B. Они ползут по очереди: сначала ведущая проползает какое-то расстояние, потом ведомая проползает какое-то расстояние по прямой в сторону ведущей, потом ведущая снова ползёт куда-то, затем ведомая ползёт в сторону ведущей, и так далее. Наконец, обе они доползают до B. Покажите, что ведомая черепаха проползла не больше, чем ведущая. ⟨Величина (путь первой черепахи) − (путь второй черепахи) − (расстояние между черепахами) может только увеличиваться.⟩

Утверждение этой задачи сформулировал (без доказательства) Толстой («Война и мир», том 4): «…ещё другая причина представлялась Кутузову для замедления движения войск и для выжидания. Цель русских войск была — следование за французами. Путь французов был неизвестен, и потому, чем ближе следовали наши войска по пятам французов, тем больше они проходили расстояния. Только следуя в некотором расстоянии, можно было по кратчайшему пути перерезывать зигзаги, которые делали французы.»

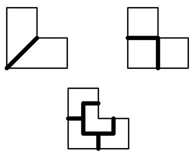
65. По одну сторону от прямой расположены две точки A и B на разных расстояниях от неё. Как найти на прямой точку X, для которой разность между расстояниями до этих двух точек максимальна?

4. Равные фигуры

Две геометрические фигуры (треугольники, четырёхугольники и др.) считаются *равными*, если они имеют одинаковую форму и размер, то есть если они могут быть совмещены друг с другом наложением. При этом фигуру разрешается переворачивать, так что, например, буквы R и Я считаются равными.



66. Уголок, составленный из 3 квадратов, можно разрезать на 2, 3 и на 4 равные части. Как это сделать?



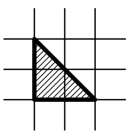
▷ На две равные части разрезать легко: достаточно соединить углы (см. рисунок). Ещё проще разрезать на три равные части — на три квадратика.

Сложнее разрезать уголок на 4 равные части, но и это возможно: получится четыре уголка поменьше (см. рисунок). ◁

Две фигуры, равные третьей, равны между собой.

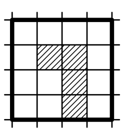
67. Как с помощью этого свойства проверить равенство фигур на двух рисунках в книжке (не вырезая фигур из книжки)?

▷ Срисовать один рисунок на прозрачную плёнку (кальку) и сравнить с другим. ◁



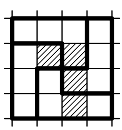
68. Разрежьте треугольник на рисунке на 4 равных треугольника.

▷ Достаточно соединить между собой середины его сторон. ◁



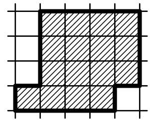
69. Разрежьте квадрат на рисунке на четыре равные части так, чтобы каждая из них содержала по одному заштрихованному квадратику.

▷ См. рисунок. ◁

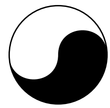


Ещё несколько задач

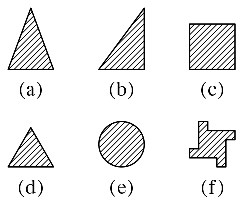
70. Разрежьте фигуру на рисунке на две равные части. А как разрезать её на три равные части? (Линии разреза не обязаны проходить по сторонам клеток.)



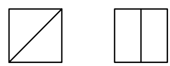
71. Символ инь-ян состоит из двух равных фигур — белой и чёрной. Вместе они образуют круг. Как разрезать одну из этих фигур на 7 равных частей? (Если вы догадались, как это сделать, то легко разрежете её на любое число равных частей.)



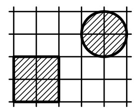
72. Некоторые фигуры можно положить на своё место несколькими способами (например, треугольник на рис. (a) можно оставить как есть, а можно повернуть вокруг вертикальной оси — всего два способа), некоторые — только одним (b). Сколькими способами можно положить на место фигуры рисунков (c), (d), (e), (f)?



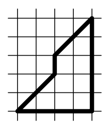
73. Квадрат можно разрезать на две равные части разными способами. Два способа показаны на рисунке (по диагонали и по линии, соединяющей середины противоположных сторон). А можно ли разрезать квадрат на две равные части прямой, не проходящей ни через вершины, ни через середины сторон?



74. Проведите на рисунке прямую, которая разделит на две равные части и квадрат, и круг.



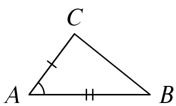
75. Разрежьте фигуру на рисунке на две равные части.



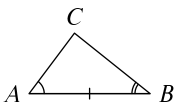
5. Признаки равенства треугольников

В равных треугольниках равны (соответственные) стороны и углы.

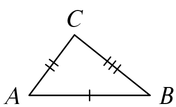
Чтобы убедиться в равенстве двух треугольников, не надо сверять *все* стороны и углы — можно воспользоваться одним из *признаков равенства треугольников.*



Первый признак: по двум сторонам и углу между ними. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.



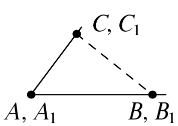
Второй признак: по стороне и примыкающим к ней двум углам. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.



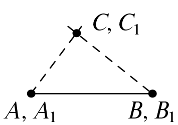
Третий признак: по трём сторонам. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

На рисунках показаны те элементы треугольника (стороны и углы), которые нужно сверять, чтобы воспользоваться этими признаками равенства треугольников.

Наглядное объяснение, почему эти признаки верны, совсем просто для первого и второго признаков и немного сложнее для третьего.

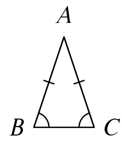


Первый признак. По предположению углы A и A_1 равны. Совместим их друг с другом так, чтобы отрезок AB пошёл вдоль A_1B_1, а AC — вдоль A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, то точки B и B_1 при таком наложении совпадут. Аналогично точки C и C_1 тоже совпадут. Значит, все три вершины треугольников совместятся.

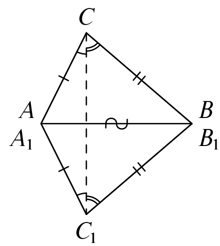


Второй признак. Наложим сторону AB на равную ей сторону A_1B_1, причём так, чтобы точка A наложилась на A_1, точка B наложилась на B_1, а точки C и C_1 оказались по одну сторону от AB. Тогда в силу равенства углов A и A_1 прямая AC наложится на A_1C_1 (хотя мы пока не знаем, совместятся ли точки C и C_1). По аналогичным причинам прямая BC наложится на B_1C_1. Значит, точка C, в которой пересекаются прямые AC и BC, наложится на точку C_1, и треугольники совместятся.

Для *третьего признака* нам понадобится вспомогательное замечание: если в треугольнике две стороны равны, то и противолежащие им углы равны. (Такой треугольник называют *равнобедренным.*) В самом деле, пусть в треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Перевернём его так, чтобы точка A наложилась на себя, но сторона AB пошла по AC и наоборот. Поскольку $AB = AC$, то точка B наложится на точку C и наоборот. Значит, угол B совместится с углом C, то есть они равны.



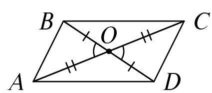
Теперь уже можно перейти к третьему признаку равенства треугольников. Приложим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ друг к другу сторонами AB и A_1B_1 так, чтобы C и C_1 оказались по разные стороны. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные, поэтому одинаково обозначенные на рисунке углы равны. Сложив их, получим, что углы C и C_1 равны, остаётся воспользоваться первым признаком.



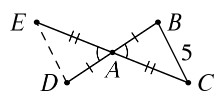
Эти объяснения не являются «строгим доказательством», как говорят математики, но тем не менее довольно убедительны.

76. В четырёхугольнике точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Докажите, что противоположные стороны этого четырехугольника равны.

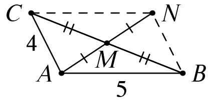
▷ Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, а O — точка пересечения его диагоналей. Отметим на рисунке пары равных по условию отрезков — одну пару одинарной чёрточкой, другую — двойной. Кроме того, отметим вертикальные (и, следовательно, равные) углы AOB и COD. Теперь есть все условия для применения первого признака равенства к треугольникам AOB и COD (две стороны и угол между ними). Из равенства этих треугольников заключаем, что $AB = CD$. Рассмотрев два других треугольника (каких?), аналогичным образом убеждаемся, что $BC = AD$. ◁



77. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A взята точка D, причём $AD = AB$. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A взята точка E, причём $AE = AC$. Найдите расстояние между точками D и E, если $BC = 5$.



▷ Эта задача решается почти так же, как предыдущая. По условию в треугольниках ABC и ADE (в котором надо провести ещё сторону ED) равны по две стороны: $AB = AD$, $AC = AE$. Углы BAC и DAE являются вертикальными, и потому тоже равны. По первому признаку равны и треугольники, так что $ED = BC = 5$. ◁

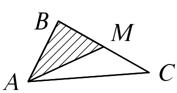


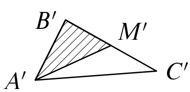
78. В треугольнике ABC медиана AM (отрезок, соединяющий вершину A с серединой M стороны BC), продолжена за точку M на расстояние, равное AM. Найдите расстояние от полученной точки до точек B и C, если стороны AB и AC равны соответственно 5 и 4.

▷ Пусть N — конец продолженной медианы, так что N лежит на продолжении AM за точку M и $AM = MN$. Тогда в четырёхугольнике $ABNC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, так что можно сослаться на уже решённую задачу и увидеть, что противоположные стороны четырёхугольника равны, то есть $NB = AC = 4$, $NC = AB = 5$. ◁

79. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC медиана AM не превосходит полусуммы сторон AB и AC.

▷ Нам надо доказать, что удвоенная медиана не превосходит суммы $AB + AC$. В предыдущей задаче как раз была построена удвоенная медиана AN, которая была стороной треугольника ABN, две другие стороны которого AB и $BN = AC$. Остаётся сослаться на неравенство треугольника. ◁





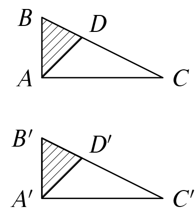
80. Пользуясь первым признаком равенства треугольников, докажите, что в двух равных треугольниках медианы, проведенные к соответственным сторонам, равны.

▷ Пусть ABC и $A'B'C'$ — эти треугольники (равные стороны и углы обозначены одинаковыми буквами), AM и $A'M'$ — проведённые в них медианы (так что M — середина BC, а M' — середина $B'C'$). Посмотрим на треугольники ABM и $A'B'M'$.

В них равны углы B и B', стороны AB и $A'B'$, а также стороны BM и $B'M'$ (как половины равных сторон BC и $B'C'$). Поэтому эти треугольники равны по первому признаку, и соответственные стороны (в том числе те, которые являются медианами) равны.

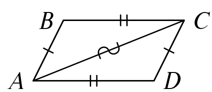
Заметим, что мы с тем же успехом могли бы использовать треугольники AMC и $A'M'C'$. $\triangleleft$

81. Пользуясь вторым признаком равенства треугольников, докажите, что в двух равных треугольниках биссектрисы, делящие соответственные углы пополам, равны.



$\triangleright$ (В задаче идёт речь, конечно, об отрезках биссектрис до противоположной стороны.) Пусть AD и $A'D'$ — такие отрезки. Следуя решению предыдущей задачи, рассмотрим треугольники ABD и $A'B'D'$ — в них равны стороны AB и $A'B'$, а также углы B и B'. Кроме того, угол DAB равен углу $D'A'B'$, так как они составляют половины равных углов CAB и $C'A'B'$. Остаётся воспользоваться вторым признаком равенства треугольников. $\triangleleft$

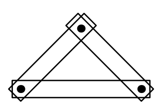
82. В четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны. Докажите, что противоположные углы в нём равны. (Такие четырёхугольники называются *параллелограммами* и мы к ним ещё вернёмся).



$\triangleright$ Пусть $ABCD$ — такой четырёугольник. Проведём в нём диагональ, например, AC. Она разобьёт его на два треугольника ABC и ADC, к которым можно применить третий признак равенства треугольников — сторона AC у них общая, а две другие пары сторон равны по условию. Значит, равны и все углы, в частности, и углы B и D.

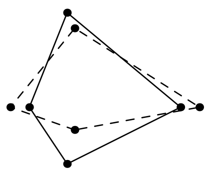
Аналогичное рассуждение (с какими треугольниками?) показывает, что углы A и C равны. $\triangleleft$

83. Три балки соединены болтами по концам (см. рисунок). Полученная конструкция будет жёсткой, хотя вокруг болтов балки могут проворачиваться. Какой признак равенства треугольников является тому причиной?



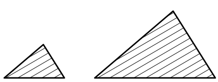
▷ Балки являются сторонами треугольниками, а болты — его углами. Возможность вращения в точках крепления означает, что углы треугольника не фиксированы. Зато длины сторон — расстояния между отверстиями в балках — меняться не могут, и третий признак равенства треугольников гарантирует, что углы тоже меняться не могут. ◁

84. Верно ли такое утверждение: если в двух четырёхугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие стороны равны ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и т.д.), то четырёхугольники равны?



▷ Вспоминая предыдущую задачу, можно сформулировать вопрос так: будет ли жёстким шарнирный четырёхугольник? Сразу ясно, что нет — взявшись руками за противоположные вершины, можно сдвигать их и раздвигать. На рисунке показаны два положения шарниров — два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. ◁

Все три признака равенства треугольников имеют один и тот же общий вид: треугольник определяется некоторыми тремя элементами однозначно. (В первом признаке это две стороны и угол между ними, во втором — сторона и два прилегающих угла, в третьем — три стороны.) Не следует думать, однако, что эти три элемента могут быть любыми. Например, мы увидим дальше, что три угла не определяют треугольник однозначно — бывают треугольники одинаковой формы, но разного размера (см. рисунок). Такие треугольники называют *подобными*, и мы к ним ещё вернёмся.

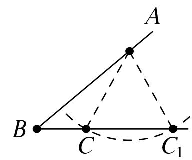


Более хитрый пример, когда треугольник не определяется тремя элементами, даёт следующая задача:

85. Приведите пример треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, но которые тем не менее не равны.

Эта задача показывает, что в признаке равенства треугольников «по двум сторонам и углу между ними» нельзя пропустить слова *между ними*: если равны углы, противолежащие двум равным сторонам, это не гарантирует равенства треугольников.

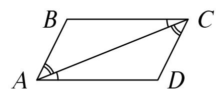
$\triangleright$ Нарисуем острый угол с вершиной B. На одной стороне возьмём какую-нибудь точку A. На другой стороне с помощью циркуля найдём две точки C и C_1 на равном расстоянии от A. Тогда треугольники ABC и ABC_1 будут искомыми. $\triangleleft$



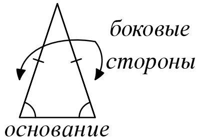
Ещё несколько задач

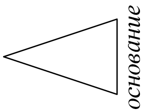
86. Диагональ делит выпуклый четырёхугольник на два равных треугольника. Докажите, что другая диагональ делит четырёхугольник либо на два равных треугольника, либо на два равнобедренных треугольника.

87. В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Оказалось, что «накрест лежащие» углы при этой диагонали равны: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle ACB$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника равны.



6. Равнобедренные треугольники





Треугольник называют *равнобедренным*, если две его стороны равны. Эти равные стороны называют *боковыми сторонами* треугольника, а третью сторону — его *основанием*.

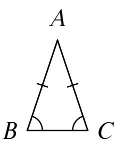
Слова «основание» и «боковые стороны» создают впечатление, что основание должно быть обязательно нижней (на рисунке) стороной треугольника, а боковые стороны должны быть слева и справа. Но математические термины, взятые из обычного языка, часто меняют смысл, и означают только то, что написано в определении (а совсем не то, что понимает под этим нормальный человек в обычной жизни). В данном случае требуется лишь равенство боковых сторон, так что основание вполне может быть, скажем, вертикальным.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный.

Эти два утверждения можно сформулировать так: углы, противолежащие равным сторонам треугольника, равны; стороны, противолежащие равным углам треугольника, равны.

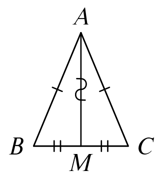
Их можно рассматривать как частные случаи двух первых признаков равенства треугольников и объяснить тем же способом.



Первое: если треугольник ABC равнобедренный и (скажем) $AB = AC$, то перевернём его и наложим на себя так, чтобы точка A осталась на месте, а сторона AB пошла по AC — тогда AC пойдёт по AB. Поскольку $AB = AC$, то точки B и C наложатся друг на друга. (Это рассуждение мы уже приводили, говоря о третьем признаке равенства треугольников.)

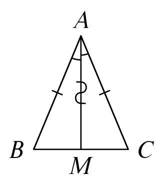
Второе: перевернём треугольник и наложим BC на себя так, чтобы B наложилось на C и наоборот. Мы предполагаем, что углы при основании равны, поэтому боковые стороны наложатся на себя, и точка их пересечения — вершина A — останется на месте.

88. В равнобедренном треугольнике проведена медиана, соединяющая середину основания с противоположной вершиной. Докажите, что эта медиана является *высотой* (перпендикулярна основанию) и *биссектрисой* (делит угол пополам).



$\triangleright$ Обозначим наш треугольник через ABC (основание BC, боковые стороны AB и AC). Медиана AM соединяет вершину A с серединой основания BC. Она делит треугольник на две половины ABM и ACM. Легко видеть, что эти половины равны по третьему признаку (одна сторона общая, две другие равны, потому что треугольник равнобедренный, оставшаяся пара — потому что медиана делит основание пополам). Значит, углы при вершине A равны (медиана является биссектрисой). Углы при вершине M тоже равны и вместо составляют $180°$, значит, каждый из них равен $90°$. Следовательно, медиана является высотой. $\triangleleft$

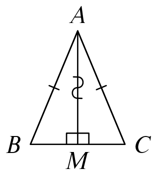
89. Докажите, что в равнобедренном треугольнике ABC (где $AB = AC$) биссектриса угла при вершине (A) является высотой, т.е. перпендикулярна стороне BC, и медианой, т.е. делит сторону BC пополам.



$\triangleright$ Обозначим эту биссектрису через AM. Треугольники AMB и AMC имеют равные углы при вершине A (определение биссектрисы) и две пары равных сторон около этих углов (одна сторона общая, две другие равны, так как треугольник равнобедренный). Значит, по второму признаку они равны. В частности, равны стороны MB и MC, то есть биссектриса является медианой. Кроме того, равны углы при вершине M, которые в сумме равны $180°$, значит, каждый из них равен $90°$, так что биссектриса является высотой. $\triangleleft$

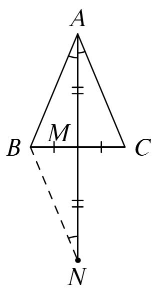
Впрочем, если приглядеться, то эта задача в точности совпадает с предыдущей. Там мы должны были доказать, что в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой, а сейчас — что биссектриса является медианой. То есть в обоих случаях надо было доказать, что биссектриса и медиана совпадают, только сформулировано это было по-разному. (И ещё надо было доказать, что эти совпадающие биссектриса и медиана перпендикулярны основанию.)

90. В треугольнике ABC медиана AM, соединяющая точку A с серединой M стороны BC, является высотой, то есть перпендикулярна стороне BC. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный: стороны AB и AC равны.



$\triangleright$ Посмотрим на треугольники ABM и ACM. В них углы при вершине M прямые по условию, $BM = CM$, а сторона AM — общая. Значит, по второму признаку равенства треугольников они равны. В частности, равны стороны, противолежащие прямому углу: $AB = AC$. $\triangleleft$

91. В треугольнике ABC медиана AM, соединяющая точку B с серединой M стороны BC, является биссектрисой угла A. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный: стороны AB и AC равны.



$\triangleright$ Если пытаться рассуждать как в предыдущей задаче, то можно заметить, что в треугольниках BMA и CMA равны по две стороны и по одному углу. Но угол этот не лежит между сторонами, так что признаки равенства треугольника тут не помогают (см. задачу 85).

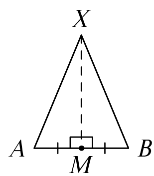
Так что эта задача сложнее предыдущей и для её решения понадобится, как говорят, *дополнительное построение*. Это построение часто применяется, когда в задаче идёт речь о медиане (мы уже встречались с ним в задаче 78).

Продолжим медиану AM за точку M на расстояние, равное её длине, и получим точку N, которую соединим с точкой B. Мы уже видели, что треугольник BMN равен треугольнику CMA по двум сторонам и углу между ними (углы при вершине M являются вертикальными, $BM = MC$ по условию, $AM = MN$ по построению). В частности, угол BNM равен углу CAM, и тем самым углу BAM.

Значит, в треугольнике ABN углы при стороне AN равны, и потому он равнобедренный: $AB = BN$. Но $BN = AC$ (из равенства треугольников BNM и CMA), так что $AB = AC$, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

> *Серединным перпендикуляром* к отрезку называется прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину.

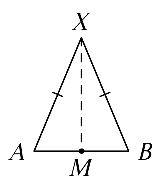
92. Докажите, что любая точка серединного перпендикуляра к отрезку AB равноудалена (находится на одинаковом расстоянии) от точек A и B.



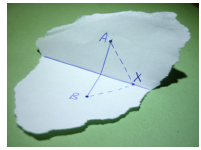
$\triangleright$ Пусть M — середина отрезка AB, и X находится на серединном перпендикуляре. Соединим X с точками A и B. В треугольниках AMX и BMX два угла прямые, одна сторона (MX) общая. а $AM{=}MB$. Поэтому эти треугольники равны по второму признаку, в частности, $AX = XB$. $\triangleleft$

В сущности, мы повторили рассуждение о том, что если медиана является высотой, то треугольник равнобедренный.

93. Докажите, что любая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.



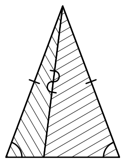
$\triangleright$ Пусть точка X равноудалена от точек A и B. Соединим её с этими точками, получится равнобедренный треугольник AXB. Соединим точку X с серединой стороны AB, которую мы обозначим M. Получится медиана XM этого равнобедренного треугольника, которая, как мы знаем, является высотой. Значит, XM есть серединный перпендикуляр к AB (и точка X на нём лежит). $\triangleleft$



С помощью этой задачи можно объяснить такое наблюдение: если бумажку сложить вдвое, а потом развернуть, то линия сгиба будет прямой. Проколем сложенную бумажку иголкой и отметим точки прокола на развёрнутой бумажке (A и B). Покажем, что все точки линии сгиба лежат на прямой — серединном перпендикуляре к отрезку AB. В самом деле, для любой точки X на сгибе отрезки XA и

XB равны: ведь при сгибе они совмещаются. Остаётся воспользоваться только что решённой задачей.

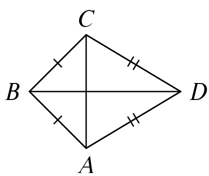
94. Равнобедренный треугольник разделён на два отрезком, соединяющим вершину с некоторой точкой основания. Докажите, что в этих треугольниках можно найти две равные пары сторон и равную пару углов.



▷ Равные пары сторон — это две боковые стороны равнобедренного треугольника, а также две стороны, примыкающие друг к другу по линии разреза. Равные углы — углы при основании равнобедренного треугольника. ◁

Эта задача напоминает, что в первом признаке равенства треугольников важно, чтобы равные углы находились между соответственно равными сторонами. (Ср. задачу 85 в предыдущем разделе.)

Ещё несколько задач



95. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ две пары сторон равны: $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что его диагонали перпендикулярны. ⟨Соедините вершины B и D с серединой диагонали AC.⟩

96. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к его боковым сторонам, равны.

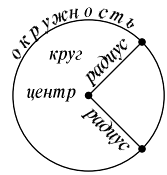
97. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведённые к его боковым сторонам, равны.

98. Все четыре стороны четырёхугольника равны. Докажите, что его диагонали делят его на четыре равных треугольника и пересекаются под прямым углом.

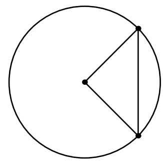
99. В треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что в этом треугольнике один из углов равен сумме двух других. (Впоследствии мы узнаем, что сумма углов треугольника равна 180°, поэтому такой треугольник будет прямоугольным.)

7. Окружность

Точки, лежащие на заданном расстоянии от заданной точки (*центра*) образуют *окружность*. Расстояние это называют *радиусом* окружности. Отрезок, соединяющий центр окружности с любой из её точек, также называют радиусом. *Круг* — это окружность вместе со всеми точками внутри неё.

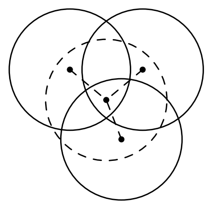


100. Центр окружности и любые две точки на ней являются вершинами равнобедренного треугольника.



▷ Это — совсем простая задача: две стороны получающегося треугольника являются радиусами и потому равны. ◁

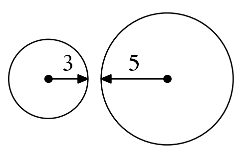
101. Точка X лежит внутри трёх окружностей радиуса 1. Докажите, что их центры можно накрыть кругом радиуса 1.



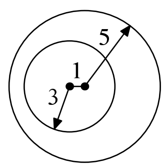
▷ Нарисуем круг радиуса 1 с центром в точке X (на рисунке изображён пунктиром). По условию точка X лежит внутри окружностей. Значит, расстояние от X до центров окружностей меньше 1. Поэтому эти центры попадут внутрь нарисованного круга. ◁

102. Две окружности имеют радиусы 3 и 5, расстояние между их центрами равно 9. Будут ли они пересекаться? Тот же вопрос, если расстояние между их центрами равно 1.

▷ Пересечения не будет. В первом случае: если бы X была общей точкой двух окружностей, то расстояния до центров от X были бы 3 и 5, и по неравенству треугольника расстояние между центрами было бы не больше 8.

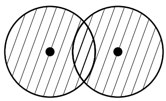


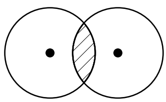
Во втором случае меньшая окружность лежит целиком внутри большей. Убедиться в отсутствии точек пересечения снова можно с помощью неравенства треугольника: если бы X была точкой пересечения, то расстояние до центра меньшей окружности было бы 3, расстояние между центрами 1,



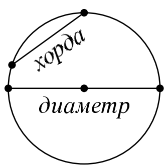
значит, расстояние до центра большей окружности было бы не больше 4 (а оно равно 5). ◁

103. Две деревни находятся на расстоянии 3 километра. Нарисуйте, где можно устроить пикник, если требуется, чтобы (а) расстояние до *ближайшей* деревни было не более 2 километров; (б) расстояние до *любой* деревни было не более 2 километров.



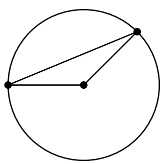


▷ Для каждой деревни есть свой круг — в нём находятся точки, до которых от неё не более 2 километров. В пункте (а) нам годятся точки любого круга, и ответом является (как говорят математики) *объединение* кругов. В задаче (б) нам годятся лишь точки, попадающие в оба круга, и ответом будет *пересечение* кругов. ◁



> *Хордой* называется отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.*

104. Длина хорды не превышает удвоенного радиуса окружности (и равна ему, только если хорда является диаметром).

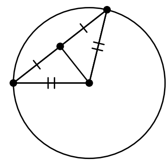


▷ Соединим концы хорды с центром окружности. Получится треугольник, образованный двумя радиусами и хордой. По неравенству треугольника хорда не превосходит суммы двух других сторон, то есть удвоенного радиуса. Равенство возможно, если треугольник превращается в отрезок, то есть если центр окружности лежит на хорде. (А такая хорда называется диаметром.) ◁

Диаметром окружности называют не только проходящую через центр хорду, но и её длину. Диаметр (как хорда) состоит из двух радиусов (отрезков), поэтому диаметр окружности (как число) равен удвоенному радиусу (как числу).

Теперь утверждение задачи 104 можно прочесть так: длина любой хорды окружности не превосходит диаметра окружности.

105. Докажите, что отрезок, соединяющий середину хорды с центром окружности, перпендикулярен хорде.



▷ Этот отрезок является медианой равнобедренного треугольника, образованного двумя радиусами и хордой, и потому является его высотой. ◁

Ещё несколько задач

106. На большом поле есть узкая прямая канава длиной 500 метров. Турист стоит на берегу канавы на расстоянии 200 метров от её конца (и 300 метров от другого конца). Нарисуйте часть поля, в которую он может попасть, пройдя не более 400 метров (и не переходя канавы). ⟨Эта область ограничена *дугами* (частями) окружностей.⟩

107. Кольцевое шоссе имеет форму прямоугольника со сторонами 5 и 7 км. Турист хочет поставить палатку так, чтобы расстояние от стоянки до ближайшей точки шоссе было не меньше километра. Нарисуйте область возможных положений палатки.

108. Две окружности разных радиусов с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках C и D. Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна отрезку CD и делит его пополам. ⟨Обе точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к CD.⟩

109. Докажите, что расстояние между двумя точками внутри круга не больше диаметра круга. ⟨Отрезок, соединяющий эти точки, является частью хорды.⟩

110. Докажите, что хорда окружности образует равные углы с радиусами, проведёнными к её концам.

111. Посмотрев вокруг себя, мы увидим довольно много окружностей. Можете ли вы придумать правдоподобное объяснение, почему (или зачем) круглы (а) колёса у велосипеда; (б) круги на воде; (в) луна на небе; (г) капля в воздухе; (д) крышки канализационных люков; (е) стволы деревьев; (ё) монеты; (ж) грампластинки и компакт-диски; (з) рулоны туалетной бумаги; (и) завинчивающиеся крышки от банок; (й) радуга на небе?

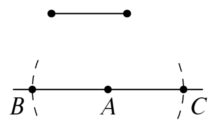
Не огорчайтесь, если не можете — иногда объяснение требует хорошего знания физики, а иногда есть несколько правдоподобных вариантов, и трудно выбрать один из них.

112. Даны две (различные) точки A и B. Где может находиться точка C, если известно, что треугольник ABC равнобедренный (имеет две равные стороны)?

8. Построения циркулем и линейкой

С помощью линейки можно проводить прямую через две данные точки. С помощью циркуля можно строить окружность с данным центром и данным радиусом. После этого можно отмечать точки пересечения построенных прямых и окружностей и использовать их в дальнейших построениях.

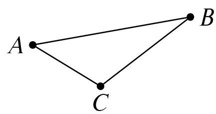
113. Отложите от заданной точки A на заданной прямой l отрезок, равный данному.

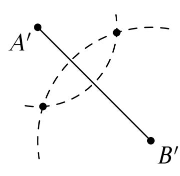


▷ Для этого достаточно циркуля: установим раствор циркуля равным длине данного отрезка и построим окружность такого радиуса с центром в A. Она пересечёт прямую l в двух точках, назовём их B и C. Отрезки AB и AC и будут искомыми. ◁

Если бы на линейке были деления (или хотя бы можно было делать карандашные пометки), то циркуль бы не понадобился. Но для нас линейка — это возможность проводить прямую через две данные точки, и не более того.

114. Дан треугольник ABC и отрезок $A'B'$, равный отрезку AB. Постройте треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC.



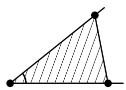


▷ Положения точек A' и B' нам даны. Надо найти точку C'. Расстояния от неё до точки A' известно: оно равно AC. Значит, точка C' лежит на окружности с центром в A' и радиусом AC. Построим эту окружность. Аналогичным образом точка C' лежит на окружности с центром в B' радиуса BC. Чтобы решить задачу, осталось найти точки пересечения этих окружностей. (Их две, поскольку треугольник можно отложить по обе стороны отрезка $A'B'$.) ◁

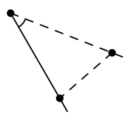
115. Постройте треугольник по трём сторонам.

▷ Эта задача отличается от предыдущей тем, что стороны треугольника заданы сами по себе, а не в составе треугольника. Но решение остаётся прежним: мы берем одну из заданных сторон, и вокруг её концов строим окружности, радиусы которых равны двум другим сторонам.

Заметим, что эти окружности могут и не пересечься: если заданные три отрезка не удовлетворяют неравенству треугольника (один больше суммы двух других), то искомого треугольника не существует. ◁



116. Отложите от заданного луча угол, равный данному.



▷ Эту задачу можно свести к предыдущим. Возьмём какие-нибудь две точки на сторонах угла, получится треугольник. Построим равный ему треугольник (проведя две окружности и найдя их пересечение). Один из углов этого треугольника будет искомым. ◁

Чтобы задача имела единственное решение, надо ещё указать, в какую сторону от заданного луча надо откладывать угол (и тем самым какую из двух точек пересечения окружностей надо брать).

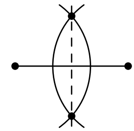
Эта задача легко позволяет построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам: надо отложить на какой-нибудь прямой заданный отрезок, а потом провести два луча под заданными углами.

Вспоминая признаки равенства треугольников, можно ещё заметить, что построить треугольник по двум сторонам и углу между ними совсем просто: достаточно отложить два данных отрезках на сторонах угла.

117. Найдите середину данного отрезка.

▷ Мы построим серединный перпендикуляр к отрезку, тем самым будет найдена его середина. Мы знаем, что на серединном перпендикуляре лежат точки, одинаково удалённые от концов отрезка. Поэтому достаточно найти две такие точки и провести через них прямую. Чтобы найти их, построим две окружности равного радиуса с центрами в концах отрезка. Точки их пересечения и будут искомыми.

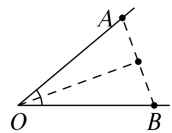
Итак, построение: построим две окружности равного радиуса с центрами в концах отрезка и соединим точки их пересечения прямой. Эта прямая и разделит отрезок пополам. ◁



Радиус окружностей можно выбирать разным, но важно, чтобы он не был слишком маленьким, иначе окружности не пересекутся. Можно, например, взять в качестве радиуса длину исходного отрезка.

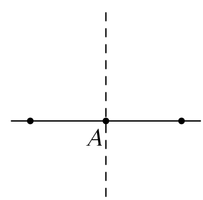
118. Разделите данный угол пополам.

▷ Пусть O — вершина угла. Отложим с помощью циркуля на его сторонах равные отрезки OA и OB (их длина, то есть раствор циркуля, может быть любым). Мы уже знаем из решения предыдущей задачи, как строить серединный перпендикуляр к отрезку AB. Точка O равноудалена от A и B по построению и потому лежит на этом серединном перпендикуляре. Мы построили высоту равнобедренного треугольника OAB, которая одновременно будет и биссектрисой угла AOB. ◁



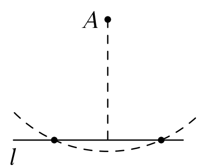
119. Дана точка A на прямой l. Проведите через A прямую, перпендикулярную l.

▷ Эту задачу легко свести к уже решённым: мы умеем строить серединный перпендикуляр к отрезку (решение задачи 117), так что достаточно найти на прямой l отрезок, серединой которого была бы точка A. А это легко сделать, отложив от A равные отрезки в разные стороны. ◁

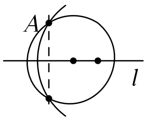


120. Дана точка A, не лежащая на прямой l. Проведите через A прямую, перпендикулярную l.

▷ Эту задачу также можно свести к предыдущим: если провести окружность с центром в A, пересекающую прямую в двух точках, то эти точки пересечения равноудалены от A, и потому A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в этих точках. А таковой мы строить умеем. ◁



Ещё несколько задач



Более экономное построение перпендикуляра из заданной точки A к заданной прямой l (не проходящей через эту точку) приведено в учебнике И. Ф. Шарыгина: построим две окружности с центрами на прямой l, проходящие через точку A. Они пересекутся в точке A и ещё в одной точке; соединив эти точки прямой, получим искомый перпендикуляр.

121. Покажите, что это построение действительно даёт требуемое.

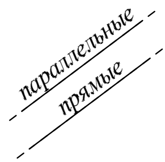
122. Как разделить отрезок на четыре равные части циркулем и линейкой?

123. Как разделить угол на четыре равные части циркулем и линейкой?

Впоследствии мы научимся делить отрезок на любое число равных частей, см. задачу 305. А вот с делением угла на равные части ситуация совсем другая: французский математик Ванцель в статье 1837 года доказал, что для некоторых углов задача о *трисекции угла* (делении его на три равные части) не может быть решена с помощью циркуля и линейки. Например, с их помощью нельзя разделить угол в 60° на три равные части, то есть нельзя построить угол в 20°; сам угол в 60°, как мы вскоре увидим, построить легко. В той же статье доказывается неразрешимость другой знаменитой задачи: удвоения куба (построение ребра куба вдвое большего объёма, чем данный), а также выясняется, какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой. Оказывается, что для этого число сторон должно быть произведением степени двойки и различных простых чисел вида $2^{2^k}+1$ (таковы $3 = 2^1+1$, $5 = 2^2+1$, $17 = 2^4+1$, $257 = 2^8+1$, $65537 = 2^{16}+1$; других простых чисел такого вида пока не известно).

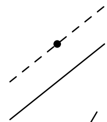
9. Параллельность

Две различные прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются. Прямую считают также параллельной самой себе.

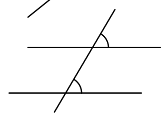


Два основных факта о параллельных прямых:

(1) через точку, не лежащую на прямой, можно провести прямую, паралелльную заданной, причём только одну;



(2) две прямые параллельны в том и только в том случае, если третья прямая пересекает их под равными углами.



Утверждение (1) можно пояснить так. На рисунке через точку проходит пунктирная прямая, параллельная сплошной. Если сплошная прямая неподвижна, а пунктирную поворачивают вокруг отмеченной точки, то имеется ровно одно положение, в котором прямые не пересекаются. Если хоть чуть-чуть повернуть прямую влево или вправо, то появится точка пересечения (которая будет тем дальше, чем меньше мы повернём прямую).

В «неевклидовой» геометрии (геометрии Лобачевского) это неверно (и отличает неевклидову геометрию от евклидовой): есть целый диапазон углов, в котором прямые не пересекаются.

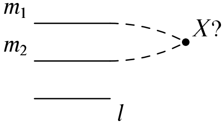
Утверждение (2) использует не очень привычный оборот «в том и только в том случае». Смысл его такой: во-первых, если третья прямая пересекает две прямые под равным углом, то эти прямые параллельны (не пересекаются); во-вторых, если две прямые параллельны, то любая третья прямая пересекает их под равными углами. (Первая часть соответствует словам «в том», а вторая — «только в том».)

Традиционно в учебниках геометрии утверждение (1) считают аксиомой, а утверждение (2) — её следствием.

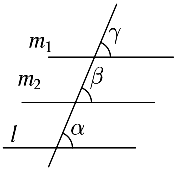
Иногда прямую не считают параллельной самой себе (совпадающие прямые не считаются параллельными); тогда в утверждении (2) нужна соответствующая оговорка.

124. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

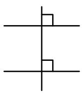
▷ Эту задачу можно решить двумя способами — либо с помощью утверждения (1), либо с помощью утверждения (2). Приведём оба варианта.



(Первый вариант) Пусть две прямые m_1 и m_2 параллельны третьей прямой l. Могут ли они пересечься в какой-то точке X? Нет, потому что в этом случае через X проходило бы две прямые, параллельные данной. Значит, если у них есть общая точка, то они совпадают (а совпадающие прямые также считаются параллельными).

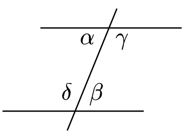


(Второй вариант) Пересечём все три прямые какой-то прямой n и отметим образующиеся углы как на рисунке. Поскольку прямые l и m_1 параллельны, то углы α и γ равны. Поскольку прямые l и m_2 параллельны, то углы α и β равны. Значит, все три отмеченных угла равны. А из равенства углов β и γ следует параллельность прямых m_1 и m_2. ◁

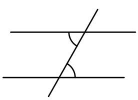


125. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

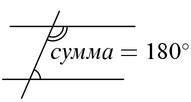
▷ Это — прямое следствие свойства (2), так как углы, образуемые при пересечении двух прямых их общим перпендикуляром, прямые и потому равны. ◁



Пары углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей (которую традиционно называют *секущей*) имеют традиционные названия, которые мы поясним рисунком. Углы α и β называют *внутренними накрест лежащими*; то же название относится к паре углов γ и δ. Углы α и δ называют *внутренними односторонними*; то же название относится к паре β и γ.



Вспоминая, что вертикальные углы равны, а смежные углы составляют в сумме 180°, можно сформулировать свойство (2) так: *прямые параллельны в том и только том случае, когда внутренние накрест лежащие углы при секущей равны.*



Или так: *прямые параллельны в том и в только том случае, когда внутренние односторонние углы составляют в сумме* 180°.

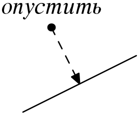
Иногда говорят даже о «внешних накрест лежащих» и «внешних односторонних» углах.

126. Докажите, что через данную точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную заданной.

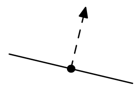
▷ Это — в точности повторение предыдущей задачи: если провести две такие прямые, то они будут двумя перпендикулярами к заданной прямой. По предыдущей задаче они параллельны — и не могут проходить через одну точку (не совпадая)! ◁

Есть два выражения, относящихся в построению перпендикуляров.

Если точка A не лежит на прямой l и мы проводим через A прямую, перпендикулярную l, это называется «опустить из A перпендикуляр на l». (Даже если на рисунке точка A ниже прямой l, всё равно говорят «опустить».)

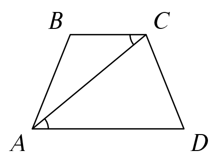


Если точка A лежит на прямой l и мы проводим через A прямую перпендикулярно l, это называется «восставить перпендикуляр к l в точке A».



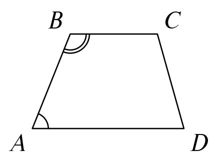
Задача 126, таким образом, говорит, что из данной точки можно опустить только один перпендикуляр к данной прямой. (Как это сделать циркулем и линейкой, мы уже видели в задаче 120.)

127. В четырёхугольнике $ABCD$ угол ACB равен углу CAD. Докажите, что у него есть две параллельные стороны.



▷ Эта задача — прямое следствие свойства (2): по условию накрест лежащие углы ACB и CAD при секущей AC равны, и потому прямые AD и BC параллельны. ◁

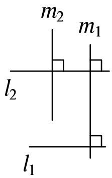
128. Два соседних угла четырёхугольника составляют в сумме 180°. Докажите, что две его стороны параллельны. Докажите, что два других угла также составляют в сумме 180°.



▷ Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ углы A и B составляют в сумме 180°. Они являются внутренними односторонними углами при секущей AB, и потому прямые AD и BC параллельны.

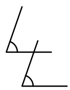
Теперь рассмотрим сторону CD как секущую, при которой лежат два внутренних односторонних угла C и D. Раз прямые параллельны, по свойству (2) сумма этих углов равна 180°. ◁

129. Докажите, что перпендикуляры к параллельным прямым параллельны.

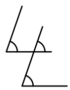


$\triangleright$ Пусть l_1 и l_2 — параллельные прямые, m_1 — перпендикуляр к l_1, а m_2 — к l_2. Убедимся, что прямые m_1 и l_2 пересекаются под прямым углом: прямая m_1 пересекает две параллельные прямые l_1 и l_2 под равными углами (по свойству (2)).

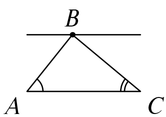
Теперь видно, что m_1 и m_2 — два перпендикуляра к l_2 и потому параллельны (задача 125) $\triangleleft$



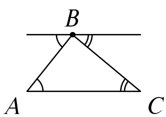
130. Стороны одного угла параллельны сторонам другого (и идут в тех же направлениях, см. рисунок). Докажите, что углы равны.



$\triangleright$ Оба эти угла равны третьему, который образуется при пересечении одной стороны одного угла с непараллельной ей стороной другого угла (дважды используем свойство (2)). $\triangleleft$

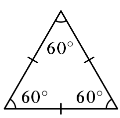


131. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AC. Отметьте на рисунке углы, равные углам A и C треугольника. Выведите отсюда, что сумма углов треугольника равна 180°.



$\triangleright$ Отмеченные на рисунке углы равны углам A и C как внутренние накрест лежащие и дополняют угол B с двух сторон до развёрнутого. $\triangleleft$

132. В треугольнике все стороны равны. Найдите его углы.



$\triangleright$ Равносторонний треугольник (в котором все стороны равны) является частным случаем равнобедренного, причём за основание можно принять любую сторону. Поэтому в нём все углы равны. Так как в сумме углы составляют 180° (предыдущая задача), то каждый из них равен 60°. $\triangleleft$

133. В равнобедренном треугольнике один из углов равен 80°. Каковы его другие углы? (Укажите все возможности.)

$\triangleright$ В равнобедренном треугольнике два угла при основании равны. Если один из них равен 80°, то в сумме они равны 160°, и на третий угол (при вершине) остаётся 20°. Если же угол при вершине равен 80°, то на два угла при основании остаётся 100°, и каждый из них равен 50°. ◁

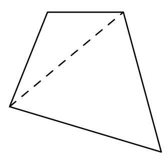
134. В равнобедренном треугольнике один из углов равен 60°. Докажите, что треугольник равносторонний.

▷ Неважно, какой именно угол равен 60° (угол при основании или у вершины), всё равно остальные углы тоже равны 60°. Но мы знаем, что если в треугольнике два угла равны, то противолежащие им стороны равны. Значит, раз все три угла равны, то и все три стороны равны. ◁

135. Какие значения может принимать наибольший угол треугольника? Какие значения может принимать наименьший угол треугольника? Какие значения может принимать третий (средний по величине) угол треугольника?

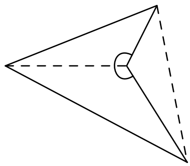
▷ Если три числа в сумме равны 180, то наибольшее из них не меньше 60 (иначе все остальные меньше 60 и сумма меньше 180). Таким образом, больший угол треугольника может быть от 60° до 180°. По аналогичным соображениям меньший угол может быть от 0° до 60°. Средний угол больше 0° и меньше 90°, так как в сумме с бóльшим углом он меньше 180°. Все эти варианты действительно возможны (что можно проверить для случая равнобедренных треугольников). ◁

136. Докажите, что сумма углов четырёхугольника равна 360°, разрезав его на два треугольника.



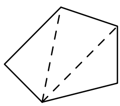
▷ Проведя диагональ, мы разрезаем четырёхугольник на два треугольника. При этом два угла четырёхугольника разбиваются на две части (каждый). Если мы сложим все шесть углов в двух треугольниках, то получим $2 \times 180° = 360°$. С другой стороны, эта сумма представляет собой сумму углов четырёхугольника (если сгруппировать пары углов с общими вершинами). ◁

Это решение, строго говоря, требует некоторых уточнений. Дело в том, что диагональ четырёх-



угольника может оказаться вне четырёхугольника. (Многоугольники, в которых такое случается, называют *невыпуклыми*.) Но всё равно сумма углов, если разрешать углы больше 180°, будет равна 360°. В самом деле, можно разрезать четырёхугольник по другой диагонали и применить то же самое рассуждение, что и раньше.

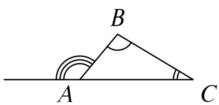
137. Чему равна сумма углов выпуклого пятиугольника?



▷ Как и в предыдущей задаче, разрежем его на треугольники, проведя две диагонали. Получится 3 треугольника. Значит, сумма углов выпуклого пятиугольника равна $3 \times 180° = 540°$. ◁

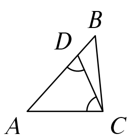
138. Найдите сумму углов выпуклого n-угольника.

▷ Возьмём одну из вершин и проведём из неё все диагонали. Их будет $n - 3$ (из n вершин выпадают три — сама вершина и две соседние). Они разрезают многоугольник на $n - 2$ треугольника (каждый разрез увеличивает число частей на 1, вначале была одна часть). В каждом треугольнике сумма углов равна 180°. Складывая все углы всех треугольников, получаем сумму всех углов многоугольника, которая тем самым равна $180(n - 2)°$. ◁



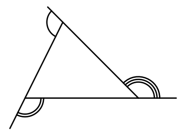
139. Докажите, что внешний угол при вершине A треугольника ABC (см. рисунок) равен сумме углов B и C.

▷ Сумма трёх углов треугольника равна 180°. Следовательно, сумма двух из них равна разности 180° и третьего угла, то есть равна углу, смежному с третьим. Что и требовалось доказать. ◁



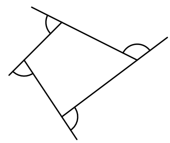
140. Сторона AB треугольника ABC длиннее стороны AC, и на ней отложен отрезок AD, равный отрезку AC. Докажите, что угол при основании равнобедренного треугольника ACD настолько же больше угла ABC , насколько меньше угла ACB.

▷ Углы при основании CD равнобедренного треугольника ACD равны. Один из них меньше угла ACB на величину угла DCB. Другой является внешним углом треугольника DCB, и потому равен сумме угла DCB и угла ABC. Следовательно, в обоих случаях разница равна величине угла DCB. $\lhd$



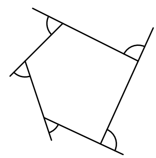
141. Чему равна сумма внешних углов при трёх вершинах треугольника?

$\rhd$ Вместе с тремя внутренними углами (которые в сумме дают 180°) получается три развёрнутых угла, то есть 540°, поэтому сумма внешних углов равна $540 - 180 = 360^\circ$. $\lhd$



142. Чему равна сумма внешних углов при четырёх вершинах выпуклого четырёхугольника?

$\rhd$ Чтобы найти сумму этих углов (они показаны на рисунке одиночными дугами, но это не значит, что они равны!), рассмотрим соответствующие внутренние углы. Вместе с 4 внутренними углами (которые в сумме дают 360°) получается 4 развёрнутых угла, то есть 720°, поэтому сумма внешних углов равна $720 - 360 = 360^\circ$. $\lhd$



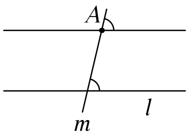
143. Чему равна сумма внешних углов при пяти вершинах выпуклого пятиугольника?

$\rhd$ Вместе с 5 внутренними углами (которые в сумме дают 540°) получается 5 развёрнутых углов, то есть 900°, поэтому сумма внешних углов равна $900 - 540 = 360^\circ$. $\lhd$

Аналогичным способом можно убедиться, что сумма внешних углов выпуклого шести-, семи- и вообще любого n-угольника равна 360°. В самом деле, вместе с внутренними углами получается n развёрнутых углов, то есть $n \cdot 180^\circ$, а внутренние углы дают $(n-2) \cdot 180^\circ$, так что на долю внешних приходится разница в $2 \cdot 180 = 360^\circ$.

Впрочем, есть другое, более наглядное (хотя и менее формальное) объяснение. Представим себе автомобиль, который объезжает многоугольник по периметру. Углы многоугольника являются точками поворота автомобиля. В каждой точке он поворачивает на угол, равный внешнему углу многоугольника. Объехав круг, автомобиль сделает полный оборот, то есть повернёт на 360°.

144. Дана прямая и точка, на ней не лежащая. Как провести (циркулем и линейкой) прямую через данную точку, параллельную данной прямой?



▷ Вот один из способов. Пусть даны прямая l и точка A. Проведём через точку A какую-нибудь прямую m, пересекающую прямую l. Искомая прямая пересекает прямую m под тем же углом, что и прямая l, так что надо просто отложить этот угол от прямой m (задача 116).

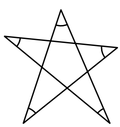
Можно выбрать угол пересечения прямым: опускаем из A перпендикуляр m на прямую l, а затем из той же точки A восставляем перпендикуляр к прямой m (используя задачи 120 и 119). ◁

Ещё несколько задач

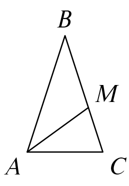
145. Дайте другое доказательство теоремы о сумме углов выпуклого четырёхугольника, разрезав его двумя диагоналями на четыре треугольника.

146. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ (вершины перечислены по часовой стрелке)

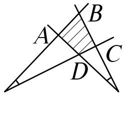
$$\angle CAD + \angle BDA = \angle DBC + \angle ACB.$$



147. Докажите, что сумма пяти углов у вершин пятиконечной звезды (отмечены одинарной дугой, но могут быть различными) одинакова у всех звёзд. Чему она равна?



148. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B. [Ответ: 36°.]



149. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются под углом 20°, продолжения двух других противоположных сторон (AD, BC) — тоже. Докажите, что два угла в четырёхугольнике равны, а два других отличаются на 40°.

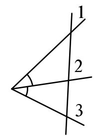
150. Стороны угла в 75° перпендикулярны сторонам другого угла. Чему может быть равен этот угол? (Возможны разные варианты.)

151. Две прямые движутся параллельно самим себе. Докажите, что угол между ними остаётся неизменным.

152. Вспоминая доказательство формулы для суммы углов n-угольника, получите в качестве следствия, что при любом способе разрезания диагоналями выпуклого n-угольника на треугольники (диагонали не обязаны выходить из одной вершины) получается одно и то же число треугольников $(n-2)$.

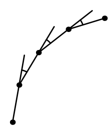
153. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом 4-угольнике? в выпуклом 5-угольнике? в выпуклом 100-угольнике?

154. Прямая пересекает стороны угла и его биссектрису, образуя три угла (см. рисунок). Докажите, что средний из этих углов равен полусумме крайних.

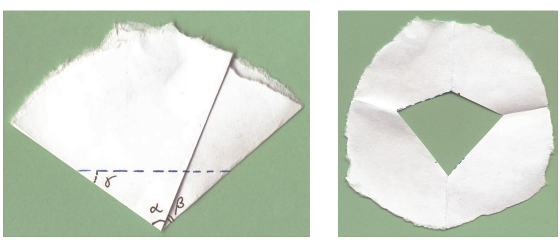


155. Через данную точку проведите (циркулем и линейкой) прямую, которая пересекает две данные (не параллельные) прямые под равными углами.

156. Робот проезжает по прямой 1 метр, поворачивает направо на некоторый угол α, проезжает прямо ещё 1 метр, опять поворачивает направо на тот же угол α, снова проезжает 1 метр и так далее. Докажите, что точки поворотов робота лежат на одной окружности.



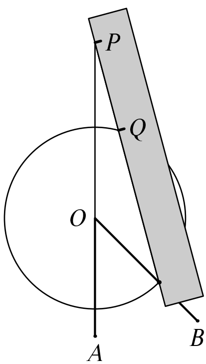
157. Кусок бумаги дважды согнули по прямым, а потом разрезали ножницами по пунктирной линии и развернули. Как найти углы получившегося



четырёхугольника (дырки), если известны углы α, β и γ?

158. По прямому шоссе со скоростью 60 км/ч едет машина. Параллельно шоссе стоит дом длиной 100 метров. Каждую секунду пассажир машины измеряет угол, под которым виден дом (фасад дома). Докажите, что сумма всех измеренных им углов не больше $1100°$.

В задаче 118 мы делили угол на две равные части (строили биссектрису угла) циркулем и линейкой. А можно ли циркулем и линейкой разделить угол на *три* равные части? Эта задача называется «трисекцией угла». Она известна со времён древней Греции, и Архимед придумал решение с небольшим жульничеством — или, как сейчас говорят, креативно использовал линейку, сделав на ней пометки. Вот это построение.



Желая разделить на три части угол AOB, проведём окружность некоторого радиуса с центром в O. Затем, не меняя раствора циркуля, сделаем на линейке две пометки P и Q (расстояние между ними равно радиусу окружности). Теперь приложим линейку так, чтобы она проходила через точку окружности на луче OB, а две пометки попали бы на прямую AO и на окружность. Тогда угол, образуемый линейкой с прямой AO, будет равен трети исходного.

159. Докажите, что построение Архимеда действительно позволяет построить угол, равный трети данного. $\langle$Треугольники PQO и OQB — равносторонние.$\rangle$

Мы уже упомнали, что (как было доказано много позже, в XIX веке) без таких хитростей (используя линейку лишь для того, чтобы провести прямую через уже имеющиеся точки, а циркуль — лишь для построения окружности с уже построенным центром и известным радиусом) обойтись нельзя.

10. Прямоугольные треугольники

Прямоугольным называется треугольник, в котором один из углов прямой. Прилежащие к этому углу стороны называются *катетами* треугольника, а противолежащая сторона — *гипотенузой.*

160. Докажите, что в прямоугольном треугольнике углы при гипотенузе в сумме составляют прямой угол.

$\triangleright$ Сумма всех трёх углов составляет 180°, значит, на долю двух других остаётся $180-90 = 90^\circ$. $\triangleleft$

Отсюда следует, что остальные углы в прямоугольном треугольнике (кроме прямого) — острые: если их сумма равна прямому углу, то каждое из слагаемых меньше прямого.

161. Найдите углы прямоугольного равнобедренного треугольника.

$\triangleright$ Углы при основании равнобедренного треугольника равны, а в сумме составляют 90°, так что каждый из них равен 45°. $\triangleleft$

Несколько следующих задач дают признаки равенства прямоугольных треугольников.

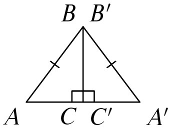
162. (а) Докажите признак равенства прямоугольных треугольников «по двум катетам»: если у двух прямоугольных треугольников (ABC и $A'B'C'$ с прямыми углами B и B') равны соответствующие катеты ($AB = A'B'$ и $BC = B'C'$), то треугольники равны.

(б) Сформулируйте и докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилегающему к нему острому углу.

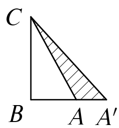
$\triangleright$ Эти признаки не требуют специального доказательства: они всего лишь частные случаи первого и второго признаков равенства треугольников, когда один из углов прямой. $\triangleleft$

В следующей задаче уже нельзя сослаться на признаки равенства треугольников (потому что тот признак, на который хотелось бы сослаться, неверен — см. задачу 85).

163. Катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны катету и гипотенузе другого. Докажите, что треугольники равны.



▷ Приложим треугольники друг к другу равными катетами BC и $B'C'$ (см. рисунок). Поскольку треугольники прямоугольные, то два других катета составят одну прямую (AA') и два треугольника составят больший треугольник. По условию гипотенузы равны, поэтому этот больший треугольник получится равнобедренным. Докажем, что точка C (совмещённая с C') является серединой AA'. В самом деле, если серединой AA' была какая-нибудь другая точка M, то BM была бы медианой равнобедренного треугольника ABA', а потому и его высотой, и мы получили бы два разных перпендикуляра, опущенных из точки B на прямую AA' — отрезки BC и BM. Значит, C и M совпадают, отрезки AC и $A'C'$ равны и наши треугольники равны, например, по двум катетам. (Или по трём сторонам.) ◁



Можно рассуждать иначе, совместив равные катеты так, чтобы треугольники оказались по одну сторону (см. рисунок). Если при этом точки A и A' совпадут, то треугольники равны. Если же нет, то образуется треугольник CAA'. Он должен быть равнобедренным, так как $CA = CA'$ по условию (гипотенузы равны). С другой стороны, в нём один из углов при основании (на рисунке $\angle CAA'$) тупой, так как смежный к нему угол ($\angle CAB$) острый. Углы при основании в равнобедренном треугольнике равны, а второго тупого угла быть не может (сумма углов 180°). Значит, этот случай (несовпадение A и A') невозможен.

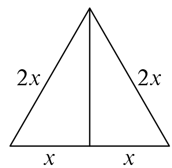
164. Гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе другого; один из прилегающих к ней углов равен углу при гипотенузе другого треугольника. Докажите, что треугольники равны.

▷ Поскольку в обоих треугольниках сумма углов равна 180° и у них есть два равных угла, то равны и третьи углы, и треугольники равны по гипотенузе и двум примыкающим к ней углам. ◁

165. Катет одного прямоугольного треугольника равен катету другого; противолежащие им углы также равны. Докажите, что треугольники равны.

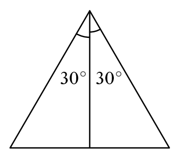
▷ В каждом из двух треугольников острые углы в сумме дают 90°, поэтому если противолежащие равным катетам углы равны, то и прилежащие к ним углы тоже равны. Остаётся воспользоваться вторым признаком равенства треугольников. ◁

166. В прямоугольном треугольнике один из катетов вдвое короче гипотенузы. Найдите углы треугольника.



▷ Возьмём два таких треугольника и приложим их длинными катетами друг к другу. Короткие катеты будут составлять один отрезок (углы прямые). Длина этого отрезка по условию равна длине гипотенузы, так что получится равносторонний треугольник, в котором углы равны 60°. Ответ: 60°, 30°, 90°. ◁

167. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что один из катетов вдвое короче гипотенузы.



▷ Приложим два таких треугольника друг к другу катетами так, чтобы два угла в 30° образовали угол в 60°. Получится равнобедренный треугольник с углом при вершине 60°, который будет равносторонним. Следовательно, удвоенный меньший катет равен гипотенузе, что и требовалось доказать. ◁

168. Как построить прямоугольный треугольник, если даны его катет и гипотенуза?

▷ Построим прямой угол. На одной из его сторон отложим данный катет. Затем возьмём циркуль с раствором, равным гипотенузе, поставим одну ножку циркуля в конец катета и сделаем нужную отметку на другой стороне угла. ◁

Ещё несколько задач

169. Докажите, что в тупоугольном треугольнике только один угол тупой, а два остальных — острые.

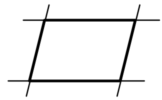
170. Медиана треугольника вдвое короче стороны, к которой она проведена ($AM = \frac{1}{2}BC$ для медианы AM треугольника ABC). Покажите, что этот треугольник прямоугольный: $\angle A = 90^\circ$.

171. Покажите, что любой прямоугольный треугольник можно разрезать на два прямоугольных треугольника, у которых те же самые углы, что у исходного.

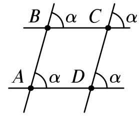
172. Вася утверждает, что разрезал тупоугольный треугольник на несколько остроугольных. Может ли так быть?

11. Параллелограммы

Четырёхугольник $ABCD$ называется *параллелограммом*, если его противоположные стороны попарно параллельны.

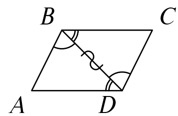


173. Докажите, что в параллелограмме углы при соседних вершинах дают в сумме 180°, а углы при противоположных вершинах равны.



$\triangleright$ Пусть $ABCD$ — параллелограмм. По основному свойству параллельных прямых все четыре отмеченных на рисунке угла равны. Обозначим их величину через α. Тогда углы A и C равны α (второй — как вертикальный к углу α), а углы B и D являются смежными к углам величины α и потому равны $180^\circ - \alpha$. $\triangleleft$

174. Докажите, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

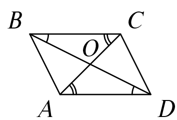


$\triangleright$ Проведём в параллелограмме $ABCD$ диагональ BD. Поскольку стороны AB и CD параллельны, углы ABD и BDC равны как накрест лежащие. Аналогичным образом параллельность сторон BC и AD гарантирует, что углы CBD и BDA равны. Диагональ BD является общей стороной треугольников ABD и CDB. Остаётся воспользоваться признаком равенства треугольников по стороне и двум углам. $\triangleleft$

175. Докажите, что противоположные стороны параллелограмма равны.

$\triangleright$ Это является очевидным следствием предыдущей задачи: если треугольники равны, то равны и их стороны. $\triangleleft$

176. Диагонали делят параллелограмм на 4 треугольника. Докажите, что среди них есть две пары равных.

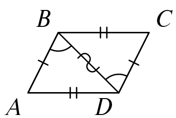


$\triangleright$ Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажем, что треугольники AOD и COB равны. В самом деле, стороны AD и BC равны (по предыдущей задаче), углы OAD и OCB, а также ODA и OBC равны как внутренние накрест лежащие. Осталось применить признак равенства треугольников по стороне и двум углам. ◁

177. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую из диагоналей пополам.

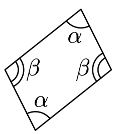
▷ Это очевидно следует из предыдущей задачи: в равных треугольниках равны стороны. ◁

178. Докажите, что если в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно равны ($AB = CD$, $AD = BC$), то это параллелограмм.



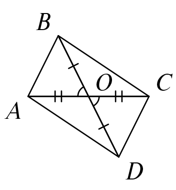
▷ Проведём диагональ BD. Она разделит четырёхугольник на два треугольника, которые равны по трём сторонам (BD — общая, остальные пары сторон равны по предположению). Следовательно, углы CDB и ABD равны, поэтому прямые AB и CD параллельны (углы являются внутренними накрест лежащими). Аналогичным образом прямые AD и BC параллельны, и $ABCD$ — параллелограмм. ◁

179. Докажите, что четырёхугольник, в котором противоположные углы попарно равны, является параллелограммом.



▷ Пусть два противоположных угла четырёхугольника равны α, а два других угла равны β. Тогда сумма всех углов, то есть $2\alpha + 2\beta$, равна 360°, поэтому $\alpha + \beta = 180^\circ$. Поэтому противоположные стороны четырёхугольника параллельны (углы α и β являются при них внутренними односторонними). ◁

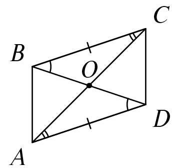
180. Точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит каждую из них пополам. Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.



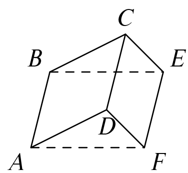
▷ Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Треугольники AOB и COD равны по первому признаку (углы при вершине O вертикальны, стороны равны по условию). В частности, углы OAB и OCD равны. А они являются внутренними накрест лежащими при секущей AC, поэтому стороны AD и BC параллельны. Аналогичным образом (какие для этого нужны треугольники?) доказывается, что стороны AB и CD параллельны. ◁

181. Докажите, что если в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны и параллельны, то это параллелограмм.

▷ Проведём диагонали; пусть O — точка их пересечения. Рассмотрим треугольники AOD и BOC. Они равны по стороне и двум углам ($AD = BC$, примыкающие углы равны как внутренние накрест лежащие), поэтому $AO = OC$, $BO = OD$. Теперь можно сослаться на предыдущую задачу (или повторить рассуждение: треугольники AOB и COD равны по углу и двум сторонам). ◁

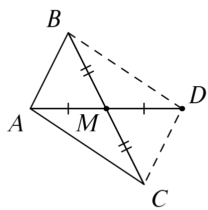


182. Два параллелограмма $ABCD$ и $DCEF$ приложены друг к другу общей стороной CD. Докажите, что четырёхугольник $ABEF$ — тоже параллелограмм.



▷ Посмотрим на отрезки AB, DC и FE. Так как $ABCD$ — параллелограмм, первый отрезок параллелен и равен второму. Так как $DCEF$ — параллелограмм, второй отрезок равен и параллелен третьему. Поэтому первый и третий отрезки равны и параллельны (вспомним, что две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу). Остаётся сослаться на предыдущую задачу. ◁

183. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что $ABDC$ — параллелограмм.

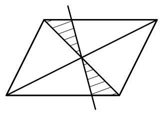


▷ В получающемся четырёхугольнике диагонали делятся точкой пересечения пополам по построению, остаётся воспользоваться задачей 180. ◁

Такая конструкция (продление медианы вдвое) нам уже встречалась. С её помощью мы доказывали, что медиана в треугольнике не превосходит полусуммы двух примыкающих к ней сторон.

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его *центром.*

184. Прямая проходит через центр параллелограмма. Докажите, что её отрезок, заключенный внутри параллелограмма, делится центром пополам.



▷ В заштрихованных треугольниках равны стороны, являющиеся половинками диагонали (центр делит диагональ пополам), и примыкающие к ним углы (одна пара — вертикальные углы, другая — внутренние накрест лежащие). ◁

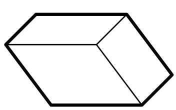
Ещё несколько задач

185. На плоскости даны три точки, не лежащие на одной прямой. Мы хотим поставить четвертую точку, чтобы получились вершины параллелограмма. Сколькими способами это можно сделать?

186. Диагональ разбивает четырёхугольник на два равных треугольника. Можно ли заключить из этого, что этот четырёхугольник — параллелограмм?

187. Пол вымощен керамическими плитками, имеющими форму параллелограмма с неравными сторонами. Одна из плиток расшаталась и её вынули. Сколькими способами можно вернуть её на место, если плитку разрешается переворачивать?

188. Имеется треугольная плитка, у которой все три стороны разной длины. Как сложить параллелограмм из двух таких плиток? Как вымостить плоскость такими плитками?



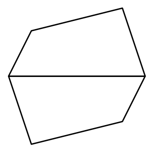
189. Шестиугольник выложен тремя плитками, имеющими форму параллелограммов. Как выложить его теми же плитками, но другим способом? ⟨Как рисуют куб на картинках?⟩

190. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

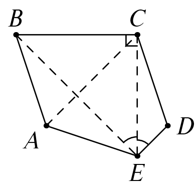
191. Говорят, что *точки A и A' симметричны относительно точки O*, если O является серединой отрезка AA'. Докажите, что если точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно одной и той же точки O, то отрезки AB и $B'A'$ равны и параллельны.

192. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ (вершины перечислены по часовой стрелке) противоположные стороны AB и DE равны и параллельны. Противоположные стороны BC и EF тоже равны и параллельны. Докажите, что и третья пара противоположных сторон (CD и AF) обладает этим свойством и что диагонали AD, BE и CF проходят через одну точку. ⟨Диагонали делятся пополам точкой пересечения.⟩

193. Две одинаковые плитки, имеющие форму четырёхугольника, приложили друг к другу соответствующими сторонами, как показано на рисунке. Покажите, что в получившемся шестиугольнике есть три пары параллельных сторон.



194. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ стороны AB и CD равны и параллельны, сторона DE параллельна диагонали AC, а угол BCE прямой. Покажите, что отрезок EC является биссектрисой угла BED. ⟨Продолжите ED до пересечения с BC в точке F; воспользуйтесь свойствами параллелограммов $ABCD$ и $ACFD$ и покажите, что CE является серединным перпендикуляром к BF.⟩



12. Прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется *прямоугольником.*

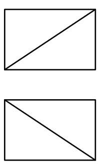
195. Если в параллелограмме есть хотя бы один прямой угол, то это прямоугольник.

▷ В параллелограмме противоположные углы равны, а сумма соседних углов равна 180°. Поэтому если один из углов равен 90°, то и соседние, и противоположный также будут равны 90°. ◁

196. Четырёхугольник, в котором все углы прямые, — прямоугольник.

▷ Надо доказать, что это параллелограмм. В самом деле, противоположные стороны параллельны, так как сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам. ◁

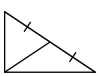
197. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.



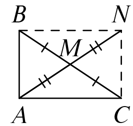
▷ Разрежем этот параллелограмм диагональю на два треугольника двумя способами (проведя две разные диагонали). Все четыре треугольника будут прямоугольные и будут иметь одинаковые катеты (противоположные стороны прямоугольника, как у любого параллелограмма, равны). Поэтому треугольники равны, и их гипотенузы тоже равны. ◁

198. Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то это прямоугольник.

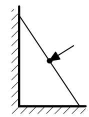
▷ Как и в предыдущей задаче, разрежем его на треугольники двумя способами. Снова все эти треугольники равны, но по другой причине: по трём сторонам (пары противоположных сторон параллелограмма и его диагонали). Поэтому все углы параллелограмма равны. В сумме они дают 360°, значит, все они прямые. ◁



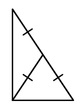
199. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



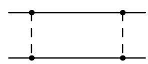
▷ Снова применим приём удвоения медианы. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, угол A — прямой, AM — медиана (так что M — середина стороны BC). Продолжим AM за точку M на расстояние, равное AM. Получим точку N, которую соединим с вершинами B и C. В четырёхугольнике $ABNC$ диагонали делятся пополам точкой пересечения. Значит, это параллелограмм. Один из углов его прямой — значит, это прямоугольник. В прямоугольнике диагонали равны — значит, удвоенная медиана равна стороне BC. ◁



200. У вертикальной стены стоит лестница, которая начинает скользить вниз. По какой линии двигается кошка, сидящая на середине лестницы?



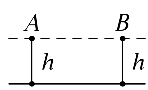
▷ По дуге окружности. В самом деле, лестница является гипотенузой прямоугольного треугольника, а кошка — серединой гипотенузы, поэтому расстояние от кошки до вершины прямого угла равно половине длины лестницы и не меняется. Значит, кошка двигается по дуге (части) окружности. ◁



201. Из двух точек прямой опущены перпендикуляры на параллельную ей прямую. Докажите, что они равны.

▷ В самом деле, получается четырёхугольник, в котором все углы прямые, то есть прямоугольник. Его противоположные стороны равны. ◁

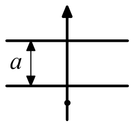
> Таким образом, расстояние между двумя параллельными прямыми можно определить как длину отрезка, высекаемого ими на перпендикулярной прямой — по предыдущей задаче оно не зависит от того, где мы проведём этот перпендикуляр.



202. Перпендикуляры, опущенные из точек A и B на прямую l, равны. Докажите, что отрезок AB параллелен прямой l.

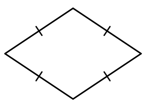
▷ В получающемся четырёхугольнике две стороны (перпендикуляры, опущенные на l) равны и параллельны, поэтому это параллелограмм, и две другие стороны тоже параллельны. ◁

203. Две параллельные прямые находятся на расстоянии a. Точка находится на расстоянии d от одной из них. Каким может быть её расстояние от другой прямой? (Укажите все варианты. Учтите, что a может быть и меньше d, и больше d.)



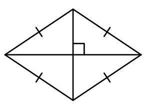
$\triangleright$ Представим себе две прямые как параллельные дороги на расстоянии a друг от друга. Мы пересекаем эти дороги, двигаясь в перпендикулярном направлении. Когда остаётся d до первой дороги, до второй остаётся $d + a$. Переехав первую дорогу на расстояние d, но не доехав до второй (при $d < a$), мы будем от неё на расстоянии $a - d$. Переехав вторую дорогу (при $d \geqslant a$), мы будем от неё на расстоянии $d - a$. Второй и третий случаи можно объединить одной формулой $|d - a|$. Ответ: $d + a$, $|d - a|$. $\triangleleft$

Ро́мбом называется параллелограмм, в котором все четыре стороны равны.



204. Четырёхугольник, в котором все стороны равны, является ромбом.

$\triangleright$ Достаточно вспомнить, что четырёхугольник, в котором равны противоположные стороны, является параллелограммом. $\triangleleft$



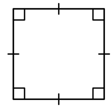
205. Диагонали ро́мба пересекаются под прямым углом.

$\triangleright$ Разрежем его диагоналями на четыре треугольника. Они окажутся равными по трём сторонам (напомним, что диагонали любого параллелограмма делятся пополам точкой пересечения). Значит, все четыре угла, возникающие при пересечении диагоналей, равны. Значит, они прямые. $\triangleleft$

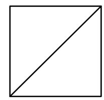
206. Если в параллелограмме диагонали пересекаются под прямым углом, то это ромб.

$\triangleright$ Как и в предыдущей задаче, разрежем параллелограм на четыре треугольника диагоналями. Они снова равны, только теперь не по трём сторонам, а по двум сторонам и (прямому) углу между ними. $\triangleleft$

Прямоугольник, являющийся одновременно ромбом, называется *квадратом*: у него все стороны равны, а все углы прямые.



207. Какой угол образует диагональ квадрата с его стороной?



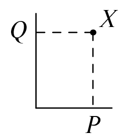
▷ Это — острый угол в прямоугольном равнобедренном треугольнике, который равен 45°. ◁

Ещё несколько задач

208. Докажите, что в прямоугольнике точка пересечения диагоналей равноудалена от всех четырёх вершин.

209. Докажите, что вершины прямоугольного треугольника лежат на окружности, центр которой находится в середине гипотенузы.

210. Дан прямой угол. Из произвольной точки X внутри этого угла опускают перпендикуляры XP и XQ на стороны этого угла. Нарисуйте, где находятся точки X, для которых расстояние между точками P и Q меньше 1.

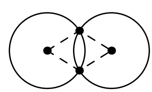


211. Какое максимальное число прямых углов может иметь четырёхугольник, не будучи прямоугольником?

212. Какое максимальное число равных углов может иметь четырёхугольник, не будучи прямоугольником?

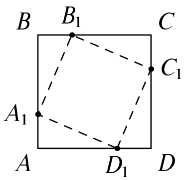
213. Какое максимальное число равных сторон может иметь четырёхугольник, не будучи ромбом?

214. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в двух точках. Докажите, что их точки пересечения и центры лежат в вершинах ромба.



215. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

216. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

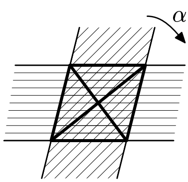


217. На сторонах квадрата $ABCD$ от вершин A, B, C, D по часовой стрелке отложены равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются вершинами квадрата.

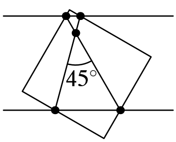
218. Один квадрат вписан в другой (четыре вершины первого лежат на четырёх сторонах второго). Докажите, что четыре остающихся (от большого квадрата после вырезания малого) треугольника равны.

219. Чтобы проверить, что лист бумаги с прямыми краями прямоугольный, Вова сложил его вдвое (согнув по средней линии) и убедился, что две половины в точности накладываются друг на друга. Гарантирует ли это, что лист действительно имеет форму прямоугольника? А если согнуть ещё и по другой средней линии?

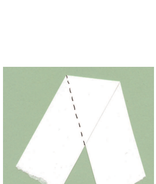
220. Что можно сказать о четырёхугольнике, если после складывания его вдвое по любой из диагоналей две его половины в точности накладываются друг на друга?



221. Бумажная полоска имеет параллельные прямые края. Две такие полоски одинаковой ширины наложены друг на друга. Докажите, что в пересечении получается ромб. На какой угол повернутся диагонали ромба, если одну из полосок повернуть на угол α?

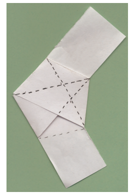


222. Два угла квадрата со стороной a выступают за пределы полосы ширины a с параллельными краями. Стороны квадрата пересекают края полосы в четырёх точках. Докажите, что диагонали четырёхугольника, вершинами которого являются эти точки, пересекаются под углом в 45°. ⟨Используйте предыдущую задачу.⟩

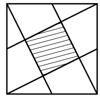


223. Бумажная полоска имеет параллельные прямые края. Её перегнули и сплющили как на рисунке (пунктир дорисован вдоль невидимой части края). Докажите, что образующийся треугольник (где полоска лежит в два слоя) — равнобедренный.

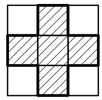
224. Бумажная полоска имеет параллельные прямые края. Её завязали в узел и сплющили как на рисунке (пунктир дорисован вдоль невидимой части края). Докажите, что получающийся пятиугольник правильный (это значит, что все стороны в нём равны и все углы равны).



225. Квадрат разрезали по отрезкам, соединяющим вершины с серединами противоположных сторон (см. рисунок). Покажите, что средняя часть тоже будет квадратом, а из оставшихся частей можно сложить ещё четыре таких же квадрата.



226. Крест состоит из пяти равных квадратов. Как разрезать его на части, из которых можно сложить (без промежутков, перекрытий и использовав все части) один квадрат?



227. В прямоугольном кузове грузовика (размер 3×7 метров) валяется двухметровая жердь. Посередине у неё гвоздь, который царапает дно кузова. Нарисуйте, какая часть кузова останется не поцарапанной, как бы долго грузовик ни трясся по ухабам.

228. На основании равнобедренного треугольника выбрана точка X. Докажите, что сумма расстояний от X до боковых сторон треугольника будет одной и той же при любом положении точки X. ⟨Покажите, что при сдвиге точки X в другое место X' увеличение одного расстояния в точности скомпенсируется уменьшением другого.⟩

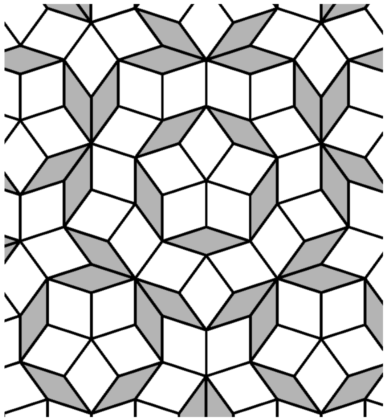
229. На сторонах AB и AC треугольника ABC (вершины перечисляются по часовой стрелке) построены квадраты $AKLB$ и $ACNM$. Покажите, что отрезки KC и BM равны.

230 (Продолжение). Покажите, что отрезки KC и BM перпендикулярны.

231 (Продолжение). Покажите, что медиана AD треугольника ABC, соединяющая A с серединой D стороны BC, перпендикулярна отрезку KM и вдвое короче его.

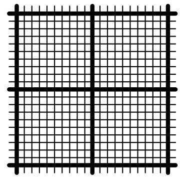
232. На сторонах параллелограмма построены квадраты (снаружи от параллелограмма). Покажите, что центры этих квадратов сами являются вершинами квадрата.

233. Замощение Пенроуза (названное в честь Роджера Пенроуза, предложившего его в 1970-е годы) покрывает плоскость ромбами двух типов, как показано на рисунке. Каковы углы этих ромбов?



13. Клетчатая бумага

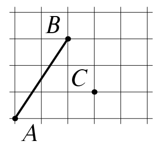
Клетчатая бумага разбита параллельными горизонталями и вертикалями на квадратные клетки одинакового размера.



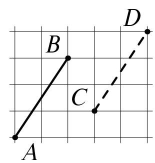
На практике сторона клетки бывает разной. В тетрадках часто бывают клетки со стороной 5 мм; для более точных чертежей используют миллиметровую бумагу, где сторона клетки 1 мм и через каждые десять клеток, то есть через 1 см, идёт более жирная линия (см. рисунок).

234. Сколько маленьких квадратиков содержится в одном большом?

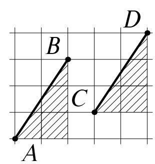
▷ Обе стороны большого квадрата делятся на 10 частей, всего получается $10 \times 10 = 100$ маленьких квадратиков. Другими словами, один квадратный сантиметр равен 100 квадратным миллиметрам. ◁



235. Пользуясь только линейкой, постройте на клетчатой бумаге отрезок CD, равный и параллельный отрезку AB (см. рисунок).

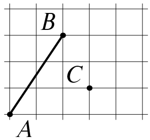


▷ По рисунку легко догадаться, как это сделать. Точка B на две клеточки правее и на три клеточки выше, чем точка A. По аналогии возьмём точку D на две клеточки правее и на три клеточки выше, чем точка C, и соединим её с C отрезком. ◁

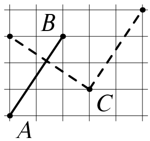


Аналогия, конечно, дело хорошее, но как доказать, что построенный таким образом отрезок CD параллелен и равен AB? Под *углом наклона* прямой на клетчатой бумаге будем понимать угол, который она образует с горизонталями. (Все горизонтали параллельны, поэтому углы одинаковы, и можно брать любую горизонталь.) Чтобы доказать, что прямые AB и CD параллельны, достаточно убедиться, что их углы наклона одинаковы (признак параллельности). Но это следует из равенства заштрихованных треугольников (по двум катетам: мы откладывали поровну клеток). Из равенства треугольников также следует, что их гипотенузы равны.

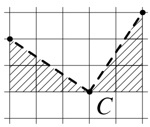
Ещё можно заметить, что задача имеет два решения: можно было бы взять точку D на две клетки левее и на три клетки ниже C. В этом случае отрезок CD будет направлен в другую сторону от C, но по-прежнему параллелен AB (по тем же причинам).



236. Постройте на том же рисунке (тоже только линейкой) прямую, перпендикулярную AB и проходящую через точку C.



$\triangleright$ Мы уже знаем, как по клеточкам строить параллельный отрезок CD. Осталось повернуть его на 90°. Это тоже можно сделать по клеточкам: отложив влево столько клеточек, сколько было вверх, а вверх — столько, сколько было вправо. $\triangleleft$



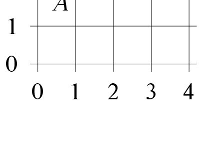
Как доказать, что полученный отрезок действительно будет перпендикулярен CD (и потому AB)? Это снова можно сделать с помощью равенства заштрихованных на рисунке треугольников. (Про отрезок AB уже можно забыть, и он не показан.) Это прямоугольные треугольники, равные по двум катетам. К точке C примыкают больший и меньший углы этих треугольников, которые в сумме равны 90°, и остаётся ещё 90°.

> *Узлами* сетки называют точки пересечения вертикальных и горизонтальных линий.

Для металлической сетки узлы — это места сварки горизонтальных прутьев с вертикальными.

Описывая рисунок на клетчатой бумаге словами, узлы называют как в шахматах (где клетка e2 означает клетку на вертикали «e» и второй горизонтали). Единственная разница — вертикали тоже нумеруются числами, слева направо. (А горизонтали, как в шахматах, снизу вверх.)

> Эти числа называют *координатами* и пишут обычно через запятую в скобках.

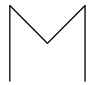


Скажем, точка A на рисунке имеет координаты $(1, 2)$, а точка B имеет координаты $(4, 3)$.

237. Один из узлов сетки имеет координаты (x, y). Какие координаты имеет его правый сосед?

левый сосед? верхний сосед? нижний сосед? [Ответ: $(x+1, y)$; $(x-1, y)$; $(x, y+1)$; $(x, y-1)$.]

238. Какая буква получится, если соединить ломаной линией точки $(0,0)$–$(0,2)$–$(1,1)$–$(2,2)$–$(2,0)$? [Ответ: М.]

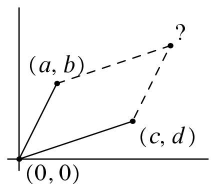


Координаты точек указывают программам подготовки рисунков. Например, рисунок на полях получен с помощью программы METAPOST из такого текста: «`draw ((0,0)--(0,2)--(1,1)--(2,2)--(2,0)) scaled 5mm`». Этот текст просит нарисовать (draw) ломаную с вершинами в указанных точках в масштабе 5 миллиметров на клетку.

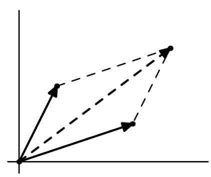
Точку $(0,0)$ называют *началом координат*. Но сетку можно продолжить и за начало координат, только числа будут уже отрицательными: левее вертикали 0 идёт вертикаль -1, ещё левее -2 и так далее.

239. Середина отрезка находится в точке $(0,0)$, а один из его концов имеет координаты (a, b). Какие координаты имеет другой конец? [Ответ: $(-a, -b)$.]

240. Три вершины параллелограмма (в порядке обхода) имеют координаты (a, b), $(0,0)$ и (c, d). Каковы координаты четвёртой вершины?



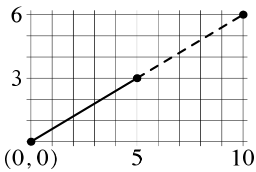
▷ Мы уже видели, что если отсчитать то же число клеток по горизонтали и вертикали, то получится равный и параллельный отрезок. Поэтому надо отсчитать от точки $(c+d)$ вправо a клеток и вверх b клеток. Получится точка $(c+a, d+b)$. ◁



Физики называют эту операцию *сложением векторов*: два вектора (сплошные стрелки на рисунке) в сумме дают третий (пунктирная стрелка). Если векторы изображают силу (куда тянут и насколько сильно), то две силы, приложенные к одной точке, можно заменить их суммой (равнодействующей), которая находится по описанному нами правилу параллелограмма.

241. Через точки $(0,0)$ и $(5,3)$ проведена прямая. Проходит ли она ещё через какие-нибудь узлы сетки?

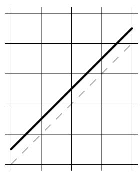
▷ Конечно, проходит. Отложим от узла $(5,3)$ ещё пять клеток вправо и три клетки вверх. Этот



отрезок будет иметь тот же угол наклона, что и отрезок $(0,0)–(5,3)$, то есть будет его продолжением. Значит, и точка $(10,6)$, то есть его конец, будет лежать на прямой. Так можно продолжать: следующая точка будет $(15,9)$, потом $(20,12)$ и так далее. (Можно пойти и в другую сторону: $(-5,-3)$, потом $(-10,-6)$, и т. д.) $\triangleleft$

Эта задача показывает, что если прямая проходит через несколько узлов сетки, то на неё попадает бесконечная серия узлов, и они идут через равные промежутки. В самом деле, рассмотрим два самых близких узла, они идут через какой-то промежуток. Мы видели, что можно откладывать его в обе стороны и попадать снова в узлы. (И других узлов не будет, иначе этот промежуток не был бы минимальным.)

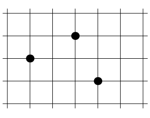
242. А можно ли провести на клетчатой бумаге прямую, которая не проходит ни через один узел сетки?



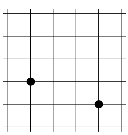
$\triangleright$ Можно: проведём прямую с углом наклона 45°, которая проходит через узлы сетки, а потом сдвинем её на полклетки вверх (см. рисунок). Легко заметить, что она пересекает все горизонтали и вертикали в серединах клеток. $\triangleleft$

Интереснее другой вопрос: можно ли провести прямую, которая проходит ровно через один узел? Оказывается, что тоже можно, и это связано с иррациональными числами. (Например, годится прямая $y = x\sqrt{2}$.)

Ещё несколько задач

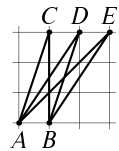


243. На клетчатой бумаге отмечены три точки (см. рисунок). Покажите, где можно отметить четвёртую точку, чтобы получились четыре вершины параллелограмма. (Укажите все возможности.)



244. На клетчатой бумаге отмечены две точки. Добавьте к ним ещё две таким образом, чтобы четыре получившиеся точки были вершинами квадрата. Укажите все возможные варианты. ⟨Их не два, а три.⟩

245. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×7 клеток и в нём проведена диагональ. Сколько клеток она пересекает? (Считаются клетки, внутрь которых она заходит.) ⟨Диагональ делится на отрезки, которых столько же, сколько пересекаемых клеток, а разделяются эти отрезки точками пересечения с вертикалями и горизонталями сетки.⟩



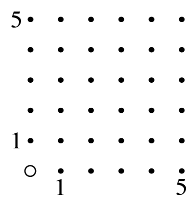
246. Докажите, что сумма углов, под которыми виден отрезок AB из точек C, D и E, равна $45°$.

247. Лежит ли точка с координатами $(2, 1)$ внутри или вне треугольника с вершинами $(1, 1)$, $(2, 4)$ и $(4, 0)$?

248. Раскрасьте узлы сетки в два цвета таким образом, чтобы узлы каждого цвета сами образовывали квадратную сетку (с бо́льшим размером клетки). Тот же вопрос для трёх цветов. (Сетки разных цветов могут иметь разный размер клетки.)

249. Раскрасьте узлы сетки в четыре цвета таким образом, чтобы узлы каждого цвета сами образовывали квадратную сетку, причём все четыре сетки имели одинаковый размер клетки. Тот же вопрос для пяти цветов.

250. Сторона квадрата соединяет точки $(0, 0)$ и (a, b). Найдите координаты двух других вершин квадрата. (Есть два возможных положения квадрата.)



251. В узлах сетки 5×5 клеток, кроме левого нижнего узла $(0, 0)$, высажены деревья, а в левом нижнем находится наблюдатель. Он видит не все деревья: например, дерево $(1, 0)$ загораживает все следующие на той же горизонтали. Сколько деревьев он видит? Перечислите их справа налево, начиная от $(1, 0)$ и кончая $(0, 1)$.

252. Отметьте на клетчатой бумаге узлы (x, y), для которых $y = x$.

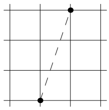
253. ...для которых $y = x + 1$.

254. ...для которых $y = 2x$.

255. ...для которых $2y = x$.

256. ...для которых $x + y = 5$.

257. ...для которых $x + y$ чётно.



258. Укажите узел сетки, находящийся на равном расстоянии от $(1, 0)$ и $(2, 3)$.

259. Укажите ещё несколько таких узлов.

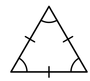
260. Используя предыдущую задачу, докажите, что гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 4, равна 5.

В разделе 28 мы увидим, что гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b равна квадратному корню из $a^2 + b^2$ (теорема Пифагора). В данном случае $5 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$.

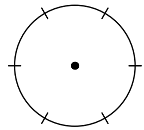
261. Муравей ползёт по линиям сетки. Доползши до узла, он обязательно поворачивает (налево или направо). Докажите, что если в конце он вернулся в исходный узел, то его путь (число пройдённых сторон) делится на 4. (Скажем, чтобы обойти квадрат сетки по сторонам, нужно как раз четыре шага.) ⟨Раз он вернулся в исходную точку, то влево он сделал столько же шагов, сколько вправо, а вверх — сколько вниз. Эти два числа равны, так как он каждый раз поворачивал.⟩

262. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и поворачивает на 90° в любую сторону (по своему выбору) каждый час: проползла час по прямой, повернула, ещё час, снова повернула и так далее. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов, кратное четырём.

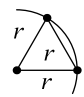
14. Равносторонние треугольники



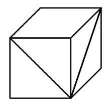
Напомним, что если в треугольнике все стороны равны, то все углы равны 60°.



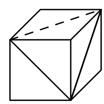
263. С помощью циркуля нарисуйте окружность. После этого, не меняя раствора циркуля, отложите на окружности шесть раз расстояние, равное её радиусу (расстояние считается не по окружности, а по хорде). Если сделать это аккуратно, то последняя точка совпадёт с начальной. Почему?



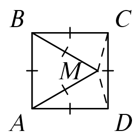
▷ Две соседние точки и центр окружности являются вершинами треугольника (его стороны — радиусы и хорда), и треугольник этот равносторонний. Значит, все углы равны 60°, и шесть таких углов составят полный круг. ◁



264. Найдите угол между диагоналями соседних граней куба, имеющими общий конец (см. рисунок).

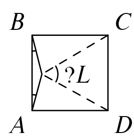


▷ Достаточно провести еще одну диагональ, чтобы стало ясно, что интересующий нас угол является углом равностороннего треугольника и потому равен 60°. ◁



265. Внутри квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM, и вершина M соединена с точками C и D. Найдите углы треугольника CMD.

▷ Углы равностороннего треугольника равны 60°, поэтому угол при вершине A равнобедренного треугольника AMD равен $90 - 60 = 30°$. Поэтому углы при его основании равны $(180 - 30)/2 = 75°$. Значит, угол CDM равен $90 - 75 = 15°$ (равно как и $\angle MCD$). ◁



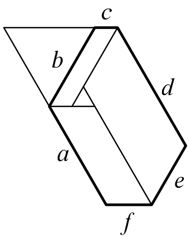
266. Внутри квадрата $ABCD$ построен равнобедренный треугольник ABL с основанием AB и углами при основании, равными 15°. Под каким углом из вершины L видна сторона CD?

▷ Конечно, эта задача по существу совпадает с предыдущей: построим правильный треугольник CDM внутри квадрата, тогда AM и BM будут как раз идти под углом 15° к сторонам, то есть M совпадёт с L. ◁

Если не знать предыдущей задачи, то эта задача окажется довольно трудной — непонятно, как догадаться, что треугольник CDL правильный, не зная этого заранее.

267. В шестиугольнике, все углы которого равны 120°, стороны равны a, b, c, d, e, f (по часовой стрелке). Докажите, что

$$d - a = b - e = f - c.$$



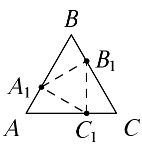
▷ Докажем для начала, что противоположные стороны параллельны. Продолжим стороны a и c до пересечения. В образующемся треугольнике все углы равны 60°. Теперь видно, что стороны c и f параллельны, потому что внутренние односторонние углы при секущей a равны соответственно 120° и 60° и в сумме дают 180°. Аналогично доказывается параллельность и других пар сторон.

Теперь проведём линии, параллельные сторонам, внутри шестиугольника, как показано на рисунке. Получатся три параллелограмма (их противоположные стороны параллельны) с углами 120° и 60°, а также треугольник с углами 60°, то есть равносторонний. Стороны этого треугольника легко найти (вспомнив, что в параллелограмме противоположные стороны равны) — они равны $d - a$, $f - c$ и $b - e$. ◁

Ещё несколько задач

268. Шесть точек на окружности в задаче 263 являются вершинами шестиугольника. Докажите, что большие диагонали этого шестиугольника (соединяющие вершину с противоположной, через две по кругу) пересекаются в одной точке.

269. Даны две точки A и B. Не используя линейки, постройте с помощью циркуля точку C, для которой B будет серединой отрезка AC.



270. На сторонах правильного треугольника по часовой стрелке от вершин A, B и C отложены равные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

271. На сторонах правильного треугольника взяты три точки, которые в свою очередь являются вершинами (меньшего) правильного треугольника. Покажите, что три оставшихся треугольника (дополняющие меньший до большего) равны.

272. В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и CD вдвое короче сторон BC и AD. На стороне BC выбрана точка M, для которой угол MAB равен $15°$. Найдите угол MDA.

273. Высота треугольника (перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную ей сторону) вдвое меньше стороны, на которую она опущена, а один из углов, примыкающих к этой стороне, равен $75°$. Найдите углы треугольника. ⟨И тут полезно вспомнить задачу 265.⟩

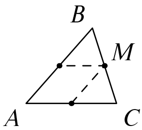
274. Существует ли шестиугольник, у которого все углы равны, а стороны равны $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (не обязательно в таком порядке)?

275. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри равностороннего треугольника до его сторон не зависит от того, где находится эта точка. ⟨Используя задачу 228, покажите, что эта сумма не меняется, когда мы сдвигаем точку параллельно одной из сторон треугольника.⟩

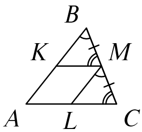
276. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC находится точка D. При этом $\angle ACD = 30°$ и $\angle DAC + \angle BAC = 60°$. Докажите, что $\angle DBC = \angle DAC$. ⟨Поместим треугольник ABC внутрь равностороннего треугольника AEC. Тогда треугольники ABE, ADC и CBE будут равны, и BD параллельно EC.⟩

277. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен $100°$. Точка D внутри ABC такова, что $\angle DAC = 20°$, $\angle DCA = 30°$. Найдите $\angle ADB$. ⟨См. предыдущую задачу.⟩

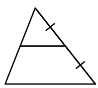
15. Средняя линия треугольника



278. Через середину M стороны BC треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC. Докажите, что они пересекают стороны AC и AB в их серединах.



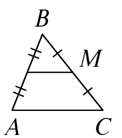
▷ Эти прямые разрезают треугольник на два треугольника BMK и MCL и на четырёхугольник $AKML$, который по построению является параллелограммом. Треугольники BMK и MCL равны по сторонам $BM = MC$ и прилегающим к ним углам (которые равны как углы при секущей). В частности, $KM = LC$. С другой стороны, $KM = AL$ как противоположные стороны параллелограмма, так что все три отрезка KM, AL и LC равны, и L — середина AC. Аналогично K — середина AB. ◁



279. Отрезок, проведённый через середину одной из сторон треугольника параллельно другой стороне, делит третью сторону пополам.

▷ Ровно это и утверждалось в предыдущей задаче (для двух таких отрезков). ◁

(Мы специально сначала спросили про два отрезка, так как удобнее доказывать это для двух отрезков одновременно.)

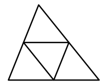


280. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух сторон (AB и BC) треугольника ABC, параллелен третьей стороне (AC) и вдвое короче её.

▷ В предыдущей задаче мы проводили отрезок через середину M стороны BC параллельно стороне AC и убеждались, что он делит сторону AB пополам. Теперь же мы разделили сторону AB пополам и хотим убедиться, что соединяющий середины сторон отрезок параллелен стороне AC. Но это одно и то же: обе задачи говорят, что два построенных отрезка (идущий из M в середину стороны AB и идущий из M параллельно стороне AC) совпадают. ◁

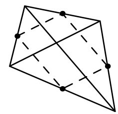
Этот отрезок называют *средней линией* треугольника.

281. Любой треугольник можно разрезать на 4 равных треугольника. Как?



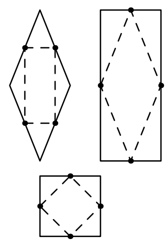
▷ Провести три средние линии — во всех получившихся треугольниках стороны будут равны половинам сторон исходного, и потому все четыре треугольника будут равны. ◁

282. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Каковы стороны этого параллелограмма, если диагонали исходного четырёхугольника равны a и b?



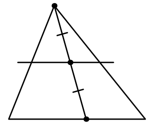
▷ Диагональ четырёхугольника разрезает его на два треугольника. В них две стороны будущего параллелограмма являются средними линиями, и потому оба этих отрезка равны половине диагонали и параллельны ей. Поэтому получается параллелограмм со сторонами $a/2$ и $b/2$. ◁

283. Докажите, что середины сторон ромба образуют прямоугольник, середины сторон прямоугольника образуют ромб, а середины сторон квадрата — квадрат.



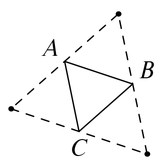
▷ (Мы уже встречали эти утверждения раньше, в задачах 215 и 216, но теперь можно рассуждать проще.) Решение предыдущей задачи показывает, что стороны параллелограмма параллельны диагоналям четырёхугольника и равны их половинам. Поэтому если диагонали перпендикулярны (как у ромба), то получится прямоугольник, а если диагонали равны (как у прямоугольника), то получится параллелограмм с равными сторонами, то есть ромб. Для квадрата получится ромб и прямоугольник одновременно, то есть квадрат. ◁

284. Докажите, что средняя линия треугольника делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

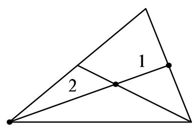


▷ В самом деле, этот отрезок разбивает треугольник на два. В каждом из треугольников имеется прямая (средняя линия большого треугольника), которая проходит через середину одной стороны параллельно основанию. Как мы видели, такая прямая будет средней линией. ◁

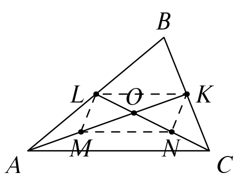
285. Даны три произвольные точки на плоскости, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, у которого они будут серединами сторон.



▷ Отрезки, соединяющие заданные точки (A, B, C), будут средними линиями искомого треугольника, поэтому его стороны легко построить (проведя через A прямую, параллельную BC и так далее). Получатся 4 равных треугольника (они равны, так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника). Поэтому точки A, B, C будут серединами сторон большого треугольника. ◁



286. В треугольнике проведены две медианы. Докажите, что точка их пересечения делит каждую из медиан в отношении 2 : 1 (считая от вершины).



▷ Пусть в треугольнике ABC медианы AK и CL пересекаются в точке O. Нам надо доказать, что $AO : OK = CO : OL = 2 : 1$. Отметим середины отрезков AO (пусть это будет точка M) и CO (точка N). Надо доказать, что каждая медиана разделилась на три равные части.

Проведём отрезки LK и MN. Каждый из них является средней линией в треугольнике (треугольники ABC и AOC). Поэтому каждый из них параллелен стороне AC и равен её половине. Значит, $KLNM$ — параллелограмм. А потому диагонали его, пересекаясь, делятся пополам. Таким образом, два отрезка из трёх, на которые делится медиана, равны. Но точки M и N по построению были серединами отрезков AO и CO, значит, и все три отрезка, на которые делится медиана, равны. ◁

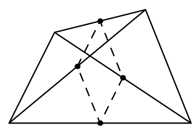
287. Докажите, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

▷ По существу, мы уже это доказали в предыдущей задаче. В самом деле, проведём одну из медиан. В какой точке пересечёт её вторая медиана? Это мы знаем: в точке, делящей её в отношении 2 : 1 (на расстоянии трети от конца). А где пересечёт её третья медиана? Точка пересечения первой и третьей медианы тоже должна делить первую медиану в отношении 2 : 1, и потому это та же самая точка! ◁

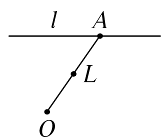
Ещё несколько задач

288. Из вершин треугольника ABC проведены отрезки AK, BL и CM, соединяющие их с некоторыми точками на противоположных сторонах. Могут ли середины этих трёх отрезков лежать на одной прямой? ⟨Где может находиться каждая из этих точек?⟩

289. Докажите, что середины пары противоположных сторон четырёхугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма. Найдите его стороны, если известны стороны четырёхугольника.

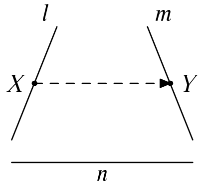


290. Один конец эластичной нити закреплён неподвижно в точке O, а другой конец A движется по прямой l. По какой траектории движется середина L отрезка OA?

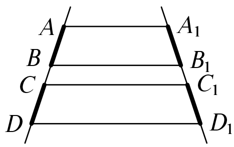


291. Середины сторон параллелограмма являются вершинами другого параллелограмма, а середины сторон этого параллелограмма являются вершинами третьего параллелограмма. Докажите, что стороны третьего параллелограмма параллельны сторонам исходного.

16. Теорема Фалеса

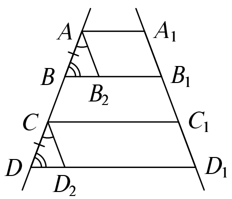


Пусть даны три прямые l, m и n. Рассмотрим точку на прямой l, которая отбрасывает тень на прямую m («экран»), когда свет падает вдоль (параллельно) прямой n. Другими словами, тенью точки X на прямой l называется такая точка Y на прямой m, что отрезок XY параллелен прямой n.



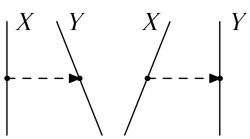
292 (Теорема Фалеса[1]). Равные отрезки отбрасывают равные тени.

Более формально, нужно доказать такое утверждение. Точки A, B, C, D лежат на прямой l, точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на прямой m. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллельны прямой n. Известно, что $AB = CD$. Тогда $A_1B_1 = C_1D_1$.



▷ Проведём отрезки AB_2 и CD_2 параллельно прямой m. Они параллельны друг другу, и потому в треугольниках ABB_2 и CDD_2 углы A и C равны. Прямые BB_1 и DD_1 также параллельны, поэтому и углы B и D в этих треугольниках равны. Следовательно, треугольники равны по стороне и двум углам. В частности, $AB_2 = CD_2$. Остаётся заметить, что $AA_1B_1B_2$ и $CC_1D_1D_2$ — параллелограммы, у которых противоположные стороны равны (и потому все четыре отрезка AB_2, CD_2, A_1B_1 и C_1D_1 равны). ◁

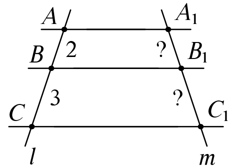
293. Теорема Фалеса показывает, что если точка X равномерно движется по прямой l (то есть покрывает равные расстояния за равные времена), то её тень Y равномерно движется по прямой m. Может ли Y двигаться быстрее X? Медленнее X?



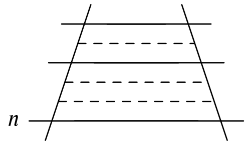
▷ Возможно и то, и другое (см. рисунок). ◁

[1]Фалес — греческий философ, живший в VI веке до н.э.; сочинения его не сохранились, но традиция связывает с его именем некоторые геометрические утверждения. Например, в сочинении римского историка Плутарха «Пир семи мудрецов» один из героев, обращаясь к Фалесу, говорит: «Ты поставил свой посох там, где кончалась тень от пирамиды, так что солнечный луч, касаясь их вершин, образовал два треугольника; и ты показал, что как длина одной тени относится к длине другой тени, так и высота пирамиды к высоте посоха» (перевод М. Л. Гаспарова).

294. Точки A, B, C лежат на прямой l, точки A_1, B_1, C_1 — их тени на m. Точка B делит отрезок AC в отношении 2 : 3. Докажите, что точка B_1 делит отрезок A_1C_1 также в отношении 2 : 3.



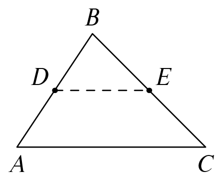
▷ Достаточно разделить отрезок AC на пять равных частей, две из которых составят AB, а три — BC, и провести через точки деления прямые, параллельные прямой n. По теореме Фалеса они высекут на прямой m пять равных отрезков, два из которых составят отрезок A_1B_1, а три — B_1C_1. ◁



295. Если два отрезка на прямой l относятся как 5 : 7, то их тени на прямой m также относятся как 5 : 7.

▷ Отличие этой задачи от предыдущей в том, что отрезки на прямой l не обязательно примыкают друг к другу; они могут быть в разных местах (или даже пересекаться). Но решение остаётся по существу таким же. Разобьём первый отрезок на 5 частей, а второй на 7 — тогда все части будут равными. Проведём через точки деления прямые параллельно прямой n. Эти прямые разобьют тени отрезков на 5 и 7 частей, и по теореме Фалеса все части будут равными. ◁

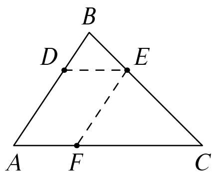
296. Выведите из теоремы Фалеса уже известное нам свойство средней линии треугольника: если в треугольнике ABC из середины D стороны AB провести отрезок, параллельный AC, до пересечения с BC в точке E, то эта точка окажется серединой BC.



▷ Точки B, E и C являются тенями точек B, D и A при проектировании (освещении) вдоль прямой AC. Остаётся применить теорему Фалеса к равным отрезкам AD и DB и заключить, что их тени CE и EB равны. (Тот факт, что точка B является своей собственной тенью, ничему не мешает.) ◁

Теперь легко доказать аналогичное утверждение и не только для середин сторон:

297. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $AD : DB = 2 : 1$. Через точку D проведена прямая, параллельная AC, до пересечения со стороной BC в точке E. Докажите, что стороны треугольника DBE в три раза меньше сторон треугольника ABC.



▷ По условию DB составляет треть стороны AB. То, что E делит сторону BC в отношении $1 : 2$, следует из теоремы Фалеса (как в предыдущей задаче). Поэтому BE составляет треть стороны BC.

Сложнее доказать, что DE составляет треть стороны AC. Для этого мы сделаем дополнительное построение: проведём прямую EF из точки E параллельно стороне AB до пересечения с AC в точке F.

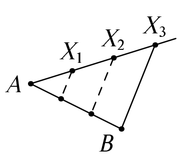
Снова применим теорему Фалеса, но теперь уже вдоль AB. Точки A, F, C являются тенями точек B, E, C, поэтому $AF : FC = BE : EC = 1 : 2$. Значит, AF составляет треть AC. Остаётся заметить, что $ADEF$ — параллелограмм (противоположные стороны параллельны по построению), и потому его стороны DE и AF равны. Значит, и DE составляет треть AC. ◁

Как и в случае средней линии, можно действовать и «в обратном направлении»:

298. На сторонах AB и CB треугольника ABC взяты точки D и E, делящие их в отношении $AD : DB = CE : EB = 2 : 1$. Докажите, что DE параллельно AC.

▷ Если DE не параллельно AC, проведём через D другую прямую, параллельную AC, до пересечения со стороной BC в точке E'. По предыдущей задаче точка E' делит сторону CB в том же отношении $2 : 1$, что и точка E, и потому совпадает с E. ◁

299. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на 3 равные части.



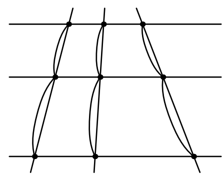
▷ Пусть AB — данный отрезок. Проведем через точку A какой-нибудь луч и отложим на нём с помощью циркуля три равных отрезка AX_1, X_1X_2 и X_2X_3. (Длина этих отрезков может быть любой, важно только, чтобы все они были одной длины.)

Теперь соединим X_3 с точкой B, получится прямая. Проведём параллельные ей прямые через точки X_1 и X_2 (как мы знаем, это можно сделать с помощью циркуля и линейки). Эти прямые по теореме Фалеса разделят отрезок AB на три равные части. ◁

Справедлива общая *теорема Фалеса*: длины отрезков относятся так же, как длины их теней.

Для случая, когда отрезки имеют общую меру (отрезок, укладывающийся в обоих целое число раз), мы это по существу уже доказали в задаче 295. Общее доказательство использует тот факт, что любое число может быть сколь угодно точно приближено дробью с целым числителем и знаменателем.

Возвращаясь к формулировке общей теоремы Фалеса, можно прочитать её так: фиксируем три параллельные прямые и будем пересекать их разными прямыми. На каждой секущей получается два смежных отрезка. Теорема гласит, что отношение этих отрезков не зависит от выбора секущей.



300. Отрезок на прямой l втрое длиннее своей тени. Докажите, что любой другой отрезок на прямой l также втрое длиннее своей тени.

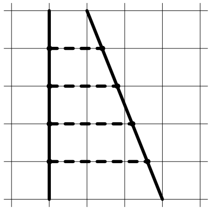
▷ Это следует из общей теоремы Фалеса и свойств пропорций. В самом деле, пусть отрезок втрое длиннее своей тени. Если длину отрезка увеличить в какое-то число раз, то по теореме Фалеса его тень увеличится во столько же раз, и отрезок останется втрое длиннее своей тени. ◁

301. Докажите аналогичное утверждение в общем виде: отношение длины отрезка к длине его тени одно и то же для всех отрезков.

(Разумеется, мы имеем в виду, что две прямые, на которых лежат отрезок и его тень, и направление проектирования фиксированы.)

▷ Пусть отрезки длины a и b имеют тени длиной a' и b'. По теореме Фалеса $a/b = a'/b'$. Теперь воспользуемся свойством пропорций (дробей): умножая это равенство на bb', получим, что

$ab' = a'b$. Теперь, деля на $a'b'$, получаем, что $a/a' = b/b'$. Что и требовалось доказать. ◁



302. На клетчатой бумаге проведена прямая и отмечены её точки пересечения с горизонталями сетки. Докажите, что эти точки идут через равные промежутки.

▷ На вертикальной прямой горизонтали сетки высекают равные отрезки, поэтому по теореме Фалеса они высекают равные отрезки и на любой другой прямой. ◁

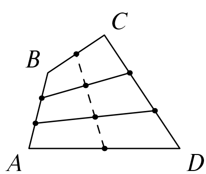
Ещё несколько задач

303. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки D и E, делящие их в отношении $3 : 4$ (так что $AD : DB = 3 : 4$, $CE : EB = 3 : 4$). Докажите, что DE параллельно AC.

304 (Продолжение). Докажите, что длина DE составляет $4/7$ от длины AC.

305. Как разделить отрезок на произвольное заданное число равных частей циркулем и линейкой?

306. Точки A и B движутся произвольным образом по неподвижным параллельным прямым l и m. Где может оказаться середина отрезка AB? (Нарисуйте множество всех возможных её положений.) Где может находиться точка C, делящая отрезок AB в отношении $AC : CD = 2 : 3$?

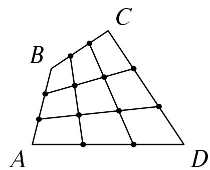


307. Противоположные стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ разделены на три равные части каждая, и точки деления соединены отрезками. Докажите, что середины этих отрезков, а также сторон BC и AD лежат на одной прямой на равных расстояниях друг от друга. ⟨Воспользуйтесь тем, что середины сторон любого четырёхугольника образуют параллелограмм.⟩

Физический смысл этой задачи можно объяснить так. Две машины ехали с постоянными скоростями: одна из A в B, другая из D в C. Они выехали и приехали одновременно. Тогда середина отрезка между машинами также движется равномерно и прямолинейно.

Физики объяснили бы это так: скорость этой точки (середины отрезка) равна полусумме вектров скорости машин и поэтому постоянна. Аналогичным образом можно доказать, скажем, что точка, делящая отрезок между машинами в отношении 1 : 2, тоже движется равномерно (см. следующую задачу, где предлагается дать геометрическое доказательство аналогичного утверждения).

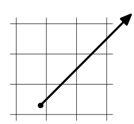
308. Каждая из сторон четырёхугольника $ABCD$ поделена на три равные части, и точки деления соединены отрезками (см. рисунок). Покажите, что каждый из этих отрезков делится другими также на три равные части. ⟨Воспользуйтесь несколько раз предыдущей задачей.⟩



309. По морю плывут два корабля. Каждый двигается по своей прямой со своей (постоянной) скоростью. Как определить, есть ли опасность столкновения? Моряки пользуются таким правилом: если другой корабль кажется неподвижным на фоне далёких берегов, то опасность есть (и надо менять курс или скорость, пока не поздно). Объясните, как это правило следует из (общей) теоремы Фалеса.

310. Точка A равномерно движется по неподвижной прямой l, удалясь от другой (неподвижной) прямой m. Покажите, что расстояние от A до m увеличивается равномерно (то есть за равные промежутки времени увеличивается на одинаковую величину).

311. На клетчатой бумаге нарисован (наклонный) луч. Ползя по этому лучу от его начала, муравей отмечает пересечения с линиями сетки: буквой В для вертикальных и Г для горизонтальных. Например, если он ползёт как на рисунке, под углом в 45°, то получится последовательность ВГ.ВГ.ВГ... (точки разделяют повторяющиеся группы). Мы считаем, что в узлы сетки (где непонятно, какую букву писать) муравей не попадает.



Как должен ползти муравей, чтобы получилась последовательность ВВГ.ВВГ... (и возможно ли это)?

312 (Продолжение). Тот же вопрос для последовательности ВВГГ.ВВГГ...

313 (Продолжение). Тот же вопрос для последовательности ВГВГВГВВГВГВ.ВГВГ... (она соответствует чередованию длинных и коротких месяцев, начиная с января, а также белых и чёрных клавиш, начиная с ноты «фа»).

314 (Продолжение). Докажите, что для любого луча последовательность букв В и Г, записанных муравьём, обладает таким свойством: в двух её участках равной длины количество букв В либо совпадает, либо отличается на единицу.

17. Трапеция

Четырёхугольник, в котором две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией.* (Иногда требуют, чтобы две другие стороны не были бы параллельны, исключая параллелограммы из числа трапеций.) Параллельные друг другу стороны называют *основаниями* трапеции, а две другие — её *боковыми сторонами.*

315. Два из углов трапеции равны 60° и 130°. Что можно сказать о её остальных углах?

$\triangleright$ Углы при боковой стороне трапеции составляют в сумме 180° (как внутренние односторонние). Поэтому в трапеции есть ещё углы $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ и $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Таким образом, все четыре угла найдены. $\triangleleft$

316. Два из углов трапеции равны 60° и 120°. Что можно сказать о её остальных углах?

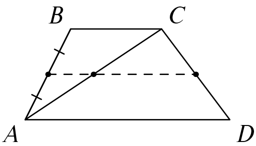
$\triangleright$ Разница с предыдущей задачей в том, что сейчас данные углы составляют в сумме 180° и потому вполне могут быть углами при одной и той же боковой стороне трапеции. Тогда углы при другой стороне трапеции могут быть произвольными, надо только, чтобы в сумме они давали 180°. $\triangleleft$

317. Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен её основаниям.

$\triangleright$ Будем действовать «в обратном направлении»: проведём через середину боковой стороны отрезок, параллельный основанию, и убедимся, что он разделит другую сторону пополам (и тем самым совпадёт с отрезком из условия задачи). Но это — прямое следствие теоремы Фалеса. $\triangleleft$

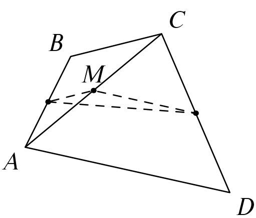
Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называют *средней линией* трапеции.

318. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме её оснований. (Указание. Проведите диагональ трапеции.)



▷ Проведём диагональ AC трапеции $ABCD$. Затем через середину боковой стороны AB проведём прямую, параллельную основаниям трапеции. Она пересечёт диагональ трапеции в её середине (как мы видели в разделе о средней линии треугольника). Далее она пересечёт боковую сторону CD, также в её середине. Тем самым средняя линия трапеции окажется разбитой на два отрезка, один из которых есть средняя линия треугольника ABC, а другой — средняя линия треугольника ACD. Каждый из этих отрезков равен половине соответствующего основания трапеции. ◁

319. Докажите, что в любом четырёхугольнике $ABCD$ расстояние между серединами противоположных сторон AB и CD не превосходит полусуммы $(BC + AD)/2$ и что это неравенство обращается в равенство только для трапеций.



▷ Проведём диагональ AC. Пусть M — её середина. Точка M вместе с серединами сторон AB и CD образует треугольник, одна сторона которого равна половине основания BC (как средняя линия), другая — половине основания AD, а третья — расстояние, о котором идёт речь в задаче. Остаётся воспользоваться неравенством треугольника.

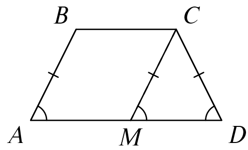
Неравенство треугольника обращается в равенство, если три точки лежат на прямой — но тогда эта прямая будет параллельной и AC, и BD (средняя линия треугольника параллельна основанию), так что в этом случае $ABCD$ будет трапецией. ◁

> Трапецию, в которой боковые стороны равны, но не параллельны, называют *равнобочной*.

Если боковые стороны равны и параллельны, то это будет параллелограмм. Как мы уже говорили, иногда параллелограммы включают в число трапеций — но даже в этом случае их не называют равнобочными трапециями.

320. Докажите, что в равнобочной трапеции углы при основании равны.

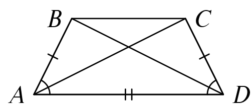
▷ Проведём через вершину C трапеции $ABCD$ прямую, параллельную боковой стороне AB. Она разрежет трапецию на параллелограмм $ABCM$ и треугольник CDM. При этом CM будет равно AB, а угол CMD будут равен углу A трапеции. Если трапеция равнобочная, то треугольник CMD — равнобедренный и углы при его основании равны. Значит, и углы при основании трапеции равны. ◁



321. Докажите, что если в трапеции углы при основании равны, то она равнобочная.

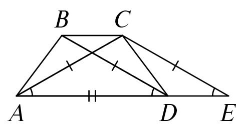
▷ Задача решается с помощью того же дополнительного построения, что и предыдущая: надо только воспользоваться тем, что против равных углов в треугольнике лежат равные стороны. ◁

322. Докажите, что в равнобочной трапеции диагонали равны.



▷ Мы уже знаем, что углы при основании AD равнобочной трапеции $ABCD$ равны, поэтому треугольники ABD и ACD равны по двум сторонам и углу между ними. ◁

323. Докажите, что если диагонали трапеции равны, то она равнобочная.



▷ Эта задача чуть сложнее предыдущей, здесь понадобится дополнительное построение. Проведём прямую CE параллельно диагонали BD до пересечения с основанием в точке E. В параллелограмме $BCED$ противоположные стороны BD и CE равны, поэтому $AC = CE$. В равнобедренном треугольнике ACE углы при основании равны. Они равны также углу BDA (секущая AE пересекает параллельные прямые BD и CE). Остаётся воспользоваться признаком равенства треугольников CAD и BDA по двум сторонам (диагонали равны, сторона AD — общая) и углу между ними. ◁

Ещё несколько задач

324. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах выбраны точки E и F, делящие их в отношении $2:1$ (так что $AE : EB = DF : FC = 2 : 1$). Докажите, что отрезок EF параллелен основаниям трапеции.

325 (Продолжение). Найдите длину отрезка EF, если $AD = a$, $BC = b$.

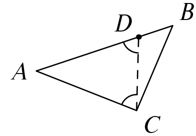
326. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. На его противоположных сторонах AB и CD берут точки P и Q и затем отмечают середину отрезка PQ. Укажите, какие точки будут отмечены, если P и Q выбирать всеми возможными способами. (Как говорят, найдите *геометрическое место* середин отрезков PQ.) ⟨Ответом будет некоторый многоугольник.⟩

18. Простейшие неравенства

327. Докажите, что в треугольнике внешний угол всегда больше внутреннего, с ним не смежного.

▷ В самом деле, внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов. ◁

328. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. (Другими словами, если в треугольнике ABC сторона AB длиннее стороны AC, то угол C больше угла B.)



▷ Отложим на стороне AB отрезок AD, равный AC. В равнобедренном треугольнике ACD углы при основании равны. Остаётся заметить, что эти равные углы меньше угла ACB (угол ACD составляет его часть), но больше угла ABC (в треугольнике BCD угол B внутренний, а угол ADC — внешний, см. предыдущую задачу). ◁

329. Докажите, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. (Другими словами, если в треугольнике ABC угол C больше угла B, то AB длиннее AC.)

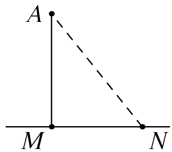
▷ По существу, эта задача уже решена. Мы знаем, что против большей стороны лежит больший угол и что против равных сторон лежат равные углы (свойство равностороннего треугольника). Сравним стороны AB и AC. Могут ли они быть равны? Не могут, так как тогда углы B и C были бы равны. Может ли сторона AC быть длиннее AB? Не может, так как тогда лежащий против неё угол B был бы больше угла C. Остаётся единственная возможность: сторона AB длиннее стороны AC. ◁

Такой способ рассуждения математики называют *доказательством от противного.*

330. Докажите, что в прямоугольном треугольнике самой длинной стороной является гипотенуза, а в тупоугольном — сторона, противолежащая тупому углу.

▷ Прямой (и тем более тупой) угол будет больше других углов треугольника, так как сумма трёх углов равна 180°. ◁

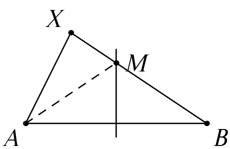
331. Дана прямая l и не лежащая на ней точка A. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, — кратчайшее расстояние от точки A до точек, лежащих на прямой l.



▷ Нам надо сравнить перпендикуляр AM с расстоянием AN от точки A до какой-то другой точки N на прямой l. Но мы уже знаем, что в прямоугольном треугольнике AMN гипотенуза AN длиннее катета AM. ◁

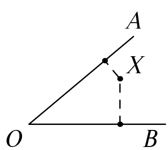
Утверждение предыдущей задачи иногда формулируют так: *перпендикуляр короче наклонной.*

332. Прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Докажите, что точки, находящиеся с одной стороны от этой прямой, ближе к A, чем к B, а с другой стороны — наоборот.



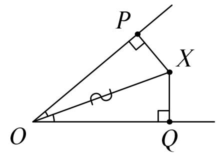
▷ Мы уже видели, что точки на само́м серединном перпендикуляре одинаково удалены от A и от B. Рассмотрим теперь точку X, находящуюся по ту же сторону, что и точка A, соединим её с A и B отрезками и покажем, что $XA < XB$. Отрезок XB пересекает серединный перпендикуляр в некоторой точке M, которая находится на равном расстоянии от A и B: отрезки MA и MB равны. Теперь заметим, что $XB = XM + MB = XM + MA$, а по неравенству треугольника последняя сумма больше XA. Что и требовалось доказать. ◁

Таким образом, если в пустыне есть два колодца A и B, то с одной стороны серединного перпендикуляра живут люди, которым ближе колодец A, а с другой — которым ближе колодец B.

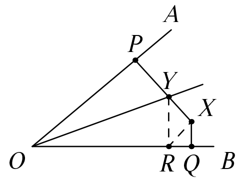


Рассмотрим теперь угол AOB и точку X внутри него. Опустим из X перпендикуляры на стороны угла. Какой из них длиннее? Ответ определяется тем, с какой стороны от биссектрисы угла находится точка X.

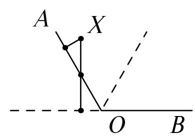
333. Докажите, что если X лежит на биссектрисе, то перпендикуляры равны; если X лежит с той же стороны биссектрисы, что и сторона OB, то короче перпендикуляр, опущенный на OB; если X лежит с другой стороны биссектрисы, короче другой перпендикуляр.



$\triangleright$ Опустим из точки X перпендикуляры XP и XQ на стороны OA и OB данного угла. Если X лежит на биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники OXP и OXQ равны по гипотенузе и острому углу.

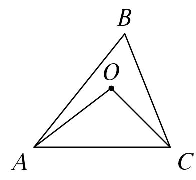


Пусть теперь X не лежит на биссектрисе и, скажем, лежит с той же стороны от неё, что сторона OB. Пусть Y — точка пересечения перпендикуляра XP с биссектрисой. Тогда отрезок YP равен перпендикуляру YR, опущенному из Y на OB. Тогда $XP = XY + YP$ равно $XY + YR$, что больше XR по неравенству треугольника. В свою очередь XR больше XQ, так как перпендикуляр короче наклонной. Что и требовалось доказать. $\triangleleft$



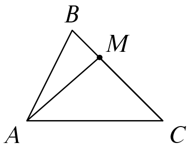
На самом деле в решении не рассмотрен случай, когда угол тупой и один из перпендикуляров падает не на сторону угла, а на её продолжение, как на рисунке. Но в этом случае этот перпендикуляр пересекает другую сторону угла и потому заведомо длиннее, чем другой (который является кратчайшим расстоянием до этой стороны) — даже если не учитывать его кусок под OA.

334. Точка O находится внутри треугольника ABC. Докажите, что сторона AC видна из неё под большим углом, чем из точки B.



$\triangleright$ Сравним треугольники ABC и AOC. Углы A и C второго треугольника меньше соответствующих углов первого. Поскольку сумма углов в обоих треугольниках одна и та же, то угол O в треугольнике AOC будет больше угла B в треугольнике ABC. $\triangleleft$

Ещё несколько задач



335. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что отрезок AM короче хотя бы одной из сторон AB и AC. ⟨Один из углов AMB и AMC — прямой или тупой.⟩

336. На двух сторонах треугольника взято по точке. Докажите, что расстояние между этими точками не превосходит самой длинной стороны треугольника. ⟨Дважды воспользоваться предыдущей задачей.⟩

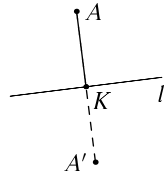
337. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками внутри треугольника не превосходит самой длинной стороны треугольника. ⟨Воспользоваться предыдущей задачей.⟩

338. Внутри треугольника ABC взята точка X. Может ли сумма расстояний $XA + XB + XC$ быть больше периметра треугольника? ⟨Пусть AC — самая длинная сторона треугольника. Покажите, что $XB \leqslant AC$ и $XA + XC \leqslant BA + BC$.⟩

339. На клетчатой бумаге в вершинах клеток размещены колодцы; жители ходят к ближайшему колодцу. Нарисуйте «зону обслуживания» каждого из колодцев.

19. Осевая симметрия

На прозрачном листе, лежащем на столе, нарисована прямая линия. Перевернём лист на другую сторону и положим обратно на стол, вернув линию на место. Это преобразование называют *осевой симметрией*, а прямую, вокруг которой мы поворачивали, называют *осью симметрии.*

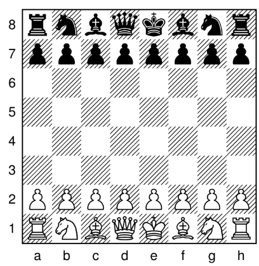


Чтобы построить точку, симметричную точке A относительно прямой l, надо опустить перпендикуляр AK на эту прямую. Точка K при повороте вокруг оси l останется на своём месте, а перпендикуляр наложится на своё продолжение, так что надо отложить на этом продолжении отрезок KA', равный KA. Другими словами, определение симметричной точки можно дать так:

> Говорят, что точка A' *симметрична* точке A *относительно прямой* l, если отрезок AA' перпендикулярен прямой l и делится ею пополам.

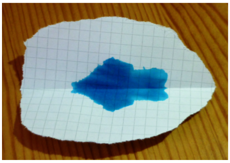
Прямая l в этом случае является серединным перпендикуляром к AA', поэтому любая точка L на этой прямой равноудалена от A и A'. Это не удивительно: при симметрии AL как раз накладывается на $A'L$.

340. Белые и чёрные шахматные фигуры в начальной позиции расположены симметрично друг другу относительно некоторой прямой. Что это за прямая? Какое поле будет симметрично полю e2? полю h5?



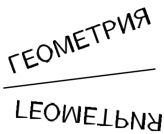
▷ Эта прямая делит доску пополам по горизонтали. Поле e2 симметрично полю e7, а поле h5 симметрично полю h4. ◁

Осевую симметрию можно применять не только к точкам, но и к фигурам: для каждой точки фигуры надо нарисовать симметричную. Фигура называется *симметричной* относительно прямой, если она переходит при симметрии сама в себя (состоит из пар симметричных точек). Такая прямая называется *осью симметрии* фигуры.



Симметричную кляксу легко получить, капнув чернил и сложив бумажку вдвое (см. рисунок, на котором сама бумажка тоже симметрична: края были оборваны, когда она была сложена вдвое).

341. Напишите слово «ГЕОМЕТРИЯ» печатными буквами, а затем постройте симметричную фигуру.



▷ См. рисунок. Он получен автоматически с помощью программы METAPOST (она же использовалась при подготовке большинства рисунков в книге), так что это не вполне честно. Вручную удобно делать это на клетчатой бумаге, а ось симметрии взять горизонтальной или вертикальной. ◁

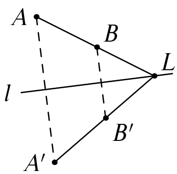
342. Даны точка A и точка A', в которую A переходит при осевой симметрии. Как построить ось симметрии циркулем и линейкой?

▷ Серединный перпендикуляр мы уже строили в задаче 117: можно построить две окружности равных радиусов с центрами в A и A' и соединить точки их пересечения. ◁

Если нужно построить его не циркулем и линейкой, а на листе бумаги, то можно просто согнуть лист пополам, чтобы A совместилась с A' (правда, для этого нужно, чтобы бумага была не очень плотной и можно было бы смотреть на просвет).

343. Докажите, что симметрия сохраняет расстояния: если точки A' и B' симметричны точкам A и B, то расстояния AB и $A'B'$ равны.

▷ Наглядно это совсем понятно: при переворачивании листа вокруг оси симметрии точки A и B совмещаются с точками A' и B', и расстояние между ними не меняется.



Можно доказать это, сославшись на уже известные нам геометрические факты. Продолжим AB до пересечения с осью симметрии l в точке L. По определению l является серединным перпендикуляром к AA'. Значит, точка L, лежащая на этом перпендикуляре, равноудалена от A и A', то есть $AL = A'L$.

Аналогично $BL = B'L$. Значит,

$$AB = AL - BL = A'L - B'L = A'B',$$

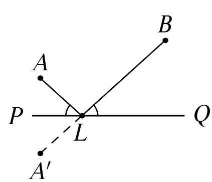
что и требовалось доказать. ◁

344. Докажите, что симметрия сохраняет не только длины сторон треугольника, но и его углы.

▷ Третий признак равенства треугольников гарантирует, что если длины сторон не изменились, то не изменились и углы. ◁

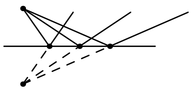
Осевую симметрию часто называют «зеркальной», поскольку симметричная фигура выглядит как отражение в зеркальной поверхности (на рисунке надпись на бумажке отражается в гладкой поверхности круглой пластины, вынутой из «жёсткого диска» компьютера).

Чтобы понять, почему это происходит, надо немного знать физику, но проиллюстрировать это можно следующей задачей:



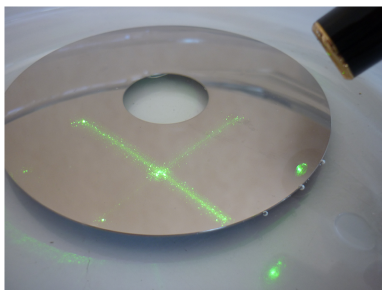
345. Луч света выходит из точки A, отражается от прямой PQ в точке L по закону «угол падения равен углу отражения», и наконец попадает в точку B. Докажите, что точка A', симметричная точке A относительно PQ, лежит на прямой BL (так что наблюдателю в точке B может казаться, что свет идёт из A').

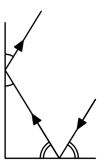
▷ Симметрия сохраняет углы, так что углы, образуемые лучами LA и LA' с осью симметрии, равны: $\angle ALP = \angle A'LP$. Значит, и углы BLQ и $A'LP$ равны, так что лучи LA' и LB продолжают друг друга. ◁



Из этой задачи следует, что если из точки выходят несколько лучей и все они отражаются относительно одной прямой по закону «угол падения равен углу отражения», то отраженные лучи тоже кажутся вышедшими из одной точки (физики говорят, что в этой точке находится «мнимое изображение» — мнимое, потому что реально через эту точку свет не проходит).

Закон «угол падения равен углу отражения» можно наблюдать на фотографии: луч света от лазерной указки отражается от зеркальной поверхности, лежащей на дне плошки с водой (цветную фотографию можно посмотреть в электронной версии книги).





346. На одну из сторон прямого угла падает луч и отражается сначала от неё, а потом от другой стороны (по закону «угол падения равен углу отражения»). Докажите, что после двух отражений луч будет параллелен исходному.

▷ Обозначим равные углы при первом отражении за α, а при втором — за β. Тогда при первом отражении луч поворачивается на $180^\circ - 2\alpha$, а при втором — на $180^\circ - 2\beta$. Нам нужно доказать, что эти углы поворота — смежные односторонние при параллельных прямых, то есть что их сумма равна 180°. Но α и β — острые углы прямоугольного треугольника, так что $\alpha + \beta = 90^\circ$. Поэтому

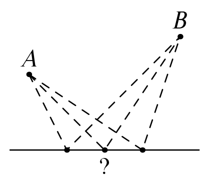
$$(180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = \\ = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

что и требовалось доказать. $\lhd$

При лазерной локации Луны измеряют время, которое нужно лучу света, чтобы достичь поверхности Луны и вернуться обратно. Просто так мощности лазера едва хватает, чтобы зарегистрировать отражённые фотоны. Поэтому на Луну доставили зеркало, отражающее луч света обратно. (Такие эксперименты были в американской лунной программе, а также с советскими «Луноходами», и доставленные на Луну отражатели используют до сих пор.) Но как добиться, чтобы луч света отразился точно обратно? Для этого, следуя предыдущей задаче, используют зеркала, сходящиеся под прямым углом (только их берут три, а не два, так как наш мир трёхмерен). Это устройство называют «уголковым отражателем». (Подробности см. в журнале «Успехи физических наук», 1971, том 103, вып. 1, с. 139–154.)

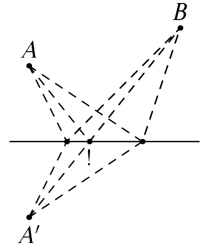
Условие следующей задачи не упоминает симметрию, но в решении она нужна.

347. Турист выходит из точки A и идёт в точку B, находящуюся по ту же сторону от прямого ручья l. По дороге он должен набрать воду из ручья. Каков будет его кратчайший маршрут?



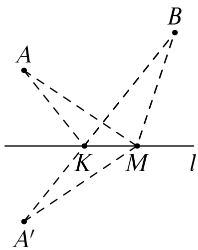
$\rhd$ Сразу же понятно, что оба участка пути (до ручья и после) должны быть прямыми. Вопрос только в том, к какой точке ручья идти. Для выбора этой точки нам поможет такое соображение.

В задаче сказано, что A и B находятся по одну сторону ручья. А что было бы, если бы они были по разные стороны? (Ручей считаем прямым и узким, так что его можно перейти, а шириной пренебречь.) Тогда ответ очевиден: надо просто идти по прямой из одной точки в другую, а в том месте, где мы пересечём ручей, заодно набрать и воду.



Теперь заметим, что если заменить точку A на симметричную точку A', то расстояние на первом участке (до ручья) не изменится, и потому выгодно набирать воду в том же самом месте. Таким образом, чтобы найти наилучший вариант, нужно построить точку A', симметричную A относительно прямой (ручья), и взять точку пересечения отрезка $A'B$ с ручьём. $\triangleleft$

348. Точки A и B находятся по одну сторону от прямой l. Точка A' симметрична точке A относительно прямой l. Отрезок $A'B$ пересекает l в точке K, а точка M лежит на прямой l и не совпадает с K. Докажите, что $AK + KB < AM + MB$.



$\triangleright$ Это та же самая задача, но без «оживляжа» о ручье, туристах и пр. Соответственно изложим и решение. Поскольку l является серединным перпендикуляром к AA', а точки K и M на нём лежат, то $AK = A'K$ и $AM = A'M$. По неравенству треугольника ($A'MB$) имеем

$$A'M + MB > A'B = A'K + KB,$$

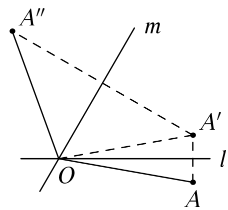
и заменяя слагаемые на равные, получаем

$$AM + MB > AK + KB,$$

что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Эта задача показывает, что путь света, при котором угол падения равен углу отражения, является кратчайшим. Иногда говорят, что свет «выбирает кратчайший путь» из точки в точку. Это звучит глупо — во-первых, когда луч света отражается, он ещё не знает, в какую точку он попадёт, во-вторых, что он, человек, что ли, чтобы выбирать? Тем не менее в физике этот принцип имеет большой смысл, только вместо «кратчайший» надо говорить «быстрейший» — и тогда из него можно вывести законы преломления (как меняется направление луча, когда из одной среды, скажем, воздуха, луч переходит в другую, скажем, воду).

Закон «угол падения равен углу отражения» применим не только к лучам света, но и к бильярдным шарам (в первом приближении: вращение шара вносит поправки). Поэтому в руководствах по бильярду упоминают симметрию: «Чтобы определить точку, в которой шар должен удариться о борт, нужно сначала найти точку X', зеркально отразив положение шара X от борта, через который вы будете бить, а затем из точки X' провести линию до лузы, в которую шар должен попасть. Вы получите точку Y, в которую должен удариться шар, чтобы попасть в лузу»[1]. Другой совет тоже использует симметрию, но отражать нужно лузу, а не шар: «Для отработки ударов с отражением от борта можно использовать воображение, в котором приставить вплотную к длинному борту стола „стол-фантом“. Он должен быть зеркальным отражением настоящего стола. А теперь определите на „столе-фантоме“ воображаемую лузу, в которую вы хотите положить шар, прицельтесь в нее и бейте. Самое удивительное, что реальный шар отразится от борта и пойдет в реальную лузу напротив»[2].



349. Прямые l и m пересекаются в точке O. Произвольную точку A отразили симметрично относительно прямой l, получили точку A'. Затем точку A' отразили симметрично относительно прямой m, получили точку A''. Докажите, что угол AOA'' не зависит от выбора точки A и равен удвоенному углу между прямыми l и m.

$\triangleright$ Угол AOA'' разбивается на четыре части, в которых есть две пары равных частей. Оставляя от каждой пары по одной части, получаем как раз угол между l и m. $\triangleleft$

Иногда утверждение предыдущей задачи выражают словами: композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями — поворот на удвоенный угол между осями.

Ещё несколько задач

350. Как построить точку, симметричную данной, пользуясь только циркулем (но не линейкой)? $\langle$Проведите несколько окружностей с центрами на оси симметрии, проходящих через данную точку.$\rangle$

351. Начинающий шахматист Боря, узнав правила игры, думает: играя чёрными, я могу отвечать

[1] Г. Я. Мисуна. Справочник бильярдиста. М.: АСТ, 2004.

[2] Рекомендации с сайта `http://www.billiardpool.ru/`. Надеемся, что такое поведение шара вас (в отличие от авторов рекомендации) не особенно удивляет.

симметрично ходам противника, и тогда заведомо не проиграю. В чём он не прав?

352. Встаньте перед зеркалом и поднимите левую руку. Какую руку поднимет ваше отражение?

В связи с зеркалами часто задают такой вопрос: почему зеркало меняет местами правое и левое, но не меняет местами верх и низ? Вопрос выглядит безобидно, но попытки на него ответить показывают, что он, можно сказать, философский — чем больше про это думаешь, тем меньше понятно, что спрашивается. (Подумайте про это на досуге. Так ли это, если лечь на пол у зеркала? что сказала бы на эту тему камбала? Можно уточнить слова «меняет правое и левое», сказав, что «движение в пространстве, наилучшим образом совмещающее стоящего перед зеркалом человека с его отражением, совмещает одну его руку с отражением другой», но тогда становится непонятно, в чём же тут вопрос.)

353. Что снято на этой фотографии?

354. .ичадаз йотэ еиволсу етитчорП

355. Какие из русских букв имеют ось симметрии? (Ответ зависит от того, брать ли строчные буквы или прописные, и как их писать. Например, буква $\wedge$ симметрична, а буква Л — нет.)

356. Для каких букв русского алфавита симметричных нет в русском, но есть в латинском алфавите?

357. Какие треугольники имеют ось симметрии? Сколько осей симметрии может быть у треугольника?

358. Сколько осей симметрии может быть у четырёхугольника?

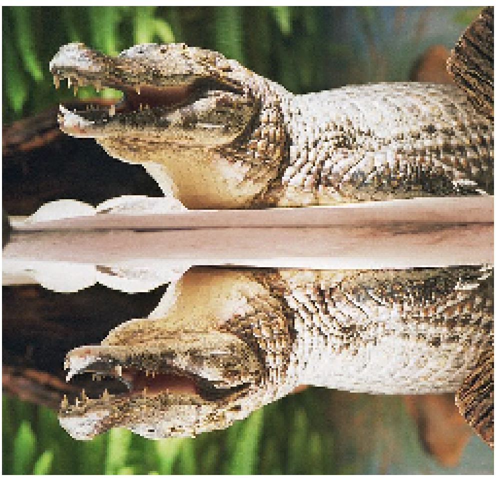
359. Выпуклый пятиугольник имеет ось симметрии. Докажите, что она проходит через одну из его вершин. ⟨При симметрии вершины переходят в вершины.⟩

360. Почему спереди у некоторых машин специального назначения надпись делают зеркальной?

361. В своей книжке «Занимательная физика» замечательный популяризатор науки Я. И. Перельман

(1882–1942, умер от голода в блокадном Ленинграде) пишет: «Оказывается, что и обыкновенным зеркалом не все умеют пользоваться. Сплошь и рядом, желая хорошо осветить себя в зеркале, ставят лампу *позади* себя, чтобы „осветить своё отражение“, вместо того, чтобы осветить самих себя! Многие женщины поступают именно таким образом». Проделайте этот опыт. Чего не учёл Яков Исидорович, критикуя прекрасных дам?

362. На фотографии (сделанной Н. Кайзером в зоопарке Ро́стока и помещённой им в википедии) изображён крокодил (Caiman yacare) и его отражение в воде. Где здесь крокодил, а где отражение? По какому признаку вы это определили? (Здесь воспроизведён лишь кусок фотографии, и он мог быть перевёрнут.)



363. В решении задачи 343 пропущен случай, когда отрезок AB параллелен оси симметрии. Как нужно рассуждать в этом случае?

364. Два прямых шоссе, пересекаясь, делят лес на четыре части — два острых угла и два тупых. Турист поставил палатку в одной из частей, имеющих вид острого угла. Он хочет выйти по очереди сначала на одно шоссе, потом на другое, а потом вернуться в палатку. Как ему идти, чтобы путь был как можно короче? А что будет, если он поставил палатку внутри тупого угла?

365. Точки A и B находятся по разные стороны от прямой l. Как найти на прямой l точку K, для которой расстояния AK и BK отличаются как можно меньше? как можно больше?

366. Может ли фигура иметь ровно пять осей симметрии?

367. Может ли фигура иметь ровно две оси симметрии, параллельные друг другу?

368. Бывают ли другие углы (кроме прямого), которые обладают описанным в задаче 346 свойством: вошедший в них луч после нескольких отражений обязательно выходит в направлении, параллельном исходному?

369. Луч входит в угол в 13° с зеркальными стенками и далее отражается от них по закону отражения. Может ли он там застрять (отражаться бесконечно много раз, так и не выйдя)? Если нет, то какое максимальное число отражений возможно?

370. Прямые l и m параллельны. Точку A отразили симметрично относительно прямой l, получив точку A'. Затем точку A' отразили симметрично относительно прямой m, получив точку A''. Докажите, что расстояние между точками A и A'' не зависит от выбора точки A (в частности, не зависит от того, с какой стороны от прямых она лежит).

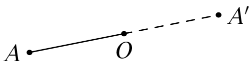
371. Луч света падает на прямую в точке O и отражается от неё по закону «угол падения равен углу отражения». На какой угол повернётся отражённый луч, если прямую повернуть на угол α?

372. Двое по очереди ставят слонов одного цвета на шахматную доску. Тот, кто поставит слона под бой уже стоявших на доске слонов, проигрывает. Придумайте, как надо играть второму игроку, чтобы гарантированно выиграть. ⟨Эта задача не случайно попала в раздел об осевой симметрии.⟩

373. На плоскости нарисованы три точки, являющиеся вершинами треугольника. Где можно поставить четвёртую точку, чтобы получившаяся фигура имела ось симметрии? (Вариантов положения четвёртой точки может быть несколько; это зависит от расположения исходных точек, так что надо разбирать несколько случаев.)

20. Центральная симметрия

Точки A и A' называют *симметричными относительно точки* O (которую называют *центром симметрии*), если O является серединой отрезка AA'.



374. Даны точка A и центр симметрии O. Как построить точку A', симметричную A относительно O, с помощью циркуля и линейки?

▷ Провести по линейке прямую через A и O, а затем циркулем отложить отрезок, равный AO, по другую сторону от O. ◁

375. На рисунке были изображены точки A и A', центрально-симметричные друг другу относительно точки O. Затем точку O стёрли, а точки A и A' остались. Как восстановить положение точки O?

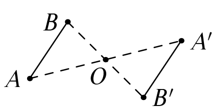
▷ Построить середину отрезка AA'. ◁

Применяя центральную симметрию ко всем точкам фигуры, мы получаем *центрально-симметричную* ей фигуру. Если она совпадает с исходной, то говорят, что фигура *имеет центр симметрии.*

376. Напишите печатными буквами слово ГЕОМЕТРИЯ, а затем нарисуйте симметричную фигуру (относительно какой-либо точки).

▷ См. рисунок. ◁

Центральную симметрию можно описать как поворот на 180° относительно центра симметрии: отрезок OA поворачивается на 180° и превращается в OA'.



377. Докажите, что центральная симметрия не меняет расстояний: если точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно точки O, то расстояния AB и $A'B'$ равны.

▷ Как и с осевой симметрией, это не вызывает сомнения: при повороте бумаги вокруг точки O расстояния не меняются, а отрезок AB переходит в $A'B'$. Но можно доказать это и с помощью признака равенства треугольников: треугольники AOB и $A'OB'$ равны по двум сторонам ($OA = OA'$, $OB = OB'$) и углу между ними (вертикальные углы равны). ◁

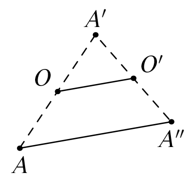
Как и в случае с осевой симметрией, из сохранения расстояний следует сохранение углов: в треугольниках, равных по трём сторонам, равны и углы.

378. У каких букв русского алфавита есть центр симметрии?

379. Докажите, что параллелограмм всегда имеет центр симметрии.

▷ В самом деле, диагонали параллелограмма делятся пополам точкой пересечения, значит, каждая его вершина переходит в противоположную. ◁

380. Точку A подвергли центральной симметрии с центром в точке O, получилась точка A'. Затем точку A' подвергли центральной симметрии с центром в другой точке O', получилась точка A''. Найдите расстояние между A и A'', если расстояние между O и O' равно a.



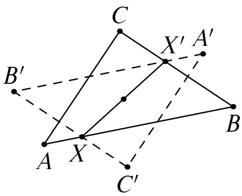
▷ Расстояние между O и O' вдвое меньше расстояния между A и A', так как OO' является средней линией треугольника $AA'A''$. Ответ: $2a$. ◁

Иногда центральная симметрия помогает в решении задач на построение (даже если в условии и не упоминается):

381. Дан треугольник ABC и точка O внутри него. Постройте отрезок с серединой в точке O, концы которого лежат на границе треугольника ABC. Какое максимальное количество решений может иметь эта задача?

▷ Нам надо найти точку X на границе треугольника, для которой симметричная ей (относительно O) точка X' также оказывается на границе треугольника.

Для этого спросим себя: а где вообще может быть X', симметричная точке X на границе тре-



угольника ABC? В такой форме ответ ясен: на границе симметричного треугольника $A'B'C'$ (точки A', B', C' симметричны точкам A, B, C относительно точки O). Значит, нужно построить этот симметричный треугольник и взять в качестве X' одну из точек его пересечения с исходным. Таких точек пересечения максимум 6, они группируются в три пары, значит, задача может иметь максимум три решения. $\triangleleft$

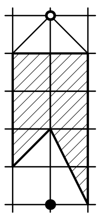
Ещё несколько задач

382. Какое поле симметрично полю e2 относительно центра шахматной доски?

383. На плоскости нарисованы три точки, являющиеся вершинами треугольника. Где можно поставить четвёртую точку, чтобы получившаяся фигура имела центр симметрии? Укажите все варианты. Сколько их?

384. Закончите предложение: «Чтобы достроить треугольник до параллелограмма, надо добавить к нему треугольник, симметричный относительно...».

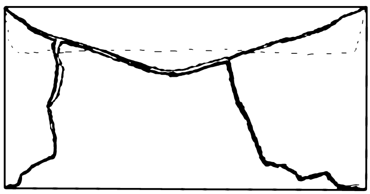
385. Может ли выпуклый пятиугольник (все углы меньше развёрнутого) иметь центр симметрии?

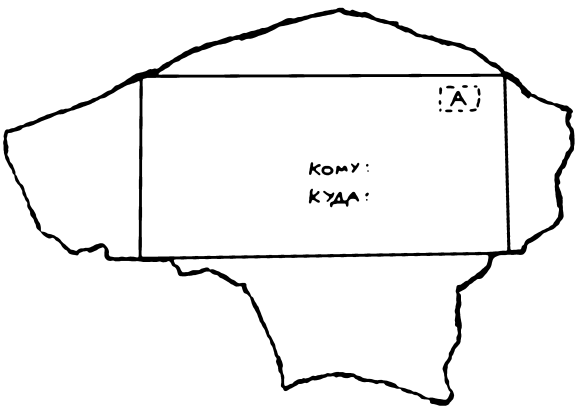


386. Флажок имеет показанную на рисунке форму и вешается на гвоздик за середину привязанной к нему верёвки; верхний край флажка горизонтален. Нарисуйте, в какую часть стены нужно вбивать гвоздик, чтобы флажок закрыл пятно на стене. (Пятно считайте точкой.)

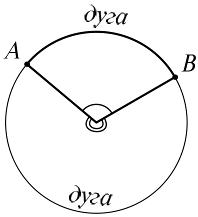
387. Двое игроков по очереди кладут одинаковые монеты на прямоугольный стол. Касаться уже лежащих монет или сдвигать их нельзя. Кто не может положить монету (так, чтобы она не упала со стола), проигрывает. Как должен играть первый игрок, чтобы гарантировать себе выигрыш? ⟨Вначале он должен положить монету точно в центр стола, далее см. название раздела.⟩

388. Разорвём оборотную сторону конверта и развернём его на плоскость, получится фигура с неровными краями. Покажите, что копиями такой фигуры можно замостить плоскость.





21. Углы в окружности



Если разрезать окружность в каких-то двух точках A и B, то она распадётся на две *дуги.* И ту, и другую называют «дуга AB» (если из контекста не ясно, какая из двух дуг имеется в виду, то выбирают точку C на дуге и говорят «дуга ACB»).

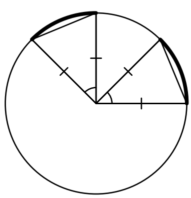
Соединяя центр окружности с концами дуги, получаем *центральный угол*, ей соответствующий. Величину этого угла называют *величиной дуги.* Величина дуги (как и величина соответствующего угла) измеряется в градусах.

Более точно было бы говорить «угловая величина дуги», поскольку дуга данной величины может быть и в маленькой, и в большой окружности, и нормальный человек (не математик) вряд ли скажет, что эти дуги «одной величины».

Рассмотрим две дуги, на которые точки A и B разбивают окружность. Два соответствующих центральных угла в сумме составляют 360°, так что нам нужны углы, бо́льшие развёрнутого (см. обсуждение на с. 12). Избежать этого можно, изменив формулировки: величину дуги, большей полуокружности, можно определить как 360° минус центральный угол другой дуги.

Отметим следующее свойство дуг, которое сразу же следует из определения: если дуга ACB разбита точкой C на две дуги AC и CB, то величина дуги ACB равна сумме величин дуг AC и CB.

(В самом деле, соответствующий центральный угол тоже разбивается на две части.)



389. Докажите, что если две дуги одной окружности имеют равные величины, то стягивающие их хорды равны.

▷ Соединив концы хорд с центром окружности, получим два треугольника, которые равны по двум сторонам (радиусам) и углу между ними. ◁

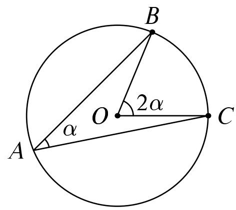
(То же самое можно сказать и про две дуги одной величины в двух окружностях равных радиусов.)

Можно ли сказать, что верно обратное: если равны хорды, то равны стягивающие их дуги? Не совсем: одна хорда стягивает две разные дуги, так что надо быть аккуратнее.

390. Окружность разбита пятью точками на пять дуг одинаковой величины. Найдите величину каждой из них.

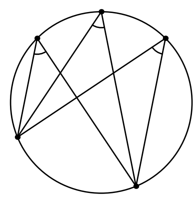
▷ На все дуги вместе приходится 360°, поэтому каждая из них равна $360°/5 = 72°$. ◁

(Теорема о вписанном угле) Пусть A, B и C — точки окружности с центром O. Тогда угол BAC равен половине величины дуги BC, то есть половине угла BOC.



Угол BAC называют *вписанным углом, опирающимся на дугу BC*. Тогда можно сказать так: *вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.*

391. Выведите из теоремы о вписанном угле, что все отмеченные на рисунке углы (опирающиеся на одну и ту же дугу) равны.

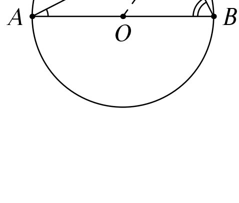


▷ Все они равны половине соответствующего центрального угла. ◁

Как доказывается теорема о вписанном угле? Для начала в следующих двух задачах разберём частные случаи теоремы о вписанном угле, когда одна из сторон треугольника ABC является диаметром окружности.

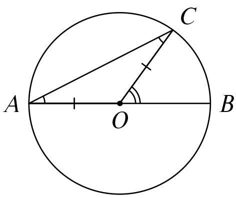
392. Если AB — диаметр окружности, а C — произвольная её точка, то угол ACB — прямой. (а) Выведите это утверждение из теоремы о вписанном угле. (б) Докажите его, не ссылаясь на эту теорему.

▷ (а) Угол ACB опирается на дугу, составляющую половину окружности. Соответствующий центральный угол будет развёрнутым, и его величина равна 180°. Поэтому вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен половине от 180°, то есть 90°.



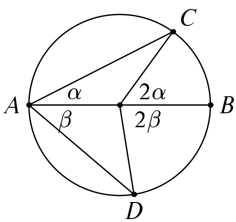
(б) Соединим точку C с центром окружности O (серединой диаметра AB). Получатся два равнобедренных треугольника AOC и COB. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, поэтому угол ACB (равный $\angle ACO + \angle OCB$) равен сумме углов A и B треугольника ABC. А если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то он прямой (так как сумма углов треугольника равна 180°). ◁

393. Если AB — диаметр окружности с центром в O, а C — произвольная точка окружности, то угол COB вдвое больше угла CAB. (а) Выведите это утверждение из теоремы о вписанном угле. (б) Докажите его, не ссылаясь на эту теорему.



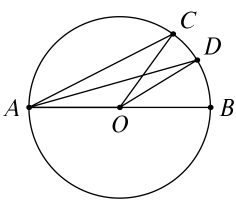
▷ (а) В самом деле, согласно этой теореме угол $\angle CAB$ равен половине величины дуги BC, то есть половине соответствующего ей центрального угла COB.

(б) Треугольник AOC — равнобедренный, поэтому углы при его основании равны. Значит, его внешний угол COB (равный сумме двух углов при основании) вдвое больше каждого из них. ◁



Решив предыдущую задачу, мы тем самым доказали теорему о вписанном угле для случая, когда одна из сторон этого угла является диаметром. Оказывается, общий случай легко сводится к этому частному. Пусть $\angle CAD$ — произвольный вписанный угол.

Проведём через его вершину диаметр. Этот диаметр разделит угол и соответствующую ему дугу на две части. Каждая из частей угла имеет своей стороной диаметр, и потому (по предыдущей задаче) равна половине дуги, на которую опирается. Значит, и весь угол равен половине дуги, на которую опирается. Теорема о вписанном угле доказана.

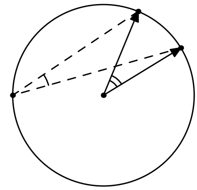


Внимательный читатель заметил, вероятно, что мы не рассмотрели случай, когда стороны вписанного угла лежат по одну сторону от диаметра, проведённого через его вершину (см. рисунок). Этот случай рассматривается аналогично, только надо не складывать углы, а вычитать:

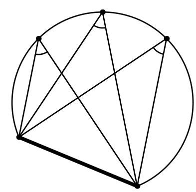
$$\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = \tfrac{1}{2}\angle COB - \tfrac{1}{2}\angle DOB =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\angle COB - \angle DOB) = \tfrac{1}{2}\angle COD.$$

394. Минутная стрелка часов движется по окружности циферблата. Паук смотрит на её конец, сидя в некоторой точке той же окружности. На какой угол поворачивается конец стрелки за минуту с его точки зрения?



▷ За минуту стрелка проходит дугу в $360/60 = 6^\circ$ градусов. Вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен $6/2 = 3^\circ$. Поэтому с точки зрения паука конец стрелки смещается на 3° в минуту. Другими словами, равномерное движение точки по окружности остаётся равномерным, если смотреть не из центра, а из какой-то точки окружности, только угловая скорость вдвое меньше. ◁

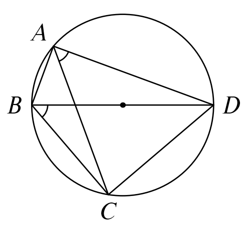


Теорему о вписанном угле можно ещё проиллюстрировать так: если мы хотим от одного конца длинного дома пройти к другому концу и при этом видеть дом всё время под одним углом, то нужно двигаться по дуге окружности.

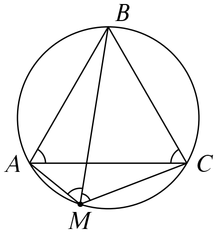
Аккуратная формулировка теоремы о вписанном угле требует некоторых уточнений. Во-первых, мы говорили о «дуге BC», в то время как таких дуг две, и нужно сказать, какую из них взять. Имеется в виду та, которая лежит внутри угла BAC (что соответствует интуитивному пониманию слов «опираться на дугу»).

Во-вторых, чтобы наша формулировка была правильной, надо рассматривать дуги, большие 180°. Этого можно избежать, но тогда формулировка теоремы о вписанном угле становится более сложной: *если вписанный угол острый, то он равен половине угла между радиусами, а если тупой, то дополняет её до* 180°.

395. В четырёхугольнике $ABCD$ два противоположных угла A и C прямые. Докажите, что угол CBD равен углу CAD.

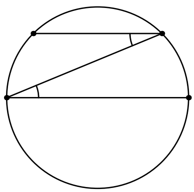


▷ Диагональ BD разрезает четырёхугольник на два прямоугольных треугольника. Построим окружность, у которой эта диагональ будет диаметром. Эта окружность пройдет через вершины четырёхугольника (вспомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине). Остаётся применить теорему о вписанном угле. ◁



396. Вершины равностороннего треугольника лежат на окружности. Докажите, что из любой точки окружности одна из сторон треугольника видна под углом 120°, а две другие — под углом 60°.

▷ Все углы равностороннего треугольника равны 60°, поэтому дуги, на которые они опираются, равны 120°. Поэтому углы AMB и BMC на рисунке также равны 60°, а AMC равен 120°. ◁



397. Если две хорды одной окружности параллельны, то заключённые между ними дуги равны по величине.

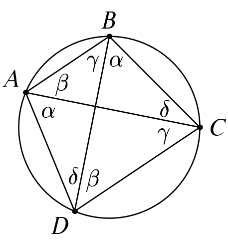
▷ Соединим противоположные концы хорд отрезком, получим два равных накрест лежащих угла. Значит, дуги окружности, на которые они опираются, равны. ◁

398. Докажите, что если окружность проходит через все четыре вершины трапеции, то боковые стороны трапеции равны (трапеция равнобочная).

▷ По предыдущей задаче дуги, заключённые между основаниями трапеции, равны. Следовательно (задача 389), стягивающие их хорды, то есть боковые стороны трапеции, равны. ◁

399. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Докажите, что сумма двух его противоположных углов (A и C, а также B и D) равна 180°.

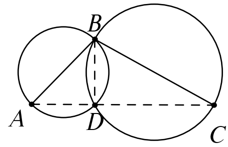
▷ Эти противоположные углы опираются на взаимно дополнительные дуги, составляющие вместе целую окружность, то есть 360°. Значит, сумма углов равна половине от 360°, то есть 180°. ◁



400. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Проведены диагонали AC и BD. Укажите четыре пары равных углов, вершины которых лежат на окружности.

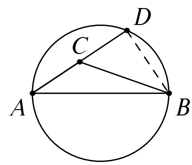
▷ См. рисунок, где одинаково обозначены равные углы, опирающиеся на общую дугу. ◁

401. Отрезки AB и BC — диаметры двух окружностей, пересекающихся в двух точках (одна из которых B). Докажите, что другая точка пересечения лежит на прямой AC.

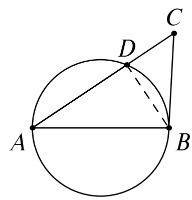


▷ Пусть D — другая точка пересечения. Угол BDA опирается на диаметр окружности и потому прямой. Аналогичным образом угол BDC — прямой. Значит, отрезки AD и DC составляют развёрнутый угол, то есть продолжают друг друга, то есть точка D лежит на прямой AC. ◁

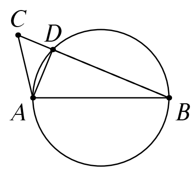
402. Мы видели, что из любой точки окружности её диаметр виден под прямым углом. Докажите, что из точек внутри окружности он виден под тупым углом, а из точек вне окружности — под острым.



▷ Пусть AB — диаметр, а C — точка внутри окружности. Докажем, что угол ACB тупой. Продолжим AC до пересечения с окружностью в точке D. Угол ADB будет прямым, а угол ACB будет внешним углом прямоугольного треугольника, смежным к его острому углу, и потому тупым.

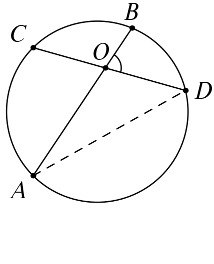


Если же C лежит вне окружности и отрезок AC пересекает окружность в точке D, то угол ADB будет прямым, а угол C будет острым углом прямоугольного треугольника CDB.



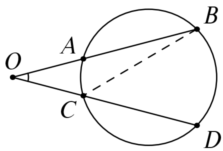
Может случиться, правда, что AC не пересекает окружность вовсе, но тогда надо поменять ролями точки A и B, рассмотрев точку пересечения отрезка BC с окружностью. ◁

403. Докажите, что угол между двумя пересекающимися хордами AB и CD равен полусумме дуг BD и AC (заключённых внутри этого угла и вертикального к нему).



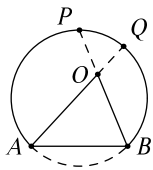
▷ Обозначим через O точку пересечения хорд. Проведём хорду AD. Интересующий нас угол является внешним углом треугольника AOD и потому равен сумме двух не смежных с ним углов этого треугольника. Оба этих угла — вписанные, один равен половине дуги AC, а другой — половине дуги BD. ◁

404. Угол β между продолжениями двух непересекающихся хорд AB и CD равен половине разности величин дуг BD и AC.

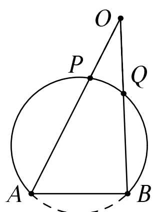


▷ Обозначим через O точку пересечения продолжений хорд. Проведём хорду BC. В треугольнике OBC сумма угла β и вписанного угла ABC равна внешнему углу BCD, поэтому угол β равен разности этих двух углов, то есть полуразности соответствующих дуг. ◁

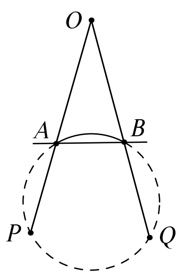
405. Прямая пересекает окружность в точках A и B и делит круг на две части (называемые *сегментами*). Рассмотрим один из них, ограниченный хордой AB и дугой окружности. Теорема о вписанном угле говорит, что из всех точек этой дуги хорда AB видна под одним и тем же углом. Докажите, что из всех внутренних точек сегмента хорда AB видна под бóльшим углом, а из точек, лежащих вне окружности (но с той же стороны от прямой) — под меньшим.



▷ Для прямого угла мы эту задачу уже решали, и сейчас мы будем действовать тем же способом, только для краткости сошлёмся на две предыдущие задачи. Нам нужно доказать, что угол AOB больше половины дуги AB (имеется в виду дуга, лежащая с другой стороны от прямой). В самом деле, по задаче 403 этот угол равен полусумме дуг AB и PQ на рисунке.



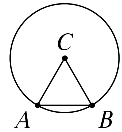
Аналогичным образом, если точка O лежит вне сегмента, то угол AOB равен полуразности дуг AB и PQ (задача 404) и потому меньше половины дуги AB. ◁

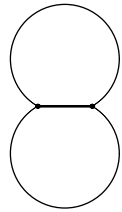


На самом деле возможны и другие случаи расположения точки O вне сегмента, но во всех случаях угол AOB оказывается меньше половины интересующей нас дуги. Например, в показанном на рисунке случае угол AOB равен полуразности PQ и верхней из двух дуг с концами A и B, и уменьшаемое (дуга PQ) меньше дуги $APQB$.

406. Даны две точки A и B. Нарисуйте, где находятся точки C, из которых отрезок AB виден под углом 30°.

▷ Построим правильный треугольник ABC со стороной AB и окружность с центром в точке C, проходящую через точки A и B. Дуга AB этой окружности видна из центра под углом 60°, и потому из точек окружности (лежащих по ту же сторону от AB, что и точка C) отрезок виден под углом 30°. То же относится и к симметричной дуге окружности по другую сторону от AB. Получаем фигуру из двух дуг окружностей, из любой точки которой отрезок AB виден под углом 30°. Как показывает предыдущая задача, из точек внутри этой фигуры отрезок AB виден под бо́льшим углом, а из точек вне её — под меньшим. ◁





Ещё несколько задач

407. Окружность разделена на пять равных дуг, и соседние точки деления соединены отрезками. Докажите, что в полученном пятиугольнике все стороны и углы равны. (Такие многоугольники называются *правильными*.)

408. Нарисуйте на плоскости шесть точек таким образом, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника. ⟨См. предыдущую задачу.⟩

409. Вершины треугольника лежат на окружности, радиус которой равен одной из сторон треугольника. Каким может быть угол треугольника, противолежащий этой стороне? (Есть два варианта.)

410. Даны две точки A и B. Нарисуйте, где может находиться точка C, если известно, что треугольник ABC прямоугольный (но не сказано, какой именно из его углов прямой).

411. Величина дуги AB равна α. Найдите угол BAO, если O — центр окружности.

412. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены окружности. Все четыре окружности имеют общую точку. Докажите, что диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

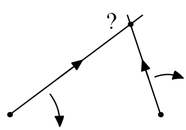
413. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены круги. Докажите, что они покрывают весь четырёхугольник. ⟨Если точка останется непокрытой, то каждая сторона четырёхугольника будет видна из неё под острым углом.⟩

414. Окружность разделена четырьмя точками на четыре дуги. Середины этих дуг являются вершинами четырёхугольника. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника перпендикулярны.

415. Дан остроугольный треугольник. Как с помощью циркуля и линейки найти точку, из которой все стороны треугольника видны под углом 120°?

416. На сторонах остроугольного треугольника ABC построены равносторонние треугольники AKB, BLC и CMA (вершины всех треугольников перечисляются по часовой стрелке), и около них описаны окружности. (Это значит, что вершины каждого из трёх равносторонних треугольников лежат на соответствующей окружности.) Покажите, что эти три окружности проходят через одну точку. ⟨См. предыдущую задачу.⟩

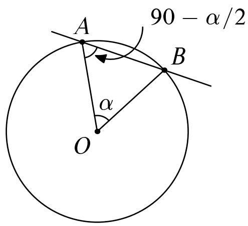
417. На сторонах остроугольного треугольника ABC построены равносторонние треугольники AKB, BLC и CMA (вершины всех треугольников перечисляются по часовой стрелке). Покажите, что отрезки AL, BM и CK проходят через одну точку и пересекаются в ней под углами 60°.



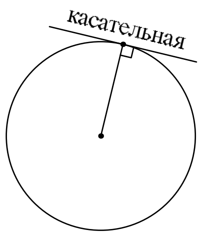
418. Два прожектора равномерно вращаются по часовой стрелке с одинаковой скоростью: за секунду каждый из них поворачивается на 1°. По какой траектории движется точка пересечения лучей этих прожекторов? [Ответ: По дуге окружности.]

419. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и BL, пересекающиеся в точке O. Докажите, что (а) точки A, B, K, L лежат на одной окружности; (б) точки O, K, L, C лежат на одной окружности; (в) углы BAK, BLK и OCK равны; (г) CO при продолжении пересекает AB под прямым углом; (д) в остроугольном треугольнике три высоты проходят через одну точку; (е) в треугольнике, вершинами которого являются основания высот, сами эти высоты служат биссектрисами; (ё) прямая, соединяющая середины отрезков AB и OC, перпендикулярна отрезку KL и делит его пополам.

22. Касательные



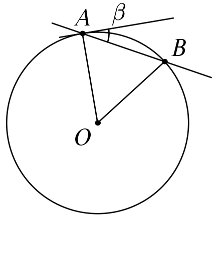
Пусть A — точка окружности, OA — ведущий в неё радиус. Возьмём на окружности другую точку B. Если величина дуги AB равна α, то угол OAB равен $90 - \frac{\alpha}{2}$ (поскольку сумма углов в равнобедренном треугольнике OAB равна $180°$). Когда дуга AB уменьшается и стягивается в точку, угол α стремится к нулю, угол OAB становится прямым, а секущая AB превращается в касательную, что приводит к такому определению:



> *Касательной* к окружности называют прямую, проведённую через какую-либо точку окружности (называемую *точкой касания*) перпендикулярно к радиусу, проведённому в точку касания.

Из сказанного нами следует, что касательная имеет единственную точку пересечения с окружностью. Если бы их было две, как на рисунке (точки A и B), то в равнобедренном треугольнике OAB углы при основании были бы острыми, а не прямыми. Касательная является единственной прямой, проходящей через данную точку окружности и не имеющей других пересечений с окружностью. (В следующей задаче уточняется, где будет вторая точка пересечения, если касательную повернуть на угол β.) Поэтому во многих учебниках касательную к окружности так и определяют — как прямую, имеющую одну общую точку с окружностью.

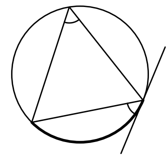
420. Касательную к окружности повернули на угол β вокруг точки касания, отчего она стала секущей. Найдите величину дуги, которую она отсекает.



▷ Пусть OA — радиус, проведённый в точку касания, AB — секущая. Касательная перпендикулярна радиусу, поэтому угол OAB между радиусом и секущей равен $90° - \beta$. Треугольник OAB равнобедренный, поэтому второй угол в нём также равен $90° - \beta$, а третий угол (с вершиной в центре окружности) равен 2β. Таким образом, повёрнутая на угол β касательная отсекает дугу величины 2β. ◁

Утверждение предыдущей задачи можно сформулировать так: угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен половине дуги, отсекаемой хордой.

421. Нарисована окружность, треугольник с вершинами на этой окружности и прямая, касающаяся окружности в одной из вершин треугольника. Укажите на этом рисунке две пары равных углов.

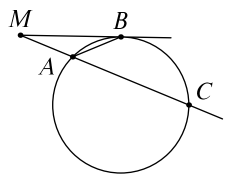


▷ См. рисунок: оба отмеченных угла равны половине отмеченной дуги. Аналогично находим ещё одну пару равных углов. ◁

422. Прямая касается окружности. Докажите, что точка касания — ближайшая к центру окружности точка прямой.

▷ Эта задачу мы по существу уже решали (перпендикуляр короче наклонной, задача 331 на с. 96). ◁

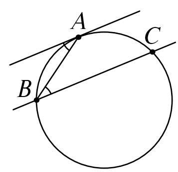
423. Докажите, что угол BMA между касательной MB и секущей MAC равен половине разности дуг BC и AB.



▷ В треугольнике MBA угол M равен разности внешнего угла BAC (который есть половина дуги BC, так как на неё опирается) и угла MBA (который есть угол между касательной и хордой и равен половине дуги AB). ◁

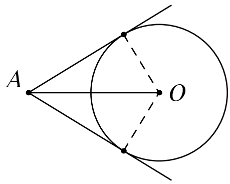
Эта задача является предельным случаем задачи 404, если условно считать, что касательная есть секущая, пересекающая окружность в двух бесконечно близких точках.

424. Касательная к окружности в точке A и хорда BC параллельны. Докажите, что дуги AB и AC равны.



▷ Соединим точку касания с одним из концов хорды, например, с B. Тогда внутренние накрест лежащие углы (отмеченные на рисунке) будут равны. Один из них равен половине дуги AC (как вписанный угол, на неё опирающийся), а другой равен половине дуги AB (как угол между касательной и хордой). ◁

425. Из точки A проведены две касательные к окружности. Докажите, что их отрезки от точки A до точек касания равны.

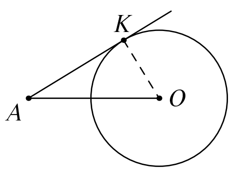


▷ Соединим центр окружности с точками касания. Получится два прямоугольных треугольника, в которых гипотенуза общая, а катеты равны (как радиусы окружности). Поэтому и другие катеты, то есть интересующие нас отрезки, тоже равны. ◁

426. Дана окружность и точка вне неё. Проведите через точку касательную к окружности, пользуясь циркулем и линейкой.

Первая реакция любого нормального человека: а циркуль-то зачем?! Приложим линейку так, чтобы она проходила через заданную точку и касалась заданной окружности, — вот и всё!

Тем не менее мы обязаны ограничиваться разрешёнными операциями с циркулем и линейкой: прямую можно проводить через две уже построенные точки, поэтому сначала надо построить точку касания. Покажем, как это сделать (мы приведём два разных способа).



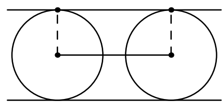
▷ Первый способ. Предположим, что прямая уже построена, и соединим точку касания K с центром окружности O. Получится прямоугольный треугольник AOK (угол K прямой, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной). В этом треугольнике нам известны гипотенуза AO и катет OK (заранее, до построения касательной). Поэтому мы можем построить в сторонке треугольник, равный AOK (см. задачу 168, с. 57), и тем самым найти расстояние AK. Остаётся провести окружность с центром в A и радиусом AK — она пересечёт заданную окружность как раз в точках касания.

Другой способ состоит в следующем: так как треугольник AKO прямоугольный, то точка K лежит на окружности, построенной на AO как на диаметре. Остаётся пересечь эту окружность с заданной. ◁

427. Даны две точки. Постройте прямую, проходящую через первую точку и отстоящую от второй точки на заданное расстояние.

▷ Эта задача по существу является переформулировкой задачи о построении касательной. Ведь сказать «прямая l отстоит из точки A на расстояние r» — это всё равно что сказать «прямая l касается окружности с центром в A радиуса r». ◁

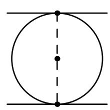
428. Докажите, что общие внешние касательные к двум окружностям равного радиуса параллельны друг другу и линии центров (прямой, проходящей через центры окружностей). (Прямая называется *общей внешней касательной* к двум окружностям, если они её касаются и лежат с одной стороны от неё.)



▷ Докажем, что общая касательная параллельна линии центров. Соединим центры с точками касания. Полученные отрезки равны (как радиусы равных окружностей) и параллельны (как перпендикуляры к общей касательной). Значит, они являются противоположными сторонами параллелограмма, и две другие его стороны тоже параллельны. ◁

Наглядный смысл этой задачи: если поставить шкаф с плоским дном на круглые катки одинакового радиуса, то он будет стоят горизонтально. (Так делают, когда надо передвигать тяжёлые предметы по ровному полу: освободившиеся с одной стороны катки подкладывают с другой.)

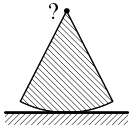
429. Две параллельные прямые касаются двух окружностей. Докажите, что радиусы окружностей равны.



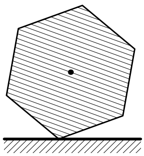
▷ Докажем, что радиус окружности, касающейся двух параллельных прямых, равен половине расстояния между ними (определяемого, напомним, как длина общего перпендикуляра). В самом деле, отрезки, соединяющие центр окружности с точками касания, продолжают друг друга (как перпендикуляры к параллельным прямым) и соединяются в общий перпендикуляр к двум прямым, являющийся диаметром окружности. ◁

Ещё несколько задач

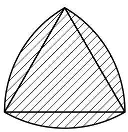
430. Шесть касательных к окружности образуют шестиугольник со сторонами (в порядке обхода по часовой стрелке) a, b, c, d, e, f. Как найти f, если известны a, b, c, d, e?



431. Круговой *сектор* (часть круга, ограниченную дугой окружности и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром окружности) перекатывают туда-сюда (так что он касается прямой разными точками дуги). По какой траектории движется центр этого сектора?



432. По какой траектории движется центр шестиугольного колеса (см. рисунок), катящегося по прямой?



Оказывается, что катки не обязательно должны быть круглыми, чтобы шкаф катился ровно. Немецкий инженер Рело в конце XIX века заметил, что катки в форме правильного треугольника с выпуклыми боками тоже годятся.

433. *Треугольник Рело* получится, если взять правильный треугольник ABC и провести дуги BC, AC, AB (с центрами в A, B, C соответственно). Покажите, что он является *кривой постоянной ширины*: если зажать его между двумя параллельными прямыми, то расстояние между ними будет одно и то же, как его ни поворачивай. Чему равно это расстояние?

Инженер сказал бы, что при измерении диаметра треугольника Рело штангенциркулем (которым обычно измеряют диаметры свёрл, винтов и пр.) результат не зависит от того, в каком направлении мы мерим.

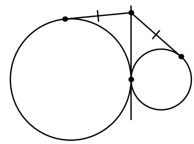
434. По какой траектории будет двигаться центр треугольника Рело, если использовать его в качестве катка?

435. Треугольник Рело можно вращать внутри квадрата, сторона которого равна его ширине, при этом он будет касаться всех четырёх сторон. Будут ли при этом точки на сторонах квадрата, которых он так и не коснётся?

Треугольник Рело — не единственная фигура, которая имеет постоянную (одинаковую во всех направлениях) ширину. Другая кривая постоянной ширины использована в английских монетах. (Постоянная ширина полезна в разменных и торговых автоматах, при проверке размера брошенной туда монеты.)

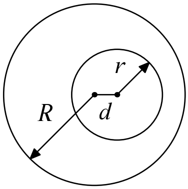
436. Попытайтесь по рисунку понять, как строится контур английской монеты.

437. Две окружности касаются прямой в одной и той же точке, но с разных сторон. Из другой точки этой прямой проведены касательные к окружностям (см. рисунок). Докажите, что отрезки этих касательных (до точек касания) равны.

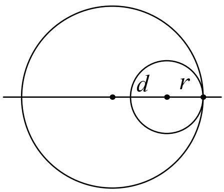


438. На фотографии (которую сделал Owne Byrne в Сан-Франциско, лицензия Creative Commons) снят люк на улице. Как вы думаете, какова форма этого люка и зачем это может быть нужно?

23. Две окружности

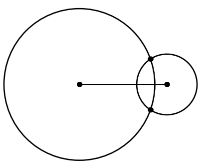


439. Даны две концентрические (с общим центром) окружности радиусов r и R (считаем, что $r < R$). Меньшую окружность начинают двигать, увеличивая расстояние d между центрами окружностей. При каком значении d она коснётся большей окружности? Сколько точек пересечения будет у окружностей после этого? Когда они вновь перестанут пересекаться?

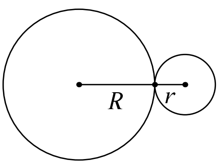


$d = R - r$

▷ Удобно провести линию центров — прямую, проходящую через центры окружностей, и считать, что большая окружность неподвижна, а центр меньшей движется по этой прямой. Видно, что когда величина d достигнет разницы радиусов $(R - r)$, меньшая окружность упрётся в большую и они будут иметь общую точку на линии центров. Эта точка будет единственной. (Если из рисунка это не ясно, можно рассуждать так. Пусть O — центр большей окружности, O' — центр меньшей. Если X — общая точка окружностей, не лежащая на линии центров, то возникает треугольник $OO'X$; его стороны равны R, r и $d = R - r$, и сторона R равна сумме двух других, что невозможно.)



Отодвигая меньшую окружность ещё, мы получим две точки пересечения (часть меньшей окружности находится внути большей, часть — вне, и точки пересечения разделяют эти части).



$d = R + r$

Так будет продолжаться, пока расстояние d не станет равно сумме радиусов — в этот момент обе точки сольются в одну, лежащую на линии центров (см. рисунок), после чего окружности разойдутся и больше не пересекутся. ◁

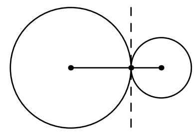
Ответ к этой задаче можно записать в виде таблицы (левая колонка — соотношение между d, R и r, правая — число общих точек).

$d < R - r$	0
$d = R - r$	1

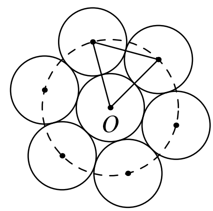
$R - r < d < R + r$	2
$d = R + r$	1
$d > R + r$	0

Когда две окружности имеют одну общую точку (вторая и четвёртая строки таблицы), говорят, что они *касаются* друг друга. Касание бывает *внутренним* (одна окружность внутри другой, $d = R - r$) или *внешним* ($d = R + r$).

Если две окружности касаются, то их единственная общая точка лежит на линии центров, и, проведя через неё перпендикуляр к линии центров, мы получим прямую, которая касается обеих окружностей в этой точке.

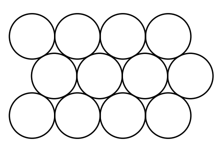


440. Дан круг. Начнём к нему прикладывать круги того же радиуса. Докажите, что поместится ровно 6 таких кругов (они будут касаться данного, а соседние — друг друга, см. рисунок).



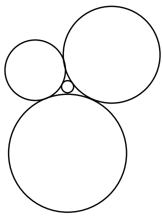
▷ Обозначим через r радиус данного круга, а через O — его центр. Тогда центры касающихся его кругов будут лежать на окружности с центром O и радиусом $2r$. Чтобы прикладываемые круги касались друг друга, надо, чтобы расстояние между их центрами также равнялось $2r$. А такая задача у нас уже была: если шесть раз построить хорду, длина которой равна радиусу окружности, то цепочка замкнётся. (Напомним: две соседние точки образуют с центром равносторонний треугольник, поэтому отстоят по окружности ровно на 60°, то есть на шестую часть окружности.) ◁

Интересно, что аналогичная задача для шаров совсем не проста: великий Ньютон спорил со своим знакомым, можно ли приложить к шару 13 таких же шаров или только 12 — и только в XX веке доказали, что 13 шаров приложить нельзя.



С помощью решённой нами задачи можно объяснить, как приложить 12 шаров. Мы видели, что к кругу можно приложить 6 кругов. К каждому из приложенных уже примыкают три круга, добавим еще три и так далее — получатся шестиугольные соты из кругов. Представим себе, что это не круги, а шары, уложенные на ровном столе (вид сверху). Тогда в луночки между соседними тремя кругами можно уложить такой же шар. Сделав это (не для всех луночек, а через одну — во все не поместятся!), получим второй слой шаров. Он будет иметь такое же строение, что и первый (каждый шар второго слоя касается шести других), и на него можно уложить третий слой. Тогда каждый шар второго слоя касается трёх шаров первого, трёх шаров третьего и шести в своём слое, всего будет 12.

Впрочем, чтобы представить себе описанную укладку шаров, надо иметь хорошее воображение или большой запас шариков для подшипников (для настольного тенниса тоже годятся).

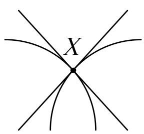


441. Нарисуйте четыре окружности так, чтобы любые две из них касались друг друга внешним образом.

▷ См. рисунок. ◁

442. Нарисуйте пять окружностей так, чтобы любые две из них касались друг друга.

▷ Эта задача — хорошая шутка, особенно если дать её после предыдущей: можно долго пытаться нарисовать эти окружности и так и этак, и ничего не будет получаться. Подвох тут в том, что не требуется, чтобы касание было внешним, и можно нарисовать сколько угодно окружностей, проходящих через одну точку и касающихся в ней. ◁



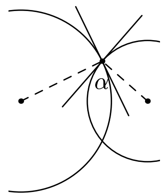
Пусть даны две окружности, пересекающиеся в точке X. Проведём через точку X касательные к окружностям. Угол между ними называют для краткости углом между окружностями. Аналогично определяется угол между окружностью и прямой.

443. Окружность пересекает прямую в двух точках. Докажите, что она образует равные углы с прямой в этих точках.

▷ Следуя определению угла между прямой и окружностью, проведём две касательные в точках пересечения. Вместе с нашей прямой они образуют равнобедренный треугольник (отрезки касательных равны) и потому углы при его основании равны. ◁

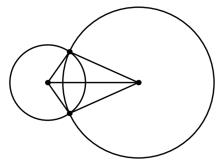
Строго говоря, нужно было бы ещё рассмотреть случай, когда касательные параллельны. Но тогда радиусы, проведённые к точкам касания, вместе образуют диаметр, так что угол между прямой и окружностью в обеих точках пересечения будет прямым.

444. Две окружности пересекаются в точке под углом α. Найдите угол между радиусами окружностей, проведёнными в точку пересечения.



$\triangleright$ Проведём две касательные. Вспоминая, что касательная перпендикулярна радиусу, видим, что два прямых угла перекрываются по углу α. Значит, нужно их сложить и вычесть α, так что искомый угол равен $180^\circ - \alpha$. $\triangleleft$

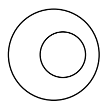
445. Две окружности пересекаются в двух точках. Докажите, что углы, под которыми они пересекаются в этих точках, равны.



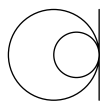
$\triangleright$ Проведём радиусы в точки пересечения, а также соединим центры окружностей отрезком. Получатся два равных треугольника (по трём сторонам). Поэтому углы между радиусами равны, и остаётся сослаться на предыдущую задачу. $\triangleleft$

446. Даны две окружности. Мы хотим провести *общую касательную* — прямую, которая касается обеих окружностей. Сколько таких прямых существует? (Ответ зависит от соотношения радиусов окружностей и расстояния между их центрами.)

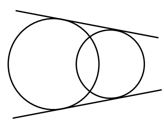
$\triangleright$ Пусть радиусы окружностей равны r и R (считаем, что $r < R$), расстояние между их центрами равно d.



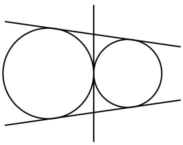
(1) Если $d < R - r$, то одна окружность лежит внутри другой и общих касательных нет (любая прямая, касающаяся внутренней окружности, пересекает внешнюю).



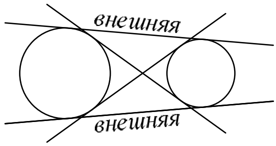
(2) При $d = R - r$ (внутреннее касание окружностей) есть ровно одна общая касательная (проходящая через точку касания окружностей).



(3) Если окружности пересекаются (это бывает при $R - r < d < R + r$), есть ровно две общие касательные.

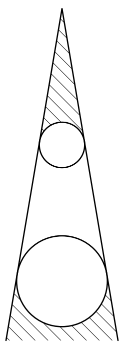


(4) Раздвигая центры всё дальше, мы доходим до момента $d = R + r$, в этот момент появляется ещё одна общая касательная, проходящая через точку (внешнего) касания окружностей, и всего касательных будет три.



(5) Наконец, при $d > R + r$ имеется четыре касательных — две внешних и две внутренних. ◁

Общая касательная к двум окружностям бывает *внешней* (обе окружности лежат по одну сторону от касательной) или *внутренней* (окружности по разные стороны).

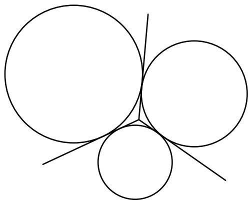


447. Имеются два круглых забора, огораживающих непересекающиеся круглые участки. Нарисуйте, где находятся точки, из которых один из заборов не виден (то есть второй его полностью заслоняет).

▷ Это — участки области между общими внешними касательными, расположенные вне кругов (если окружности разного размера, то один из них будет ограничен, а другой уходить в бесконечность). ◁

448. Можно ли нарисовать три непересекающихся (и не касающихся) круга и точку вне этих кругов, для которой круги закрывают весь горизонт (любой луч, выходящий из точки, упирается в один из кругов)? Можно ли сделать то же самое с двумя кругами?

▷ Каждый круг закрывает угол зрения между двумя касательными (см. рисунок). Этот угол меньше 180°, поэтому два круга не могут закрыть весь горизонт (360°).



А три уже могут. Разделим весь горизонт обзора на три сектора по 120°. Каждый сектор закроем своим кругом. Если все круги взять одного радиуса, то они будут касаться, что не допускается условием. Но радиус мы можем регулировать, приближая или отдаляя круг (и соответственно меняя его размер). Таким образом можно избавиться от пересечения (касания) кругов. После этого даже можно чуть-чуть увеличить размеры кругов, чтобы с гарантией перекрыть путь лучам на границе секторов. ◁

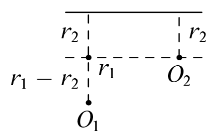
449. Две точки A и B находятся на расстоянии 8. Сколько существует прямых, которые находятся на расстоянии 5 от точки A и расстоянии 3 от точки B?

▷ Прямая l находится на расстоянии d от точки A, когда она касается окружности радиуса d с центром в A. Поэтому задачу можно переформулировать так: даны две окружности радиусов 3 и 5, расстояние между центрами равно 8. Сколько существует общих касательных?

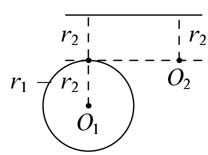
Эту задачу мы уже решали; так как $3 + 5 = 8$, окружности касаются внешним образом и общих касательных будет три. ◁

450. Постройте циркулем и линейкой общую внешнюю касательную к двум данным окружностям (лежащим одна вне другой).

▷ Условие задачи можно перевести на язык расстояний: надо найти прямую, которая отстоит на данные расстояния (радиусы r_1 и r_2, считаем, что $r_1 > r_2$) от двух данных точек (центры O_1 и O_2), причём обе точки должны лежать по одну сторону прямой (внешняя касательная).



Пусть такая прямая построена. Что будет, если сдвинуть её на расстояние x (параллельно самой себе)? Расстояния от обеих точек одновременно увеличатся или уменьшатся на x. Приблизим прямую к точкам, сдвинув её на расстояние r_2. Расстояние от точки O_1 до прямой станет равно $r_1 - r_2$, а расстояние от O_2 до прямой обратится в нуль, то есть прямая будет проходить через точку O_2. Другими словами, эту сдвинутую прямую можно построить как касательную к данной окружности из данной точки. (Окружность будет радиуса $r_1 - r_2$ с центром в O_1, а точка будет O_2.)

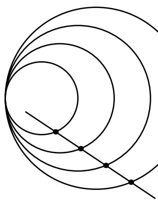


Теперь ясно, как построить общую касательную. Построим окружность радиуса $r_1 - r_2$ с центром в O_1. Проведём через точку O_2 касательную к этой окружности (таких касательных существует две).

Полученная прямая будет отстоять от точки O_1 на расстояние $r_1 - r_2$. Сдвинув её на расстояние r_2, получим прямую, которая отстоит на расстояние r_2 от точки O_2 и на расстояние $(r_1 - r_2) + r_2 = r_1$ от точки O_1. Эта прямая и будет общей внешней касательной к окружностям (одной из двух касательных). $\lhd$

Ещё несколько задач

451. Центры трёх окружностей, касающихся попарно внешним образом, образуют треугольник со сторонами a, b, c. Найдите (выразите через a, b, c) радиусы этих окружностей.



452. Несколько окружностей имеют общую точку и касаются друг друга в этой точке. Докажите, что можно провести отрезок, который пересекает все эти окружности в разных точках, но под одним и тем же углом 50° (см. рисунок).

453. Две окружности пересекаются под прямым углом. Докажите, что можно построить третью окружность, которая проходит через центры данных окружностей и через обе точки их пересечения.

454. Даны две точки A и B. Сколько существует прямых, которые находятся на расстоянии 5 от точки A и расстоянии 3 от точки B, если расстояние AB равно 1? равно 2? равно 4? равно 6? равно 9?

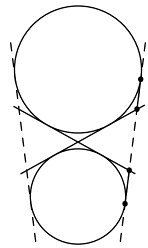
455. Можно ли использовать описанное в задаче 450 построение внешних общих касательных, если две данные нам окружности пересекаются?

456. Даны две окружности, лежащие одна вне другой. Как построить (циркулем и линейкой) общие *внутренние* касательные?

457. К двум окружностям, находящимся одна вне другой, проведены внешние общие касательные. На каждой из них отмечен отрезок между двумя точками касания. Покажите, что два отмеченных отрезка равны. ⟨Можно продолжить касательные до пересечения и воспользоваться задачей 425.⟩

458 (Продолжение). Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для *внутренних* общих касательных.

459. Две окружности лежат одна вне другой. Проведены четыре общие касательные (две внешние и две внутренние). Возьмём внешнюю касательную и отрезок на ней между точками касания. Этот отрезок делится внутренними касательными на три части. Докажите, что две крайние части равны.



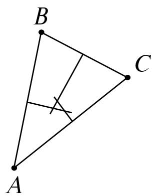
24. Описанная окружность. Серединные перпендикуляры

460. Даны две точки A и B. Рассмотрим всевозможные окружности, проходящие через обе точки A и B. Где находятся их центры?

▷ Если окружность с центром O проходит через точки A и B, то расстояния OA и OB равны (как радиусы этой окружности). Как мы знаем, в этом случае точка O лежит на серединном перпендикуляре к AB.

Напротив, любая точка O серединного перпендикуляра равноудалена от A и B, и если провести окружность с центром в O и радиусом OA, то она пройдёт и через B.

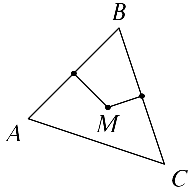
Получается, что центры окружностей, проходящих через A и B, заполняют серединный перпендикуляр к отрезку AB. ◁



461. Учитель задал такую задачу: есть три колодца A, B, C; каждый житель ходит к ближайшему. Нарисовать, откуда ходят к каждому из колодцев. Один из школьников нарисовал серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC (см. рисунок) и думает, куда же ходят люди из маленького треугольника в середине: с одной стороны A им ближе, чем C; с другой стороны, B им ближе, чем A. Наконец, C им ближе, чем B. Как же так может быть? В чём ошибка в его рассуждениях?

▷ Рассуждения его правильны, но означают всего лишь, что такого треугольника не существует, то есть все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке. ◁

То же самое можно сказать и немного иначе:



462. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекаются в точке M. Докажите, что серединный перпендикуляр к AC также проходит через M (так что три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке).

▷ Поскольку точка M лежит на серединном перпендикуляре к AB, она одинаково удалена от A и B. Поскольку M лежит на серединном перпендикуляре к BC, она одинаково удалена от B и C. Выходит, что она одинаково удалена от всех трёх точек A, B и C. Значит, она лежит на серединном перпендикуляре к AC, что и требовалось доказать. ◁

463. Дан треугольник. Как построить окружность, проходящую через его вершины?

▷ Условие этой задачи можно переформуливать так: нам надо найти точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от вершин треугольника (центр искомой окружности). Мы видели, что для этого надо построить серединные перпендикуляры к двум сторонам и найти точку их пересечения. (Эта точка окажется и на третьем серединном перпендикуляре.) ◁

Не может ли так случится, что серединные перпендикуляры не пересекутся? Если они параллельны, то две стороны, которым они перпендикулярны, перпендикулярны двум параллельным прямым. При этом они проходят через общую точку (вершину треугольника), поэтому продолжают друг друга, чего быть не может (вершины треугольника не могут лежать на одной прямой).

464. Могут ли две разные окружности пересекаться в трёх точках?

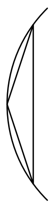
▷ Пусть две окружности имеют три общие точки A, B и C. Тогда центр любой из них можно построить как пересечение серединных перпендикуляров к AB и к AC, то есть центры совпадают. А если у двух окружностей общий центр и они имеют общую точку, то у них одинаков и радиус. ◁

Окружность, проходящую через вершины треугольника, называют *описанной* вокруг этого треугольника (а треугольник называют *вписанным* в окружность). Предыдущая задача говорит, что такая окружность только одна. Поэтому можно говорить «описанная вокруг треугольника ABC окружность», не опасаясь неоднозначного толкования.

465. Дана окружность, но центр её не указан. Восстановите этот центр при помощи циркуля и линейки.

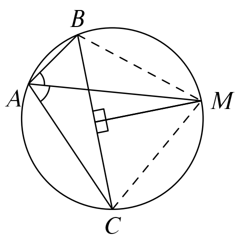
▷ Мы уже знаем, как построить окружность, проходящую через данные три точки — при этом построении строится и её центр. Так что достаточно взять любые три точки окружности и выполнить это построение. ◁

466. Может ли радиус описанной около треугольника окружности быть больше 1 метра, если все стороны треугольника не превосходят 1 сантиметра?



▷ Задачу легко решить, если переформулировать её так: можно ли вписать в окружность большого радиуса маленький треугольник? Конечно, можно: возьмём на ней три близкие точки и объявим их вершинами треугольника. ◁

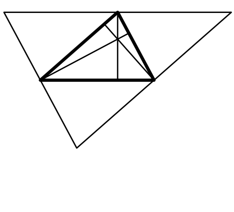
467. Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке M. Докажите, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC.



▷ Биссектриса делит угол на два равных вписанных угла, которые, следовательно, опираются на равные дуги. Следовательно, хорды MB и MC равны. Поэтому точка M одинаково удалена от точек B и C, то есть лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC. ◁

Утверждение этой задачи можно прочесть так: серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса противолежащего ей угла пересекаются на описанной вокруг треугольника окружности.

468. Докажите, что три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.



▷ Проведём через каждую вершину треугольника прямую, параллельную противоположной стороне. Образуются три параллелограмма, каждый из которых разрезан на два треугольника, равных исходному. Легко заметить, что высоты исходного треугольника являются серединными перпендикулярами в получившемся большом треугольнике, и поэтому пересекаются в одной точке (центре окружности, описанной около большого треугольника). $\triangleleft$

Эта задача нам уже встречалась раньше (задача 419).

Ещё несколько задач

469. Что можно сказать о треугольнике, если центр описанной около него окружности лежит на одной из сторон? Для каких треугольников центр описанной окружности лежит вне треугольника, а для каких — внутри?

470. Докажите, что для прямоугольного треугольника радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.

471. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC построен квадрат с центром в O. Найдите угол OAB.

472. Три окружности радиуса 1 с центрами в точках A, B, C проходят через одну точку. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

473 (Продолжение). Пусть P, Q, R — три других точки пересечения этих окружностей. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PQR.

474. На сторонах AB, BC и AC остроугольного треугольника ABC взяты точки K, L, M (соответственно). Докажите, что окружности, описанные около треугольников AKM, BKL и CLM, проходят через одну точку.

25. Вписанная окружность. Биссектрисы

475. Дан угол. Где может находиться центр окружности, если эта окружность касается обеих сторон угла?

▷ Если окружность касается прямой, то её радиус, проведённый в точку касания, является кратчайшим расстоянием до прямой. Значит, центр окружности, касающейся сторон угла, одинаково удалён от этих сторон и потому лежит на биссектрисе угла. ◁

476. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M. Докажите, что биссектриса угла C также проходит через точку M.

▷ Точки, лежащие на биссектрисе угла, одинаково удалены от его сторон. Значит, точка M одинаково удалена от сторон AB и AC (лёжа на биссектрисе угла A), а также от сторон AB и BC (лёжа на биссектрисе угла B). Поэтому она одинаково удалена от всех трёх сторон, и, следовательно, лежит и на биссектрисе угла C. ◁

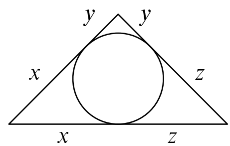
> Таким образом, биссектрисы трёх углов треугольника пересекаются в одной точке.

477. Дан треугольник. Постройте окружность, лежащую внутри него и касающуюся всех трёх его сторон.

▷ Центр этой окружности одинаково удалён от сторон треугольника (на расстояние, равное радиусу окружности) и потому лежит в точке пересечения биссектрис треугольника. Как строить биссектрисы, мы знаем. ◁

> Окружность, лежащая внутри треугольника и касающаяся трёх его сторон, называется *вписанной* в треугольник. (А про треугольник говорят, что он *описан* вокруг этой окружности.)

478. Окружность вписана в треугольник со сторонами a, b, c. Найдите длины отрезков, на которые точки касания делят стороны этого треугольника.

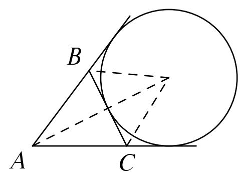


▷ Здесь понадобится немного алгебры. Среди этих отрезков есть три пары равных. Обозначим их длины x, y и z. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения: $2x+2y+2z = a+b+c$, откуда $x + y + z = (a + b + c)/2$. Вычитая из полученного равенства три данных, получаем, что $z = (b + c - a)/2$, $y = (a + c - b)/2$, $x = (a + b - c)/2$. ◁

479. Дан треугольник ABC. Постройте окружность, касающуюся стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C.



▷ Центр этой окружности лежит на биссектрисе угла A, а также на биссектрисах внешних углов треугольника в вершинах B и C, так что достаточно построить эти биссектрисы. ◁

Окружность, построенную в предыдущей задаче, называют *вневписанной* окружностью треугольника. Таких окружностей три.

Кроме того, наши рассуждения показывают, что биссектриса внутреннего угла треугольника и две биссектрисы двух других внешних его углов пересекаются в одной точке.

Ещё несколько задач

480. Докажите, что точка пересечения внешних касательных к паре окружностей лежит на прямой, соединяющей центры окружностей. Докажите то же самое для внутренних касательных.

481. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите отрезки, на которые делит сторону c точка касания этой стороны с вневписанной окружностью.

482. На стороне треугольника отмечены две точки: точка касания со вписанной окружностью и точка касания с вневписанной окружностью. Они делят эту сторону на три отрезка. Докажите, что два из этих отрезков равны.

483. Биссектрисы всех четырёх углов выпуклого четырёхугольника со сторонами a, b, c и d (перечисленными в порядке обхода по часовой стрелке) пересекаются в одной точке. Докажите, что $a + c = b + d$.

484. Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух вневписанных окружностей треугольника, проходит через одну из его вершин.

485. Докажите, что в любом треугольнике центр одной из вневписанных окружностей, центр вписанной окружности и какие-то две вершины треугольника лежат на одной окружности.

26. Вписанные и описанные четырёхугольники

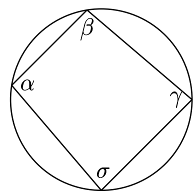
Вокруг любого треугольника можно описать окружность; в любой треугольник можно вписать окружность.

Для четырёхугольников это не так: для того, чтобы вокруг четырёхугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны 180°.

Для того, чтобы в выпуклый четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны друг другу.

Эти и родственные факты составляют содержание задач данного раздела.

486. Докажите, что если вершины четырёхугольника лежат на окружности, то суммы противоположных углов равны 180°.

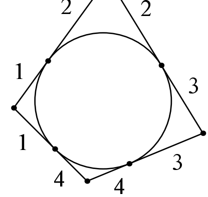


$\alpha + \gamma = 180^\circ$
$\beta + \sigma = 180^\circ$

▷ Это уже обсуждалось в задаче 399: вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается; противоположные углы четырёхугольника опираются на дуги, составляющие в сумме полную окружность (360°). ◁

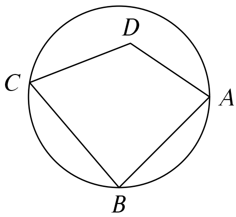
487. Докажите, что если окружность касается всех четырёх сторон четырёхугольника, то суммы его противоположных сторон равны.

Другими словами, проведя четыре касательные к окружности, мы получаем четырёхугольник, в котором суммы противоположных сторон равны.



▷ Воспользовавшись задачей 425 (равенство касательных к окружности, проведённых из одной точки), можно найти на рисунке четыре пары равных отрезков. Теперь видно, что сумма двух противоположных сторон (любой пары) включает в себя все эти четыре отрезка по одному разу. ◁

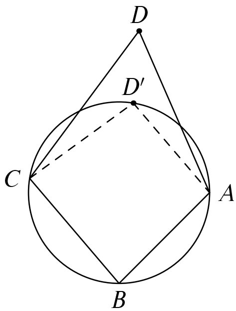
488. Проведём окружность через вершины A, B и C четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если точка D оказалась вне окружности, то сумма углов



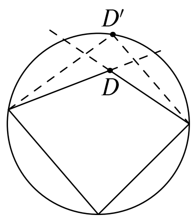
$\angle B + \angle D > 180$

B и D меньше $180°$, а сумма углов A и C больше $180°$. Докажите, что если точка D попадает внутрь этой окружности (как на рисунке), то сумма углов B и D больше $180°$, а сумма углов A и C меньше $180°$.

▷ Прежде всего заметим, что сумма всех четырёх углов равна $360°$. Поэтому если сумма одной пары углов больше $180°$, то сумма второй пары меньше, и наоборот.



Пусть точка D оказалась вне окружности. Что случится с углами четырёхугольника, если заменить её на точку D' (лежащую на окружности и внутри четырёхугольника)? Угол B, естественно, не изменится. Что произойдёт с углом D, ясно не сразу, но вот углы A и C, как видно из рисунка, уменьшатся. (А следовательно, D увеличится, поскольку сумма всех углов неизменно равна $360°$.) У нового четырёхугольника $ABCD'$ суммы противоположных углов равны $180°$. Следовательно, у старого сумма углов B и D была меньше $180°$, а сумма углов A и C была больше $180°$.



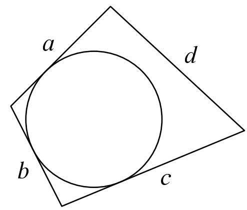
Совершенно так же можно рассуждать для случая, когда точка D оказалась внутри четырёхугольника. Надо только заменить её на точку D' на окружности так, чтобы углы A и C увеличились. (Годится не любая точка окружности: нужно взять D' внутри угла, являющегося вертикальным к углу D.) ◁

489. Докажите, что если суммы противоположных углов четырёхугольника равны $180°$, то вокруг него можно описать окружность.

▷ Это легко следует из предыдущей задачи: если мы проведём окружность через три его вершины, то четвёртая на неё попадёт. В самом деле, она не может быть ни внутри, ни вне окружности, поскольку в этом случае сумма противоположных углов будет меньше или больше $180°$. ◁

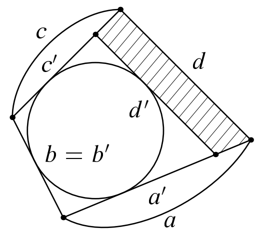
490. Выпуклый четырёхугольник имеет стороны a, b, c и d (перечислены по часовой стрелке).

Окружность касается сторон a, b и c. Докажите, что если сторона d не имеет общих точек с окружностью, то $a + c > b + d$. Докажите, что если сторона d пересекает окружность, то $a + c < b + d$.



$a + c > b + d$

▷ Эта задача решается чуть более сложно, чем предыдущая, но похожим способом: мы изменяем четырёхугольник так, чтобы все четыре стороны стали касаться окружности, и сравниваем изменённый с исходным.



Пусть сторона d не имеет общих точек с окружностью. Подвинем её в направлении центра так, чтобы она коснулась окружности. Как изменятся длины сторон? Стороны a и c, естественно, укоротятся. Обозначим их новые длины через a' и c'. Сторона b не изменится, так что её новая длина b' равна прежней длине b. Что произойдёт со стороной d? Это зависит от ситуации: новая длина (обозначим её d') может быть и меньше, и больше старой. Нас интересует соотношение между $a + c$ и $b + d$.

Мы знаем, что $a' + c' = b' + d'$. Посмотрим, насколько уменьшились $a + c$ и $b + d$ при переходе от исходного четырёхугольника к новому (со штрихами). Сумма $a + c$ уменьшилась на величину, равную сумме двух противоположных сторон заштрихованного четырёхугольника. Сумма $b + d$ уменьшилась на $d - d'$ (поскольку $b = b'$). (В зависимости от знака $d - d'$ это уменьшение может быть и увеличением.)

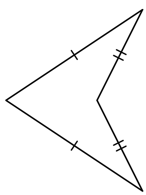
Осталось заметить, что для любого четырёхугольника разность двух его сторон меньше суммы двух других сторон. В самом деле, если p, q, r, s — его стороны, то $p - q < r + s$, поскольку $p < q + r + s$ («неравенство четырёхугольника»). Итак, сумма противоположных сторон a и c уменьшилась больше, чем сумма противоположных сторон $b + d$, после чего эти суммы сравнялись. Поэтому исходно было $a + c > b + d$.

Вторая часть задачи (что будет, если d пересекает окружность) решается точно так же: надо отодвинуть сторону d так, чтобы она стала касаться окружности, и сравнить старый и новый четырёхугольники. ◁

491. Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

(Если в шарнирный четырёхугольник нельзя вписать окружность, то изменение углов не поможет.)

▷ Следствие предыдущей задачи: впишем окружность так, чтобы она касалась трёх сторон. Тогда четвёртая сторона также обязана коснуться окружности: иначе по предыдущей задаче суммы противоположных сторон будут не равны. ◁



Условие выпуклости существенно: можно нарисовать невыпуклый четырёхугольник с двумя равными парами сторон. В нём суммы противоположных сторон, конечно, равны, но вписать в него окружность нельзя (даже трёх сторон одновременно она касаться не может).

Мы доказали сформулированные в начале раздела утверждения о «необходимых и достаточных» условиях. Надо только объяснить, как математики понимают слова «необходимость» и «достаточность». Наверное, вы знаете признак делимости целого числа на 9: сумма цифр делится на 9. Этот признак содержит два утверждения:

(1) Если число делится на 9, то его сумма цифр делится на 9.

(2) Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Первое утверждение формулируют так: для того, чтобы число делилось на 9, *необходимо*, чтобы сумма его цифр делилась на 9. А второе так: для того, чтобы число делилось на 9, *достаточно*, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Другими словами: делимость суммы цифр на 9 является *необходимым условием* делимости числа на 9 (первое утверждение), а также *достаточным условием* делимости числа на 9 (второе утверждение).

Ещё говорят так: «число делится на 9 тогда и только тогда (вариант: в том и только том случае), когда сумма его цифр делится на 9». При этом слово «тогда» («в том случае») соответствует утверждению (2), а слова «только тогда» («только в том случае») соответствуют утверждению (1).

Возвращаясь к нашим четырёхугольникам: равенство сумм противоположных сторон *необходимо и достаточно* для того, чтобы в выпуклый четырёхугольник можно было вписать окружность. *Необходимость*: если можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны. *Достаточность*: если суммы противоположных сторон равны, то можно вписать.

492. Докажите, что вокруг выпуклого четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность в том и только том случае, когда сторона CD видна из точек A и B под одним и тем же углом.

▷ Если окружность описать можно, то углы, под которыми видна сторона CD из точек A и B, являются вписанными углами, опирающимися на одну дугу, и потому равны. Наоборот: пусть эти углы равны. Проведём окружность через точки A, C и D. Тогда точка B попадёт на ту же окружность. В самом деле, из точек вне окружности отрезок CD виден под меньшим углом, чем из точек дуги CAD, а из точек внутри — под бо́льшим (задача 405). ◁

493. Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов A и C равна 180°, то сторона CD видна из точек A и B под одинаковыми углами.

▷ Очевидная комбинация предыдущих задач. ◁

Интересно то, что в такой формулировке нет ни слова о каких бы то ни было окружностях, а решение существенно использует вспомогательную окружность.[1]

Ещё несколько задач

494. Желая узнать, делится ли число 1233 на 9, Маша вычислила сумму его цифр $1+2+3+3=9$, заметила, что она делится на 9 и заключила, что само число тоже делится на 9. Какой частью признака делимости на 9 она воспользовалась: (1) или (2)?

[1]Эту задачу можно также решить с помощью подобных треугольников; о которых говорится в главе 29. Если O — точка пересечения противоположных сторон BC и AD, то треугольники OAB и OCD подобны, поэтому $OB : OD = OA : OC$ и треугольники OAC и OBD тоже подобны, так что $\angle OCA = \angle ODB$.

Желая узнать, делится ли число 1236 на 9, Коля вычислил сумму его цифр $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, заметил, что она не делится на 9 и заключил, что само число тоже не делится на 9. Какой частью признака делимости на 9 он воспользовался: (1) или (2)?

495. Профессор математики и дома пользуется научной терминологией: она говорит своему сыну Васе, что получение последним пятёрки за четверть является *необходимым* условием приобретения велосипеда. А привыкший к такому обращению Вася слушает и думает про себя: «Вот если бы это было *достаточным* условием, то стоило бы постараться». Что они имеют в виду, если сказать по-простому?

496. В четырёхугольнике $ABCD$ два противоположных угла B и D прямые. Докажите, что $\angle DAC = \angle DBC$.

497. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и BL, пересекающиеся в точке O. (Высота соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и перпендикулярна этой стороне.) Докажите, что $\angle BLK = \angle OCB$.

498. Докажите, что для описанного около окружности шестиугольника со сторонами a, b, c, d, e, f (в порядке обхода) выполняется равенство:

$$a - b + c - d + e - f = 0.$$

Является ли это равенство необходимым условием для того, чтобы в выпуклый шестиугольник можно было вписать окружность? а достаточным?

499. Пятиугольник со сторонами a, b, c, d, e (перечисленными по часовой стрелке) вписан в окружность некоторого радиуса. Докажите, что можно построить пятиугольник со сторонами a, c, b, d, e (также по часовой стрелке), вписанный в окружность того же радиуса. Докажите, что можно построить пятиугольник со сторонами a, c, b, e, d, вписанный в окружность того же радиуса.

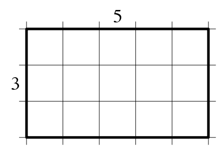
27. Площади

Площадь фигуры — неотрицательное число. Равные фигуры имеют равные площади. Если фигура разрезана на части, то её площадь равна сумме площадей частей. Площадь квадрата со стороной 1 принимается за единицу площади.

Название единицы площади определяется тем, какая у нас единица длины. Скажем, если мы измеряем длину в метрах, то площадь измеряется в *квадратных метрах* (один квадратный метр — это площадь квадрата со стороной в один метр). Именно в квадратных метрах обычно измеряют площадь квартиры. А, скажем, поверхность озёр обычно измеряют в квадратных километрах (один квадратный километр — это площадь квадрата со стороной в один километр).

В геометрии часто опускают название единицы и говорят просто об отрезке длиной 2 или треугольнике площадью 7/2, не уточняя, идёт ли речь об отрезке длиной 2 см и треугольнике площадью 7/2 см^2 или об отрезке длиной 2 км и треугольнике площадью 7/2 км^2. (А американские школьники могут представлять себе отрезок длиной 2 фута и треугольник площадью 7/2 квадратных фута.)

500. Найдите площадь прямоугольника со сторонами 3 и 5.

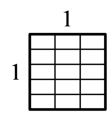


▷ Такой прямоугольник можно разрезать на 15 единичных квадратов, поэтому его площадь равна сумме площадей этих квадратов, то есть 15. ◁

501. Сколько квадратных сантиметров в квадратном метре?

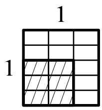
▷ Квадрат со стороной в 1 метр можно разбить на 100×100 квадратов со стороной 1 сантиметр, поэтому в одном квадратном метре помещается $100 \cdot 100 = 10\,000$ квадратных сантиметров. ◁

502. Найдите площадь прямоугольника со сторонами 1/3 и 1/5.



▷ Если единичный квадрат разрезать на 3 части по горизонтали и 5 частей по вертикали, то каждая часть как раз и будет прямоугольником со сторонами 1/3 и 1/5. Всего частей 15, они равны, поэтому площадь каждой части будет 1/15. ◁

503. Найдите площадь прямоугольника со сторонами 2/3 и 3/5.



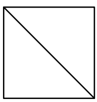
▷ Такой прямоугольник составлен из 2×3 прямоугольников размера $1/3 \times 1/5$, поэтому его площадь равна $6/15 = (2/3) \cdot (3/5)$. ◁

> Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. В частности, площадь квадрата со стороной a равна a^2.

В предыдущей задаче мы по существу доказали это для случая, когда стороны прямоугольника рациональны (измеряются дробями с целыми числителями и знаменателями). Для общего случая это можно доказать, заключая прямоугольник между меньшим и бóльшим прямоугольниками с рациональными сторонами.

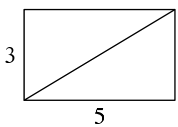
Заметим ещё, что эта задача объясняет, почему произведение $a \cdot a$ называют «а в квадрате» или «а квадрат».

504. Найдите площадь прямоугольного треугольника, оба катета которого имеют длину 1.



▷ Диагональ разрезает единичный квадрат на два таких треугольника, поэтому площадь каждого из них равна 1/2. ◁

505. Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 5.

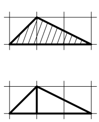


▷ Из двух таких треугольников можно составить прямоугольник 3×5, поэтому площадь каждого из них равна половине площади прямоугольника, то есть $3 \cdot 5/2$. ◁

> Решение предыдущей задачи показывает, что площадь прямоугольного треугольника составляет половину произведения его катетов.

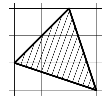
В следующей задаче нужно найти площадь треугольника, не являющегося прямоугольным.

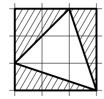
506. Найдите площадь треугольника (см. рисунок) на клетчатой бумаге. (Сторона клетки 1.)



▷ Его можно разрезать на две части, площади которых равны $(1 \cdot 1)/2 = 1/2$ и $(1 \cdot 2)/2 = 1$. Общая площадь будет 1,5. ◁

507. Та же задача для другого треугольника (см. рисунок)



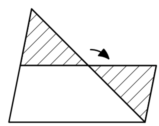


▷ Этот треугольник не так легко разрезать на части известной площади. Зато его можно дополнить до квадрата 3×3 тремя прямоугольными треугольниками, площади которых мы искать умеем (они равны $2{\cdot}2/2 = 2$, $1{\cdot}3/2 = 1{,}5$ и $3{\cdot}1/2 = 1{,}5$). Ответ: площадь треугольника равна $9-2-1{,}5-1{,}5 = 4$. ◁

Две фигуры, имеющие равную площадь, называют *равновеликими*.

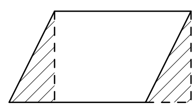
Чтобы доказать, что две фигуры равновелики, можно разрезать одну из них на части, а затем сложить из этих частей другую фигуру.

508. Разрежьте треугольник на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

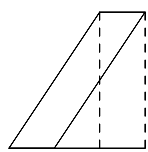


▷ Можно разрезать треугольник по средней линии, после чего меньшую часть повернуть на 180° и приложить к большей (см. рисунок). Чтобы доказать, что всё сходится, заметим, что средняя линия проходит через середины сторон и параллельна третьей стороне, и дополним трапецию до параллелограмма. Легко доказать, что выступающая часть треугольника равна недостающей (по стороне и двум углам). ◁

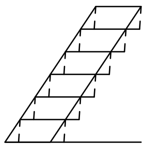
509. Разрежьте параллелограмм на части, из которых можно составить прямоугольник.



▷ Положим параллелограм на горизонтальную прямую и опустим высоты из концов его верхнего основания. Видно, что если отрезать треугольник слева и приложить его справа, то как раз получится прямоугольник. (Эти два прямоугольных треугольника — выступающий и недостающий — равны, например, по гипотенузе и острому углу.)

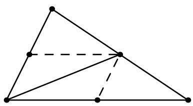


Впрочем, такой приём не всегда годится — может оказаться, что высота падает вовне основания (см. рисунок). Тогда можно положить параллелограмм другим боком: если сделать горизонтальной большую сторону параллелограмма, такого случиться не может.



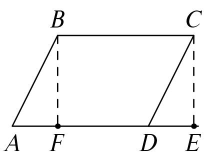
Есть и другой способ — можно разрезать параллелограмм на несколько слоёв, каждый переделать в прямоугольник и потом эту стопку прямоугольников сделать вертикальной. Получится один большой прямоугольник, у которого сторонами будут горизонтальная сторона параллелограмма и его высота. ◁

510. Медиана делит треугольник на два треугольника. Докажите, что эти треугольники равновелики, разрезав один из них на две части, из которых можно сложить второй.



▷ Проведём две средние линии. Получатся два треугольника, равных как половинки параллелограмма, и два, которые равны по трём сторонам (каждая сторона вдвое меньше соответствующей стороны большого треугольника). ◁

511. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

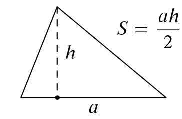


▷ Можно использовать решённую нами задачу и разрезать параллелограмм на части, из которых сложить прямоугольник. Но можно сделать и иначе. Если добавить к параллелограмму $ABCD$ треугольник CDE (DE — высота, опущенная из точки D на прямую AB, см. рисунок), получится трапеция $ABCE$. Та же самая трапеция получится, если добавить к прямоугольнику $BCEF$ (BF — высота) треугольник ABF. Прямоугольные треугольники ABF и CDE равны по гипотенузе и острому углу. Значит, и параллелограмм, и прямоугольник получаются вычитанием равных треугольников из трапеции и потому имеют одинаковую площадь.

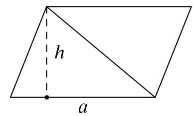
Этот приём проходит без изменения и в случае, когда высота падает вне основания параллелограмма. ◁

Приём, использованный в решении этой задачи, называют так: мы доказали, что параллелограмм и прямоугольник *равновелики по дополнению* (получаются из равных фигур отрезанием равных частей, но в разных местах).

512. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, опущенную на это основание.



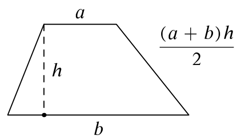
▷ В самом деле, два таких треугольника образуют параллелограмм, площадь которого равна произведению основания на высоту. ◁



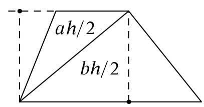
513. Используя предыдущую задачу, докажите (другим способом по сравнению с задачей 510), что медиана делит треугольник на две половины равной площади.

▷ В самом деле, у этих половин одинаковые основания и общая высота. ◁

514. Докажите, что площадь трапеции равна произведению её высоты на полусумму оснований.



▷ Разрежем трапецию диагональю на два треугольника. Высоты этих треугольников равны расстоянию между прямыми, продолжающими основания трапеции, то есть высоте трапеции. Площадь каждого из них равна половине произведения высоты трапеции на одно из оснований, остаётся сложить эти равенства. ◁

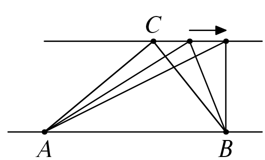


515. В треугольнике одна сторона вдвое длиннее другой. Докажите, что одна из высот треугольника вдвое короче другой.

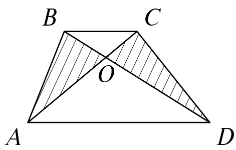
▷ Формулу для площади треугольника можно применять к разным сторонам, и площадь должна получиться одной и той же. Значит, раз одна сторона вдвое длиннее другой, а произведение стороны и высоты одно и то же, то одна из высот вдвое короче другой. ◁

В общем случае то же рассуждение показывает, что высоты треугольника обратно пропорциональны опущенным на них сторонам.

516. На одной из двух параллельных прямых взят неподвижный отрезок AB, а по другой перемещается точка C. Докажите, что площадь треугольника ABC остаётся неизменной.

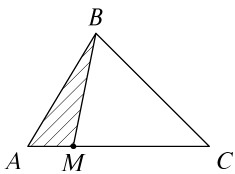


$\triangleright$ В самом деле, если опускать из точки C высоту на прямую AB, то её длина не зависит от положения точки C. $\triangleleft$



517. В трапеции $ABCD$ (основания AD и BC) диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и COD имеют равную площадь.

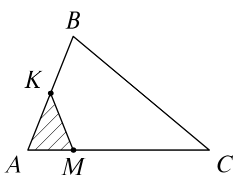
$\triangleright$ Это становится ясным, если к обоим треугольникам добавить треугольник AOD — получатся два треугольника ABD и ACD, которые имеют общее основание AB и равные высоты, опущенные на это основание. $\triangleleft$



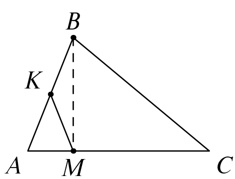
518. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, делящяя её в отношении $AM : MC = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABC равна 1.

$\triangleright$ В треугольниках ABC и ABM есть общая высота, опущенная из точки B, а стороны AC и AM, на которые она опущена, отличаются в четыре раза. Поэтому площадь треугольника ABM равна $1/4$. $\triangleleft$

То же рассуждение показывает, что если одну сторону треугольника увеличить или уменьшить в k раз, оставив другую сторону и угол между сторонами неизменным, то площадь треугольника увеличится или уменьшится в те же k раз.



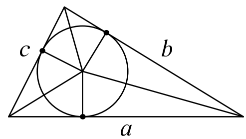
519. В треугольнике ABC середина K стороны AB соединена с точкой M, делящей сторону AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника AKM, если площадь треугольника ABC равна 1.



$\triangleright$ Сравним оба треугольника с промежуточным треугольником ABM. Сначала мы уменьшаем сторону AC треугольника ABC в четыре раза до AM, получаем треугольник ABM. Как мы видели, площадь при этом также уменьшается в четыре раза. Затем мы уменьшаем сторону AB вдвое до AK, площадь уменьшается ещё в два раза. Получаем ответ: $1/8$. $\triangleleft$

Это рассуждение показывает, что если мы меняем две стороны треугольника, оставляя угол между ними неизменным, то площадь меняется пропорционально произведению этих двух сторон.

520. Окружность радиуса r вписана в треугольник периметра p и площади S. Как связаны эти три величины?



▷ Соединив центр окружности с вершинами треугольника, получим три треугольника, каждый из которых имеет высоту r, опущенную на одну из сторон треугольника (a, b, c). Площади этих трёх частей равны соответствено $ar/2$, $br/2$ и $cr/2$. Складывая, получаем, что $S = (a+b+c)r/2 = pr/2$. ◁

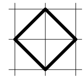
Используя понятие площади, можно найти отношение диагонали квадрата к его стороне. Вот как это делается.

521. Во сколько раз нужно увеличить сторону квадрата, чтобы его площадь увеличилась в четыре раза?

▷ Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab, поэтому площадь квадрата со стороной a равна $a \cdot a = a^2$. Увеличив сторону квадрата вдвое, мы увеличим его площадь в четыре раза: $(2a)^2 = 2^2 a^2 = 4a^2$. ◁

522. Во сколько раз нужно увеличить сторону квадрата, чтобы его площадь увеличилась в 2 раза?

▷ При увеличении стороны квадрата в k раз его площадь увеличивается в k^2 раз: если раньше сторона была a и площадь a^2, то теперь сторона ka и площадь $(ka)^2 = k^2 a^2$. Значит, нужно найти такое k, что k^2 равно 2. Такое число (положительное) называется *квадратным корнем из* 2 и обозначается $\sqrt{2}$. (На многих калькуляторах есть соответствующая клавиша; нажав её, можно убедиться, что $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$) ◁



С другой стороны, увеличение площади квадрата вдвое легко выполнить геометрически. Нарисуем на клетчатой бумаге квадрат по диагонали (см. рисунок).

523. Докажите, что площадь этого квадрата вдвое больше площади клетки.

$\triangleright$ Он состоит из четырёх треугольников, каждый из которых равен половине клетки. $\triangleleft$

Значит, сторона большего квадрата, то есть диагональ клетки, в $\sqrt{2}$ раз больше стороны клетки.

Другими словами, диагональ равнобедренного прямоугольного треугольника в $\sqrt{2}$ раз длиннее его катетов.

Можно доказать, что число $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде дроби с целым числителем и знаменателем. Другими словами, уравнение $(m/n)^2 = 2$ нельзя решить, если в качестве m и n брать только целые числа. Как говорят, число $\sqrt{2}$ *иррационально* (рациональными называют дроби с целым числителем и знаменателем), и это знали уже древние греки.

Почему число $\sqrt{2}$ иррационально? Предположим, что оно рационально, тогда его можно записать в виде несократимой дроби m/n (пока дробь сократима — сокращаем). Уравнение $(m/n)^2 = 2$ можно переписать в виде $m^2 = 2n^2$. Сразу же видно, что m чётно, иначе левая часть была бы нечётной, а правая всегда чётна. (Любое нечётное число можно записать в виде $(2k+1)$; его квадрат равен $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, и потому будет нечётным числом.) Зная, что m чётно, запишем его в виде $2u$, тогда $m^2 = 4u^2 = 2n^2$ и $2u^2 = n^2$. Теперь видно, что n тоже должно быть чётным, иначе правая часть нечётна, а левая чётна. Но тогда дробь m/n можно сократить — противоречие.

Можно было бы сказать и короче: дробь m/n несократима, значит, в разложении на простые множители чисел m и n нет общих множителей. Значит, и в разложении m^2 и n^2 (в них те же множители, что в m и n) нет общих множителей, и потому дробь m^2/n^2 тоже несократима. С другой стороны, она сокращается до 2 — противоречие. Но это рассуждение использует однозначность разложения на простые множители (так называемую *основную теорему арифметики*).

Иррациональность $\sqrt{2}$ означает, что сторона квадрата и его диагональ не имеют *общей меры*, то есть что нельзя найти отрезок, который укладывался бы в той и в другой целое число раз. (Если он укладывается m раз в диагонали и n раз в стороне, то отношение их длин будет равно m/n, а оно иррационально.) Как говорят, диагональ квадрата и его сторона *несоизмеримы.* (Подробнее см. в разделе 32.)

Древние греки вообще не рассматривали никаких чисел, кроме рациональных. Поэтому для них несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали была особенно поразительной: это означало, что отношение диагонали к стороне вообще не является числом.

Хотя $\sqrt{2}$ и нельзя записать в виде простой (или конечной десятичной) дроби, его можно найти с любой нужной нам точностью. Будем пробовать $1{,}1^2 = 1{,}21$, $1{,}2^2 = 1{,}44$, $1{,}3^2 = 1{,}69$, $1{,}4^2 = 1{,}96$ — всё ещё мало, но $1{,}5^2 = 2{,}25$ — уже много. Значит, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Теперь можно пробовать $1{,}41^2 = 1{,}9881$ — мало, $1{,}42^2 = 2{,}0164$ — уже много. Значит, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, то есть $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ и так далее (можно найти сколько угодно цифр после запятой). Примерно это и делает калькулятор (на самом деле там чуть более сложный, но более быстрый алгоритм).

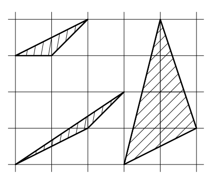
Ещё несколько задач

524. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны площади треугольников ABC, ABD и ACD. Как, зная их, найти площадь треугольника BCD?

525. Один фут (единица измерения в США и Великобритании) равен 30,48 см. Что больше: десять квадратных футов или один квадратный метр?

526. В футе 12 дюймов. Сколько квадратных дюймов в квадратном футе?

527. Одну сторону прямоугольника увеличили на 10%, а другую уменьшили на 10% (проценты берутся от длины соответствующей стороны). Увеличилась при этом площадь прямоугольника или уменьшилась? А периметр (сумма длин сторон)?



528. Найдите площади треугольников на рисунке.

529. Может ли площадь треугольника с вершинами в узлах квадратной сетки со стороной 1 быть равна $1/3$?

530. Нарисуйте треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки со стороной 1, у которого все стороны длиннее 4, а площадь меньше 1.

531. Могут ли три высоты треугольника иметь длины $1/2$, $1/3$ и $1/6$?

532. Две высоты треугольника (опущенные из двух вершин на противоположные стороны или их продолжения) равны 2 и 3. Чему может быть равна третья высота?

533. На сторонах квадрата взяты четыре точки, делящие эти стороны в отношении $1:2$ (считая по часовой стрелке). По задаче 217 эти точки являются вершинами квадрата. Какова площадь этого квадрата, если площадь исходного равна S?

534. Середины сторон треугольника являются вершинами меньшего треугольника. Найдите его площадь, если площадь исходного треугольника равна S.

535. Две медианы делят треугольник площади S на четыре части. Найдите площади этих частей.

536. В треугольнике ABC на медиане AM взята произвольная точка X. Она соединена с точками B и C. Укажите на получившемся рисунке три пары равновеликих треугольников.

537. В треугольнике ABC взята точка X, причём треугольники AXB и AXC оказались равновеликими. Докажите, что точка X лежит на медиане AM. ⟨Продолжим AX до пересечения со стороной BC в точке M. Покажите, что треугольники AMB и AMC равновелики.⟩

538. Точка K лежит на стороне AC треугольника ABC, а точка O лежит на отрезке BK. Докажите, что отношение площадей треугольников AOB и COB равно $AK : KC$.

539. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки M, K и L соответственно, причём отрезки AK, BL и CM проходят через одну точку. Докажите, что произведение трёх отношений $AM : MB$, $BK : KC$ и $CL : LA$ (все они записаны в направлении по часовой стрелке) равно единице. ⟨Как выразить эти отношения в виде отношений площадей треугольников?⟩

540. Докажите обратное утверждение: если на сторонах AB, BC и CA взяты точки M, K и L, для которых произведение трёх отношений $AM : MB$, $BK : KC$ и $CL : LA$ равно единице, то отрезки AK, BL и CM проходят через одну точку. ⟨Если надо, подвинем одну из точек K, L, M так, чтобы три отрезка прошли через одну точку, а затем заметим, что она не подвинулась, так как произведение отношений осталось прежним.⟩

Утверждения двух предыдущих задач вместе называют *теоремой Чевы* (в честь итальянского математика XVII века).

541. В четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали, которые пересекаются в точке O. Они делят его на четыре треугольника, из которых два, примыкающие к противоположным сторонам AB и CD, оказались равновеликими. Докажите, что четырёхугольник — трапеция.

542. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых S_1, S_2, S_3 и S_4. Как найти S_4, если известны S_1, S_2 и S_3?

543. Середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма (задача 282). Какова площадь этого параллелограмма, если площадь исходного четырёхугольника равна S? ⟨Этот параллелограмм получается отрезанием четырёх треугольников; докажите, что сумма площадей двух противоположных из них равна $S/4$.⟩

544. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей (точнее, длин этих диагоналей).

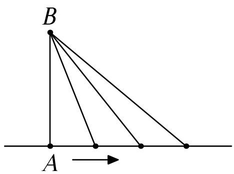
Верно и более общее утверждение:

545. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что его площадь равна половине произведения длин диагоналей.

546. Докажите, что если изменить четырёхугольник, сохранив прежними длины его диагоналей и угол между ними, то площадь четырёхугольника не изменится.

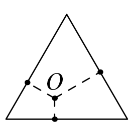
547. Дан треугольник ABC. Как найти такую точку M, чтобы все три треугольника ABM, ACM и BCM были бы равновелики? Как получить новое доказательство того, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке?

548. По неподвижной прямой l равномерно движется точка A, а лежащие вне этой прямой точки B и C неподвижны. Докажите, что площадь треугольника ABC либо вовсе не меняется, либо сначала равномерно уменьшается, а затем равномерно увеличивается. (Равномерность означает, что за равные промежутки времени расстояние уменьшается или увеличивается на одинаковую величину.)

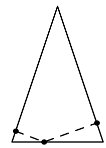


549. Точка A движется по прямой с постоянной скоростью, а лежащая вне прямой точка B неподвижна. Докажите, что за равные промежутки времени отрезок AB заметает равные площади. (На рисунке отмечены положения точки A через равные промежутки времени; надо доказать, что образующиеся треугольники равновелики.)

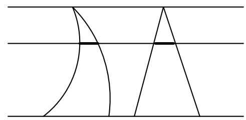
Это утверждение можно рассматривать как частный случай *второго закона Кеплера* (1571–1630): при обращении планеты вокруг Солнца отрезок, соединяющий планету с Солнцем, за равные промежутки времени заметает равные площади. Наша задача соответствует случаю, когда планета далеко от Солнца: тогда притяжения практически нет, и она равномерно движется по прямой.



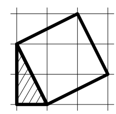
550. Внутри правильного треугольника взята произвольная точка O, из которой опущены три перпендикуляра на стороны треугольника. Докажите, что сумма этих перпендикуляров не зависит от положения точки O внутри треугольника. (Эта задача у нас уже была под номером 275, но теперь её можно решить проще, используя площади.) ⟨Соедините точку O с вершинами треугольника: треугольник разобьётся на три треугольника, сумма площадей которых постоянна.⟩



551. Решите задачу 228 с помощью площадей: докажите, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из какой-то точки основания равнобедренного треугольника на его боковые стороны, одинакова для всех точек основания.



552. Принципом Кавальери называют следующее утверждение: если две фигуры на плоскости таковы, что любая горизонтальная прямая пересекает их по равным отрезкам, то эти фигуры имеют равную площадь. (Неформально говоря, можно одну из фигур разрезать на бесконечное число бесконечно тонких отрезков, а потом сдвинуть их по горизонтали и получить другую фигуру.) Покажите, как решить некоторые из разобранных нами задач с помощью этого принципа.



553. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 (считая сторону клетки за единицу), постройте на его диагонали квадрат и найдите площадь этого квадрата. Выведите отсюда, что диагональ прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 равна $\sqrt{5}$.

Мы используем аналогичное рассуждение дальше, при доказательстве знаменитой теоремы Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. В данном случае $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2^2$.

554. По углам квадратного бассейна растут четыре дерева. Как увеличить площадь бассейна вдвое, не трогая их (и оставив бассейн квадратным)?

555. Докажите, что площадь круга радиуса r не меньше $2r^2$ и не больше $4r^2$, сравнив его со вписанным и описанным квадратами.

Точная формула для площади круга радиуса r говорит, что она равна πr^2, где греческая буква π (читается: «пи») обозначает константу 3,1415926... Утверждение этой задачи означает, что $2 \leqslant \pi \leqslant 4$.

556. Назовём диагональ выпуклого пятиугольника «хорошей», если она параллельна одной из его сторон. Докажите, что если четыре диагонали данного пятиугольника хорошие, то и пятая — тоже хорошая. ⟨Эта задача не случайно отнесена к разделу о площадях: диагональ AC пятиугольника $ABCDE$ хороша в том и только том случае, когда площади двух треугольников BDE и CDE равны.⟩

557. Рассказывают, что на каком-то тесте по математике была дана задача: «Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а опущенная на неё высота равна 6. Чему равна площадь треугольника?». Легенда гласит, что хорошие ученики получили за этот пункт теста мало очков, а плохие — много. Как вы думаете, почему такое могло случиться?

558. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Какую максимальную площадь может иметь этот треугольник?

559. Две стороны треугольника равны a и b. Какую максимальную площадь может иметь этот треугольник?

560. Прямоугольник имеет периметр (сумму сторон) 4. Докажите, что площадь этого прямоугольника не больше 1. ⟨Приложим его к квадрату со стороной 1, наложив один из углов прямоугольника на один из углов квадрата. Как доказать, что выступающая часть квадрата больше выступающей части прямоугольника? Можно также доказывать алгебраически, заметив, что если одна сторона прямоугольника периметра 4 равна $1+x$, то другая равна $1-x$.⟩

561. Прямоугольник имеет периметр не больше 4. Докажите, что его площадь не больше 1.

562. Параллелограмм имеет периметр не больше 4. Докажите, что его площадь не больше 1.

На самом деле любой четырёхугольник периметра 4 (или меньше) имеет площадь не более 1, но это доказать сложнее.

563. Имеется невыпуклый четырёхугольник. Как построить выпуклый четырёхугольник с теми же сторонами, но большей площади?

564. Дан выпуклый четырёхугольник со сторонами a, b, c, d (перечислены по часовой стрелке). Как построить выпуклый четырёхугольник со сторонами a, c, b, d, имеющий ту же площадь?

565. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника со сторонами a, b, c, d не превосходит $(ab+cd)/2$. Докажите, что равенство тут возможно только для четырёхугольников, которые могут быть вписаны в окружность.

566. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника со сторонами a, b, c, d не превосходит $(ac+bd)/2$, и равенство возможно только для четырёхугольников, вписанных в окружность.

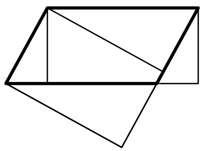
Говорят, что два многоугольника *равносоставлены*, если один из них можно разрезать на многоугольные части, из которых сложить другой. (Мы видели в задаче 508, что треугольник равноставлен с параллелограммом, а в задаче 509 — что параллелограмм равносоставлен с прямоугольником.

Из определения ясно, что если многоугольник A равносоставлен с B, то и B равносоставлен с A (оба многоугольника можно сложить из одних и тех же частей). Это свойство называют *симметричностью*. Другое очевидное свойство — *рефлексивность*: каждый многоугольник равносоставлен сам с собой (достаточно одной части). Третье свойство, которое сначала выглядит неожиданно, но на самом деле тоже несложно, называют *транзитивностью*:

567. Докажите, что если многоугольник A равносоставлен с многоугольником B, а многоугольник B равносоставлен с многоугольником C, то A и C равносоставлены. ⟨Отметим на B, как его надо разрезать, чтобы из частей потом составить A. Потом отметим отдельно, как надо разрезать, чтобы из частей получился C. Теперь разрежем по тем и другим линиям.⟩

568. Докажите, что всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.

569. Докажите, что квадрат со стороной $\sqrt{2}$ и прямоугольник 1×2 равносоставлены.



570. На рисунке показан параллелограмм, из вершин которого опущены высоты на его стороны. Найдите там два прямоугольника и докажите, что они имеют одинаковую площадь и равносоставлены.

571. Докажите, что любые два прямоугольника равной площади равносоставлены. $\langle$Чтобы доказать, что прямоугольник $a \times b$ равносоставлен с прямоугольником $a' \times b'$ (пусть $a < a'$), постройте параллелограмм со сторонами a' и b, имеющий равную площадь с обоими прямоугольниками.$\rangle$

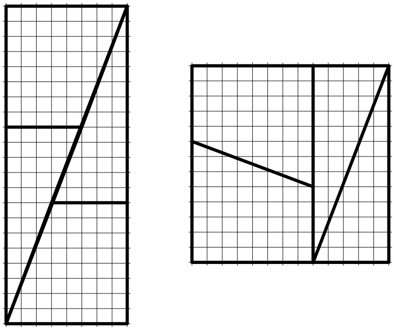
572. Докажите, что любой параллелограмм равносоставлен с некоторым прямоугольником, одна из сторон которого равна 1. Докажите то же самое для треугольников. Докажите то же самое для произвольных многоугольников.

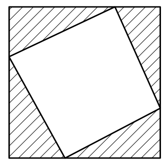
573. Докажите, что любые два многоугольника равной площади равносоставлены.

Это утверждение называют *теоремой Бойяи–Гервина.* (Интересно, что у Евклида её нет — она была доказана только в XIX веке.)

Для многогранников это уже не так: нельзя разрезать правильный тетраэдр на многогранные части, из которых составить куб. Вопрос об этом был поставлен знаменитым немецким математиком Давидом Гильбертом на математическом конгрессе 1900 года (под номером 3 в списке важнейших нерешённых проблем в математике) и получил название «третьей проблемы Гильберта»; уже через год ответ (с очень красивым и оригинальным доказательством) был дан учеником Гильберта, Максом Деном.

574. В книжке Мартина Гарднера «Математические чудеса и тайны» есть картинка с двумя равносоставленными прямоугольниками разной площади. (Посчитайте площадь на рисунке по клеточкам: $8 \times 21 = 168$ в одном, $13 \times 13 = 169$ в другом). Как так может быть? Объясните, в чём тут подвох.



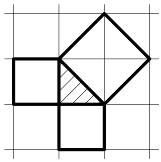


575. Четырёхугольник вписан в квадрат (на каждой стороне квадрата лежит по вершине четырёхугольника). Оказалось, что четыре оставшихся от квадрата треугольника имеют равные площади. Докажите, что эти треугольники равны.

576. Более быстрый способ приближённого вычисления квадратного корня из 2 состоит в следующем. Пусть какое-то приближение x уже найдено. Тогда x и $2/x$ лежат по разные стороны от $\sqrt{2}$ (почему?) и в качестве следующего приближения можно взять их среднее арифметическое $\frac{1}{2}(x + 2/x)$. Например, если $x = 1$, то $2/x = 2$ и следующее приближение будет средним арифметическим 1 и 2, то есть 1,5. Сколько раз нужно повторить этот процесс, чтобы получить ошибку меньше 1/10000? Может ли после 10 повторений ошибка быть больше 10^{-100}? $\langle$Если x — текущее приближение, а $y = (1/2)(x + 2/x)$ — следующее, то $y^2 - 2 = (x^2 - 2)^2/(4x^2)$, так что отклонения квадрата от 2 очень быстро убывают.$\rangle$

28. Теорема Пифагора

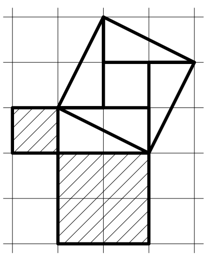
В этом разделе мы разными способами докажем знаменитую теорему Пифагора: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. Начнём с повторения уже разбиравшихся примеров.



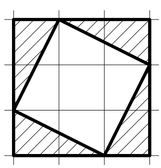
577. Нарисуйте на клетчатой бумаге равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным стороне клетки, и проверьте для него *теорему Пифагора*: площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

▷ Квадраты, построенные на катетах, имеют единичную площадь. Квадрат, построенный на гипотенузе, разбивается на четыре треугольника, каждый из которых составляет половину квадрата сетки, и потому имеет площадь 2 — как и требуется. ◁

578. Проверьте теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2.



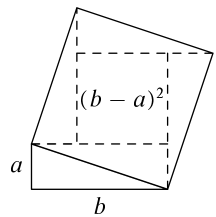
▷ Квадраты, построенные на катетах, имеют площадь 1 и 4. Остаётся найти площадь квадрата, построенного на гипотенузе. Это можно сделать двумя способами. Во-первых, его можно разрезать на 4 треугольника и центральный квадрат. Треугольники равны исходному (катеты 1 и 2) и имеют площадь 1. Площадь четырёх таких треугольников равна 4, да ещё единичный квадрат в центре, всего получается 5, как и требовалось.



Другой способ вычислить площадь квадрата, построенного на гипотенузе, состоит в том, чтобы обложить его с четырёх сторон треугольниками, дополнив до большого квадрата. Добавив четыре треугольника, равных исходному, мы получим квадрат $3 \times 3 = 9$, таким образом, искомая площадь равна $9 - 4 = 5$. ◁

579. Докажите теорему Пифагора в общем случае, разрезав построенный на гипотенузе квадрат на четыре треугольника и внутренний квадрат.

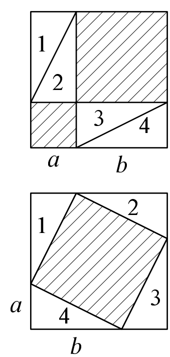
$\triangleright$ Пусть катеты исходного треугольника равны a и b (считаем, что $a < b$) и на его гипотенузе c построен квадрат. Разрежем этот квадрат как на рисунке. Более подробно, построим на каждой стороне квадрата (внутри него) прямоугольный треугольник, равный исходному. Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, эти треугольники уложатся без щелей. Останется квадрат: в самом деле, каждая из сторон оставшейся части равна $b - a$, а все углы прямые. Таким образом, квадрат со стороной c разрезан на четыре треугольника, равные исходному (площадь каждого $ab/2$, всего $2ab$), и квадрат со стороной $b - a$ и площадью $(b - a)^2$. В сумме имеем



$$2ab + (b - a)^2 = 2ab + b^2 + a^2 - 2ab = a^2 + b^2,$$

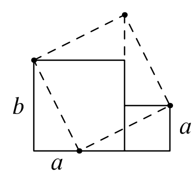
как и говорит теорема Пифагора. $\triangleleft$

Вместо разрезания квадрата на части можно было бы дополнить его до большего квадрата. Это доказательство можно сделать совсем наглядным. Рассмотрим два способа разрезать квадрат со стороной $a+b$ на части (см. рисунок). В первом случае получаются квадрат $a \times a$, квадрат $b \times b$ и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b. Во втором случае получаются те же четыре треугольника и один большой квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b. Поэтому суммарная площадь двух квадратов со сторонами a и b равна площади большого квадрата.

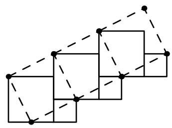


Другими словами, интересующие нас фигуры (одна составлена из двух квадратов катетов, вторая — квадрат гипотенузы) равновелики по дополнению: добавив к ним одни и те же четыре треугольника, можно получить одинаковые квадраты.

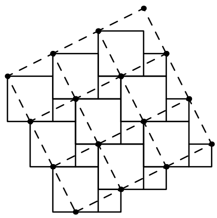
580. Используя рисунок, объясните, как можно любые два квадрата разрезать на пять частей и сложить из них один квадрат.



$\triangleright$ Пусть стороны квадратов равны a и b, причём $a < b$. Приложим квадраты друг к другу как на рисунке (слева больший, со стороной b) и отложим (слева) на нижней стороне большего квадрата отрезок, равный a. Соединим полученную точку с левым верхним и правым верхним углами картинки и сделаем разрезы по этим линиям. Получатся два прямоугольных треугольника со сторонами a и b (один цельный, другой составлен из двух частей). Пристроим их сверху как на рисунке — получится квадрат. $\triangleleft$

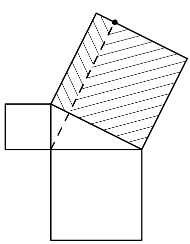


Картинка из предыдущей задачи может быть основой для замощения плоскости квадратными плитками. Фигуру, составленную из двух квадратов (большего и меньшего), можно повторять периодически, помещая левый нижний угол следующей фигуры в выемку предыдущей (см. рисунок). Получится полоска, в которой оба края (нижний и верхний) — «лесенка» одной и той же формы. Теперь, используя такие полоски как паркетные доски и прикладывая их друг к другу, можно замостить всю плоскость.



Пунктирные линии показывают, что вместо пары квадратов со сторонами a и b можно было бы использовать один квадрат со стороной c, где c — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b. При этом по-прежнему будет замощение всей плоскости без пробелов и перекрытий. Значит, площади обеих фигур ($a^2 + b^2$ и c^2) одинаковы, так что мы вновь приходим к теореме Пифагора.

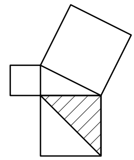
Теорему Пифагора можно переформулировать так: квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, можно разрезать на две части, равновеликие квадратам, построенным на его катетах. Следующая задача показывает, какими могут быть эти части.



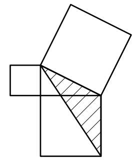
581. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты. Высота, опущенная из прямого угла, продолжена и разрезает построенный на диагонали квадрат на два прямоугольника. Докажите, что они равновелики квадратам, построенным на катетах.

$\triangleright$ Решение этой задачи проще всего пояснить последовательностью картинок.

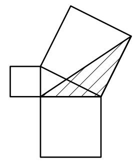
Нам нужно доказать, что каждый из заштрихованных прямоугольников равновелик квадрату, построенному на (соответствующем) катете. Удобно перейти к половинкам, разрезав квадрат и прямоугольник по диагонали. (Если половинки двух фигур равновелики, то и сами фигуры равновелики.)



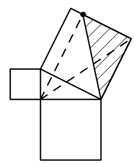
Возьмём треугольник, составляющий половину квадрата катета. Мы уже видели, что можно сдвигать вершину треугольника параллельно противолежащей стороне, и площадь треугольника от этого не меняется. Сдвинем левую вершину вверх, получим другой треугольник той же самой площади.



Теперь повернём этот треугольник по часовой стрелке на 90° вокруг тупого угла. Получим другой треугольник, равный предыдущему по двум сторонам и углу между ними.



Теперь вспомним о высоте, опущенной из прямого угла и продолженной за гипотенузу. Мы снова можем сдвинуть вершину треугольника вдоль этой высоты без изменения его площади.



Все: мы получили треугольник, составляющий половину нужного прямоугольника. (Рассуждение для квадрата другого катета ровно такое же: нарисуйте соответствующие картинки сами.) ◁

Теорема Пифагора позволяет найти гипотенузу c прямоугольного треугольника по его катетам a и b по формуле

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Наоборот, зная гипотенузу и один катет, можно найти второй:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

582. Найдите высоту и площадь правильного треугольника со стороной a.

▷ В равнобедренном треугольнике высота совпадает с медианой (и биссектрисой). Значит, она делит правильный треугольник на два прямоугольных треугольника, в которых гипотенуза равна a, один из катетов равен $a/2$, а высота h является другим катетом. Значит, её можно найти по формуле:

$$h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Соответственно, площадь правильного треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 гипотенуза, найденная по теореме Пифагора, оказывается целым числом: она равна $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Так бывает, естественно, не всегда: взяв наугад два целых катета a и b, мы скорее всего не получим точного квадрата ($a^2 + b^2$ не будет квадратом целого числа). Скажем, для треугольника с катетами 3 и 5 получится $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$, и гипотенуза $\sqrt{34}$ не будет целым числом. Однако указанный нами пример прямоугольного треугольника с целыми сторонами не единственный.

583. Укажите ещё несколько других примеров прямоугольных треугольников с целыми сторонами.

▷ Во-первых, можно умножить катеты треугольника на любое целое число. Скажем, вместо треугольника с катетами 3 и 4 (и гипотенузой 5) можно взять треугольник с вдвое бо́льшими катетами 6 и 8. Его гипотенуза будет равна

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 = 2 \cdot 5.$$

Вообще, если умножить катеты на число k, то гипотенуза, найденная по теореме Пифагора, тоже умножится на k:

$$\sqrt{(ka)^+(kb)^2} = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} = \\ = \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} = k\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Но есть и более интересные примеры. Можно, например, искать их среди треугольников, у которых гипотенуза на единицу длиннее катета. Если катет равен a, а гипотенуза $a + 1$, то второй катет равен

$$\sqrt{(a+1)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 1 - a^2} = \sqrt{2a+1}.$$

Нужно только, чтобы второй катет был целым, то есть чтобы число $2a + 1$ было точным квадратом. Но это несложно: любое нечётное число имеет вид $2a + 1$, так что надо просто найти нечётные точные квадраты: $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$ и так далее. При $2a + 1 = 9$ получаем $a = 4$, то есть треугольник с катетами 3 и 4 (уже был). При $2a + 1 = 25$ получаем $a = 12$, то есть треугольник с катетами 12 и 5. Его гипотенуза равна $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$. Как мы и обещали, она на 1 длиннее катета. $\triangleleft$

584. Какой следующий прямоугольный треугольник с целыми сторонами получится таким способом?

Целые числа a, b, c, для которых $a^2 + b^2 = c^2$, называют *пифагоровыми тройками*.

585. Покажите, что для любых целых положительных m и n с $m > n$ числа $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ образуют пифагорову тройку. При каких значениях m и n получатся уже известные нам тройки $3, 4, 5$ и $5, 12, 13$?

$\triangleright$ Можно долго гадать, откуда взялись такие формулы, но проверить, что числа a, b, c образуют пифагорову тройку, совсем несложно:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 = \\ = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Известные нам тройки получаются по этой формуле при $m = 2$, $n = 1$ и при $m = 3$, $n = 2$ (легко найти подбором, вариантов совсем немного). $\triangleleft$

В «Началах» Евклида (древнегреческом учебнике геометрии, около 300 лет до Р. Х.) доказано, что, применяя два упомянутых нами приёма (формулу последней задачи и умножение всех чисел тройки на одно и то же k), можно получить все пифагоровы тройки.

Если вы когда-нибудь окажетесь на необитаемом острове и вам захочется построить прямой угол, а ничего, кроме прочной верёвки, под рукой не будет, то можно воспользоваться пифагоровыми тройками. Вот как это делается.

Завяжите на верёвке два узла на каком-то расстояния, а потом отложите это же расстояние (сложив вместе два куска верёвки) 12 раз и свяжите верёвку в кольцо. Получится верёвочное кольцо, разбитое на 12 равных участков. Теперь вспомните, что $12 = 3 + 4 + 5$, возьмите три колышка и…

586.…и что надо делать дальше?

▷ Колышки надо вбить в землю, натягивая на них верёвочное кольцо, с таким расчётом, чтобы образовался треугольник со сторонами 3, 4, 5 (удобнее всего, наверно, сначала вбить колышки на расстоянии 5, а потом вбить третий колышек в нужном месте, натягивая верёвку). По теореме Пифагора получится прямоугольный треугольник. ◁

Иногда рассказывают, что такой метод применяли древние египтяне, которым нужно было строить пирамиды с прямыми углами, и даже называют треугольник со сторонами $3, 4, 5$ «египетским треугольником». Римский историк Плутарх (I–II век от Р. Х.) писал в одной из своих книг: «И, видимо, египтяне сравнивают природу Всеобщности с красивейшим из треугольников, так что Платон в „Государстве", кажется, воспользовался им, сочиняя символическое обозначение брака. Этот треугольник имеет катет из трёх частей, основание — из четырёх и гипотенузу — из пяти, причем сила [квадрат] её равна силе [сумме сил] двух других сторон. Таким образом, катет можно считать мужским началом, основание — женским, а гипотенузу — отпрыском обоих. Также Осириса можно считать началом, Исиду — вместилищем, а Гора — исходом. К тому же „три"является первым нечётным и совершенным числом; „четыре" — это квадрат, стороны которого — чётные двойки; „пять" же частью походит на отца, частью — на мать, будучи составлено из тройки и двойки» (перевод Н. Н. Трухиной). Впрочем, в сохранившихся египетских папирусах математического содержания (один из них хранится в Москве, ещё один — в Лондоне) прямого указания на использование такого треугольника для построения прямых углов нет.

Педант отметил бы, что при изложенном построении прямого угла используется не теорема Пифагора, а *обратная* к ней: если в треугольнике квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других, то противолежащий ей угол прямой.

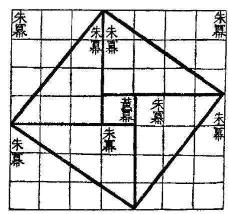
587. Докажите эту теорему, используя теорему Пифагора.

$\triangleright$ Это совсем просто. Пусть в треугольнике со сторонами a, b, c выполнено равенство $a^2+b^2 = c^2$. Докажем, что он прямоугольный. Построим прямоугольный треугольник с катетами a и b. Его гипотенуза по теореме Пифагора равна

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2} = c.$$

Остаётся заметить, что этот треугольник равен исходному (по трём сторонам), и потому углы в них тоже равны. Значит, исходный треугольник был прямоугольным. $\triangleleft$

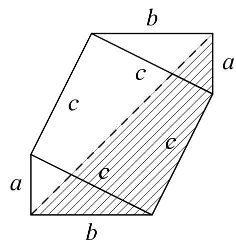
Ещё несколько задач



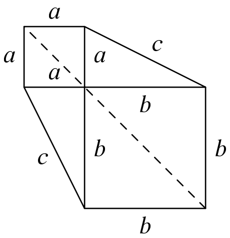
588. Пользуясь этим рисунком из старинной китайской рукописи, воспроизведите доказательство теоремы Пифагора для частного случая и покажите, что диагональ прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 равна 5.

589. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 нарисована окружность с центром в одной из вершин клеток и радиусом 5. Через сколько вершин клеток пройдёт такая окружность?

Эту задачу полезно иметь в виду, если надо нарисовать на клетчатой бумаге красивую окружность.



590. Доказательство теоремы Пифагора, приписываемое Леонардо да Винчи, состоит в следующем. Добавим к квадрату, построенному на гипотенузе c прямоугольного треугольника со сторонами a и b, ещё один такой же треугольник с другой стороны. Получится шестиугольник. Другой шестиугольник строим так: возьмём два квадрата со сторонами a



и b, совместим их углы и дополним двумя треугольниками до шестиугольника.

Нам надо показать, что площади этих шестиугольников равны (вычитая треугольники, мы получим, что $a^2 + b^2 = c^2$). Покажите, что разрезав шестиугольники по длинной диагонали, мы получим равные части, только приложенные по-разному.

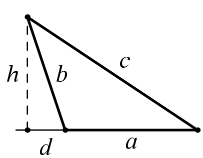
591. Используя картинку с двумя вписанными друг в друга квадратами (доказательство теоремы Пифагора на с. 169), докажите, что центр квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, совпадает с центром большого квадрата и потому лежит на биссектрисе прямого угла. (Получается другое решение задачи 471.)

592. Как поместить внутрь круга радиуса r шесть примыкающих друг к другу правильных треугольников со стороной r? Что из этого можно заключить про площадь круга радиуса r?

593. Чему равна площадь равнобедренного треугольника, у которого основание имеет длину a, а один из углов равен 120°?

594. Найдите длину высоты прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, опущенной на гипотенузу. ⟨Чему равна площадь этого треугольника?⟩

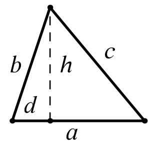
Теорема Пифагора утверждает, что квадрат стороны c, лежащей против прямого угла треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон. Обратную теорему можно переформулировать так: если угол в треугольнике не прямой, то квадрат лежащей против него стороны *не* равен сумме квадратов двух других сторон. Другими словами, он должен быть больше или меньше. Возникает естественный вопрос: когда он больше, а когда он меньше? и на сколько? Следующие задачи дают ответ на этот вопрос.



595. Сторона c лежит против тупого угла треугольника, a и b — две другие стороны этого треугольника. Докажите, что c^2 больше $a^2 + b^2$ на величину, равную удвоенному произведению стороны

a на проекцию стороны b на сторону a (см. рисунок): $c^2 = a^2 + b^2 + 2ad$. ⟨Примените теорему Пифагора к двум прямоугольным треугольникам: с катетами d и h, а также с катетами $a + d$ и h.⟩

596. Сторона c лежит против острого угла треугольника, a и b — две другие стороны этого треугольника. Докажите, что c^2 меньше $a^2 + b^2$ на величину, равную удвоенному произведению стороны a на проекцию стороны b на сторону a (см. рисунок): $c^2 = a^2 + b^2 - 2ad$.



В курсе тригонометрии утверждения двух предыдущих задач называют *теоремой косинусов*.

597. Докажите, что сумма квадратов четырёх сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей. ⟨Соединим две вершины диагональю и опустим из двух других вершин перпендикуляры на эту диагональ. Выразите входящие в условие задачи величины через длины возникающих при этом отрезков.⟩

Используя теорему косинусов (задачи 595 и 596) и навыки алгебраических преобразований, можно доказать *формулу Герона* (названную в честь Герона Александрийского, греческого математика, жившего в первом веке до Р.Х.):

598. Докажите, что площадь треугольника со сторонами a, b, c может быть найдена по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = (a + b + c)/2$ — полупериметр треугольника. ⟨По задачам 595 и 596 можно найти d, после чего найти h по теореме Пифагора и S как $ah/2$.⟩

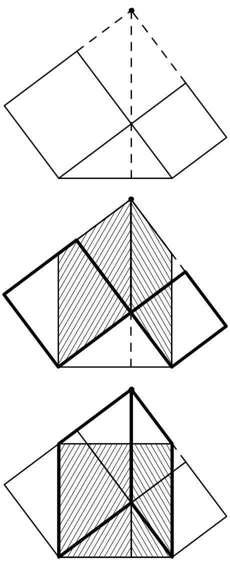
Подставив выражение для p в формулу, мы получим

$$S = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{16}}.$$

Видно, что когда треугольник сплющивается и сумма двух его сторон приближается к третьей, то одна из скобок стремится к нулю, и площадь тоже, как и следовало ожидать. Из этих соображений можно запомнить три скобки, четвёртая нужна по соображениям размерности, и она должна быть симметрична относительно a, b, c.

599. Как, используя формулу Герона, найти радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами a, b, c?

600. Известны стороны треугольника. Как найти длину его медиан? ⟨Продолжив медиану, можно достроить треугольник до параллелограмма и воспользоваться задачей 597.⟩



Ещё один вариант доказательства теоремы Пифагора (см. рисунки на полях): продолжим верхние стороны квадратов, построенных на катетах, до пересечения; это пересечение окажется на продолжении высоты треугольника (почему?).

Скосим теперь квадраты, построенные на катетах, чтобы длинные стороны соответствующих параллелограммов стали вертикальными.

После этого снова сделаем их прямоугольниками, и эти прямоугольники заполнят квадрат, построенный на диагонали.

601. Дайте обоснование для всех шагов этого рассуждения (и тем самым завершите ещё одно доказательство теоремы Пифагора).

29. Подобие

Говоря неформально, подобные объекты — это объекты одинаковой формы, но (возможно) разных размеров.

602. Приведите несколько примеров подобных объектов из «реальной жизни».

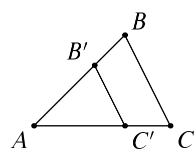
▷ Фотографии разного размера, отпечатанные с одного и того же негатива (как сказали бы раньше) или файла (в цифровой фотографии). Настоящий автомобиль и его модель (если она выполнена точно в масштабе). Все круги подобны. Все квадраты подобны. Все равносторонние треугольники подобны. ◁

Иногда кажущиеся подобными объекты на самом деле не подобны. Например, фотографии одного и того же здания, сделанные с разных расстояний, не совсем подобны (при подходе к зданию видимые пропорции немного меняются). То же самое можно сказать о бутылках и банках разных размеров, имеющих одинаковые крышки. Буквы типографского шрифта разных размеров (одного и того же типа шрифта — как говорят полиграфисты, одной *гарнитуры*) почти подобны, но не всегда в точности подобны (буквы меньшего размера бывают более приземисты).

Два треугольника *подобны*, если их соответственные углы равны и стороны одного в одно и то же число раз больше (или меньше) соответственных сторон другого. Это число называется *коэффициентом подобия.*

Обозначение $ABC \sim A'B'C'$ указывает, что треугольники ABC и $A'B'C'$ (соответственные вершины обозначены обозначены одинаковыми буквами) подобны.

603. Докажите, что первого условия уже достаточно: если углы одного треугольника равны углам другого, то стороны пропорциональны (отличаются в одно и то же число раз)



▷ Пусть ABC — больший треугольник, а $A'B'C'$ — меньший. Наложим меньший на больший так, чтобы вершины A и A' совместились, $A'B'$ пошло по AB и $A'C'$ пошло по AC (это возможно, так как углы A и A' равны). Тогда сторона $B'C'$ будет параллельной BC (поскольку углы B' и B равны). По теореме Фалеса (лучи света направлены вдоль BC) отрезок AB во столько же раз больше отрезка $A'B'$, во сколько его тень AC больше $A'C'$. Таким образом, из трёх отношений сторон

$$AB : A'B', \quad AC : A'C, \quad BC : B'C'$$

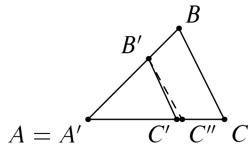
два первых равны. Но то же самое рассуждение можно провести и для другой вершины, и получится, что другие два отношения равны. Значит, равны все три. $\triangleleft$

604. Докажите обратное утверждение: если все стороны одного треугольника в одно и то же число раз больше соответственных сторон второго треугольника, то соответственные углы треугольников равны.

$\triangleright$ Пусть все стороны треугольника ABC в одно и то же число раз больше сторон треугольника $A'B'C'$. Применим такой трюк: построим треугольник $A''B''C''$, у которого все углы равны соответствующим углам треугольника ABC, а сторона $A''B''$ равна стороне $A'B'$. (Его можно построить по стороне и двум углам, третий угол автоматически получится правильным, так как сумма углов равна 180°.)

Теперь смотрите: по предыдущей задаче (603) треугольник $A''B''C''$ подобен ABC. В частности, все его стороны меньше сторон треугольника ABC в одно и то же число раз. Это же верно и для треугольника $A'B'C'$ — его стороны также меньше сторон треугольника ABC в одно и то же число раз. И это число будет одинаковым для обоих треугольников, так как $A'B' = A''B''$. Значит, треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ равны по трём сторонам, и углы у них тоже равны. Осталось вспомнить, что углы треугольника $A''B''C''$ были равны углам треугольника ABC. $\triangleleft$

605. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ углы A и A' равны. Кроме того, отношения сторон $A'B' : AB$ и $A'C' : AC$ равны. Докажите, что треугольники подобны.



▷ Наложим меньший треугольник (пусть это будет $A'B'C'$) на больший так, чтобы вершины A и A' совместились, $A'B'$ пошло по AB и $A'C'$ пошло по AC (это возможно, так как углы A и A' равны). Если мы докажем, что $B'C'$ стало параллельным BC, то всё будет сделано (можно воспользоваться уже решённой задачей 603: все три пары соответственных углов равны). Чтобы доказать это, сделаем так: проведём отрезок $B'C''$, параллельный BC, и докажем, что C'' совпадёт с C'. В самом деле, треугольники $AB'C''$ и ABC подобны (задача 603), значит, отношения $A'C'' : AC$ и $A'B' : AB$ равны и равны отношению $A'C' : AC$ по условию. Значит, $A'C''$ и $A'C'$ составляют одну и ту же долю AC и потому точки C' и C'' совпадают. ◁

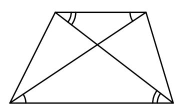
Три предыдущие задачи называют тремя признаками подобия: по *трём углам*, по *трём сторонам* и по *двум сторонам и углу*.

606. Какой из признаков нужно применить, чтобы доказать, что любые два равносторонних треугольника подобны?

▷ Годится любой из трёх: все углы равны 60°, отношения сторон равны (поскольку в каждом из треугольников все стороны равны). ◁

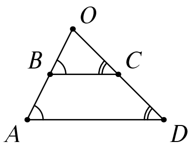
При решении задач очень важно увидеть на чертеже подобные треугольники.

607. В трапеции проведены диагонали. Какие треугольники подобны?



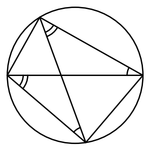
▷ Отмеченные на рисунке углы равны, поэтому примыкающие к основаниям трапеции треугольники подобны (поскольку имеют равные углы). ◁

608. Боковые стороны трапеции продолжены до пересечения. Какие треугольники подобны?



▷ Треугольники, образуемые боковыми сторонами трапеции с её основаниями, подобны (по трём углам): $OBC \sim OAD$. ◁

609. Во вписанном четырёхугольнике проведены диагонали. Найдите две пары подобных треугольников.

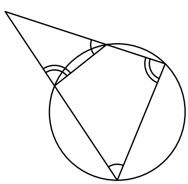


▷ Диагонали делят четырёхугольник на четыре треугольника. Отмеченные углы равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, поэтому противоположные треугольники подобны. (Можно ещё заметить, что третьи углы образуют пару вертикальных углов.)

Аналогично для другой пары треугольников. ◁

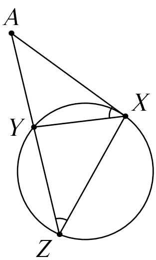
По сравнению с задачей о трапеции есть два отличия: во-первых, тут две пары подобных треугольников, во-вторых, соответственными являются другие пары сторон и углов.

610. Противоположные стороны вписанного четырёхугольника продолжены до пересечения. Найдите подобные треугольники.



▷ Противоположные углы вписанного четырёхугольника составляют в сумме 180°, поэтому отмеченные на рисунке углы равны. Значит, треугольники, в которые эти углы входят, подобны.

(Если продолжить другую пару противоположных сторон до пересечения, получится ещё пара подобных треугольников.) ◁



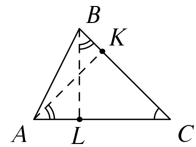
611. Из точки A, лежащей вне окружности, проведена касательная AX (причём X — точка касания), а также секущая, пересекающая окружность в точках Y и Z; точки X, Y и Z соединены отрезками. Найдите подобные треугольники.

▷ Оба угла AXY и XZA равны половине дуги XY, к тому же угол A в треугольниках AXY и AXZ общий, значит, они подобны. ◁

Последняя задача может рассматриваться как предельный случай предпоследней: когда одна сторона вписанного четырёхугольника стремится к нулю, секущая превращается в касательную.

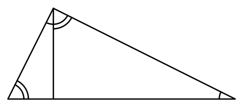
Для подобия прямоугольных треугольников достаточно равенство одной пары острых углов (поскольку прямые углы заведомо равны).

612. В остроугольном треугольнике из двух вершин опущены высоты на противоположные стороны. Найдите два подобных треугольника.



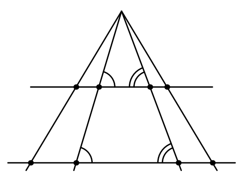
▷ Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AK и BL. Тогда получается два прямоугольных треугольника AKC и BLC, содержащих угол C. Поэтому они подобны. ◁

613. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла опущена высота на гипотенузу. Найдите три подобных треугольника.



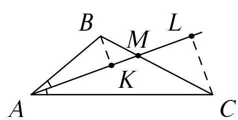
▷ На рисунке легко увидеть три прямоугольных треугольника: исходный треугольник и две части, на которые его делит высота. Каждая из частей имеет общий угол с исходным треугольником и потому ему подобна. ◁

614. Несколько лучей, выходящих из одной точки, пересекают две параллельные прямые. Найдите несколько пар подобных треугольников.



▷ Треугольники, ограниченные двумя соседними (или даже не обязательно соседними) лучами и параллельными прямыми, имеют равные углы и потому подобны. ◁

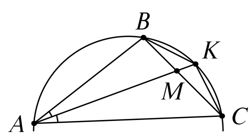
615. В треугольнике ABC из вершин B и C опущены высоты на биссектрису AM угла A. Найдите две пары подобных треугольников.



▷ Пусть BK и CL — эти высоты. В прямоугольных треугольниках ABK и ACL острые углы при вершине A равны (свойство биссектрисы), поэтому они подобны.

С другой стороны, прямоугольные треугольники BMK и CML тоже подобны, поскольку имеют одинаковые (вертикальные) углы при вершине M. ◁

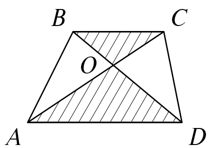
616. Биссектриса AM треугольника ABC продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке K. Найдите на рисунке три треугольника, которые все подобны друг другу.



▷ Мы уже знаем, что треугольники ABM и MKC подобны по трём углам — независимо от того, является AM биссектрисой или нет. Но если является, то треугольник ABM подобен и треугольнику AKC (углы B и K этих треугольников опираются на одну дугу, а углы при вершине A равны по определению биссектрисы. ◁

В следующих задачах мы пользуемся подобием обнаруженных нами треугольников.

617. Докажите, что в трапеции точка пересечения диагоналей делит обе диагонали в одном и том же отношении, равном отношению оснований трапеции.

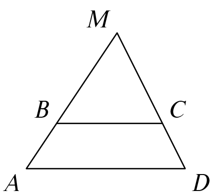


▷ Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Тогда треугольники AOD и COB, как мы видели, подобны. По свойству подобных треугольников

$$AO : OC = DO : OB = AD : BC,$$

что и требовалось доказать. ◁

618. Известны длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, а также длины её оснований AD и BC, причём $AD > BC$. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке M. Найдите расстояния от точки M до вершин трапеции.



▷ Как мы видели, треугольники AMD и BMC подобны. Их коэффициент подобия $k = AD/BC$ нам известен. Отрезок AM больше отрезка BM в k раз. Остаётся выполнить вычисления:

$$AM = k \cdot BM, \quad AB = AM - BM = (k-1)BM,$$

$$BM = AB/(k-1), \quad AM = AB \cdot k/(k-1)$$

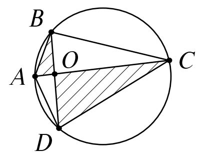
Подставляя выражение для k и делая аналогичные выкладки для второй боковой стороны, получаем

$$BM = \frac{AB \cdot BC}{AD - BC}, \quad AM = \frac{AB \cdot AD}{AD - BC},$$

$$CM = \frac{CD \cdot BC}{AD - BC}, \quad DM = \frac{CD \cdot AD}{AD - BC}.$$

Все четыре расстояния, таким образом, найдены. ◁

619. Дана точка, лежащая внутри окружности. Через неё проводят хорду, которая делится этой точкой на два отрезка, и вычисляют произведение длин этих отрезков. Докажите, что это произведение не зависит от того, как провести хорду.

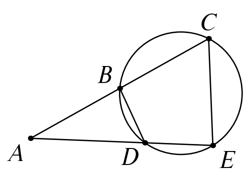


▷ Надо провести хорду двумя способами и показать, что произведение отрезков будет одинаковым. Другими словами, надо доказать, что если хорды AC и BD пересекаются в точке O, то $AO \cdot OC = BO \cdot OD$.

Соединив концы хорд, получим вписанный четырёхугольник, который делится диагоналями на две пары подобных треугольников. В частности, треугольники ABO и DCO подобны, и потому $AO : OD = BO : OC$. Умножая это равенство на $OC \cdot OD$, получаем искомое утверждение. ◁

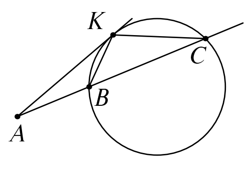
Можно было бы воспользоваться и двумя другими треугольниками (какими?) и получить то же равенство другим способом.

620. Дана точка A, лежащая вне окружности. Через неё проводят луч, пересекающий окружность в точках B и C. Докажите, что произведение $AB \cdot AC$ не зависит от того, какой луч провести.



▷ Пусть из точки A проведён ещё один луч, пересекающий окружность в точках D и E. Надо доказать, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. Соединив вершины четырёхугольника $BCED$, увидим знакомую картину: противоположные стороны вписанного четырёхугольника продолжены до пересечения. В этом случае треугольники ABD и AEC подобны, поэтому $AB : AE = AD : AC$. Умножая это равенство на $AE \cdot AC$, получаем искомое утверждение. ◁

621. Докажите, что произведение в предыдущей задаче равно квадрату длины касательной, проведённой к окружности из точки A.

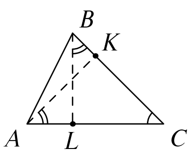


▷ Пусть из точки A выходит луч, пересекающий окружность в точках B и C, а также касательная AK. Как мы видели, треугольники ABK и AKC подобны, поэтому $AK : AC = AB : AK$. Умножая на $AK \cdot AC$, получаем, что $AK^2 = AB \cdot AC$, что и требовалось. $\triangleleft$

Эту задачу можно считать предельным случаем предыдущей, когда две точки пересечения сливаются, образуя точку касания. С другой стороны, из неё можно вывести предыдущую (ведь для каждой из двух секущих, о которых шла речь, произведение отрезков равно квадрату касательной).

Квадрат длины касательной, проведённой к окружности из некоторой точки, называют *степенью* этой точки относительно окружности. (Вообще-то из данной точки можно провести две касательные, но длины их одинаковы.) Теперь можно сказать, что произведение двух отрезков секущей (от данной точки до двух точек пересечения) равно степени точки.

622. Докажите, что в произвольном треугольнике высоты обратно пропорциональны сторонам, на которые они опущены (во сколько раз одна сторона больше другой, во столько раз опущенная на неё высота меньше).



$\triangleright$ Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AK и BL. Прямоугольные треугольники AKC и BLC имеют общий угол C. Поэтому они подобны, и отношение высот $AK : BL$ равно отношению сторон $AC : BC$. Другими словами, если одна сторона в k раз больше другой, то опущенная на неё высота в k раз меньше, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

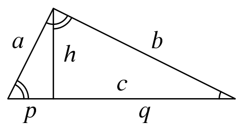
Другое решение этой задачи (как мы уже упоминали) получается с использованием площадей: удвоенная площадь треугольника равна произведению стороны на высоту, и можно взять любую сторону, поэтому если одна сторона больше другой, то опущенная на неё высота во столько же раз меньше. (См. задачу 515.)

623. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит его гипотенузу на два отрезка. Докажите, что

(1) высота равна среднему геометрическому этих отрезков (квадратному корню из произведения);

(2) каждый катет равен среднему геометрическому всей гипотенузы и отрезка, к нему прилегающего;

(3) отношение отрезков, на которые высота делит гипотенузу, равно квадрату отношения катетов.



▷ Пусть катеты треугольника равны a и b, гипотенуза равна c и делится высотой h на отрезки p и q. Из подобия двух частей треугольника получаем, что $p : h = h : q$, то есть $pq = h^2$ и $h = \sqrt{pq}$.

Части подобны целому треугольнику, поэтому $p : a = a : c$ и $pc = a^2$, откуда $a = \sqrt{pc}$. Аналогично $b = \sqrt{qc}$.

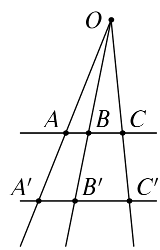
Наконец, $p : q = \dfrac{p}{h} \cdot \dfrac{h}{q} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = (a/b)^2$. ◁

624. Выведите из предыдущей задачи, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

▷ Используя те же обозначения, что и в решении предыдущей задачи, можно записать $pc = a^2$, $qc = b^2$. Если сложить эти равенства, получим, что $(p + q)c = a^2 + b^2$. Остаётся заметить, что два отрезка p и q в сумме дают c. ◁

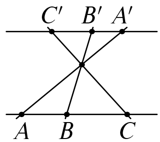
Таким образом, мы дали ещё одно доказательство теоремы Пифагора, на этот раз без всяких упоминаний о площадях.

625. Три прямые проходят через одну точку O и пересекают две параллельные прямые: одну в точках A, B, C, другую в точках A', B' и C'. Докажите, что $AB : BC = A'B' : B'C'$.



▷ Эту теорему можно сформулировать так: если точечный источник света O освещает две параллельные прямые, то отрезки на одной прямой относятся так же, как их тени на другой прямой.

Пусть A, B и C — точки на одной из прямых, а A', B' и C' — их тени. Треугольник $OA'B'$ подобен треугольнику OAB, и коэффициент подобия может быть записан как OA'/OA, OB'/OB или как $A'B'/AB$. Треугольники $OB'C'$ и OBC также подобны, и коэффициент подобия может быть записан как OB'/OB, OC'/OC или $B'C'/BC$. Значит, коэффициенты подобия равны (в обоих случаях они равны OB'/OB); обозначим этот общий коэффициент подобия через k. Тогда $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, и потому $A'B' : B'C' = AB : BC$, что и требовалось доказать.

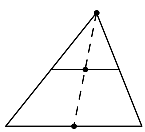


Это доказательство применимо и к случаю, когда параллельные прямые находятся по разные стороны от точки O, хотя о тенях в таком случае говорить не приходится. ◁

В этой задаче важно, что две прямые (где точки и где тени) *параллельны*: без этого условия утверждение задачи может быть неверным.

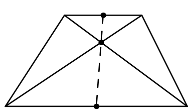
Оказывается, что тем не менее *двойное отношение* четырёх точек сохраняется и для непараллельных прямых. Оно определяется (для точек A, B, C, D на одной прямой) как отношение $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (отношение отношений — отсюда такое название). Знающие тригонометрию могут убедиться в сохранении двойного отношения, выразив его через отношение синусов углов между лучами OA, OB, OC, OD.

626. Докажите, что боковые стороны трапеции и прямая, соединяющая середины её оснований, пересекаются в одной точке.



▷ Возьмём точку пересечения боковых сторон и проведём прямую через эту точку и середину верхнего основания. Предыдущая задача показывает, что эта прямая разделит нижнее основание также на две равные части. ◁

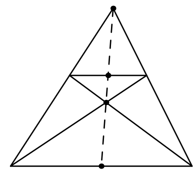
627. Докажите, что диагонали трапеции и прямая, соединяющая середины её оснований, пересекаются в одной точке.



▷ Здесь доказательство аналогично: проведём через точку пересечения диагоналей и середину одного из оснований прямую. Она разделит другое основание в том же отношении, что и первое, то есть пополам. ◁

628. Дана трапеция. Как найти середины её оснований с помощью одной линейки?

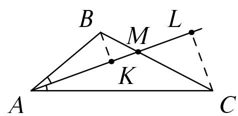
▷ Мы уже знаем, что четыре точки (середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон) лежат на одной прямой. Но две последние точки можно найти с помощью линейки, поэтому эту прямую можно построить. Точки, в которых она пересечёт основания, будут их серединами. ◁



629. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Как найти его середину с помощью одной линейки?

▷ Если взять произвольные две точки на другой прямой, получится трапеция, и мы свели задачу к предыдущей. ◁

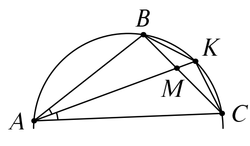
630. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на два отрезка. Докажите, что отношение этих отрезков равно отношению прилегающих к ним сторон треугольника.



▷ Пусть AM — биссектриса в треугольнике ABC. Опустим на неё перпендикуляры BK и CL из точек B и C. Треугольники ABK и ACL, как мы видели в задаче 615), подобны, поэтому $BK : CL = AB : AC$. С другой стороны, треугольники KBM и LCM тоже подобны, поэтому $BK : CL = BM : MC$. Соединяя эти равенства, получаем, что $AB : AC = BM : MC$, что и требовалось. ◁

631. Докажите, что квадрат длины биссектрисы AM треугольника ABC равен $AB \cdot AC - MB \cdot MC$.

(Используя эту задачу и предыдущую, можно найти длину биссектрисы, если известны длины всех сторон.)



▷ Надо доказать, что $AM^2 = AB \cdot AC - MB \cdot MC$. Сделаем дополнительное построение из задачи 616. Треугольники ABM и AKC подобны, поэтому

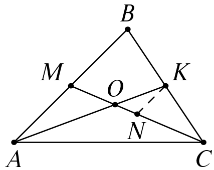
$$AB : AM = AK : AC,$$

то есть

$$AB \cdot AC = AM \cdot AK = AM \cdot (AM + MK) = \\ = AM^2 + AM \cdot MK = AM^2 + BM \cdot MC,$$

что и требовалось. (Равенство $AM \cdot MK = BM \cdot MC$ известно из задачи 619.) ◁

С помощью признаков подобия можно дать новое доказательство того факта, что медианы делятся точкой их пересечения в отношении $2:1$.



632. В треугольнике ABC проведены медианы AK и CM, пересекающиеся в точке O. Через точку K проведен отрезок KN, параллельный стороне AB, до пересечения с медианой CM в точке N. Докажите, что треугольник KON подобен треугольнику AOM, а треугольник CNK подобен треугольнику CMB. Докажите, что $AO : OK = 2 : 1$.

▷ Поскольку KN параллельно AM, то углы в треугольниках KON и AOM равны, так что они подобны по трём углам. Аналогично для треугольников CNK и CMB. Поскольку K — середина BC, то треугольник CNK вдвое меньше треугольника CMB, в частности, $KN = \frac{1}{2}MB$. Из этого, в свою очередь, следует, что KON вдвое меньше AOM, так что $AO : OK = 2 : 1$. ◁

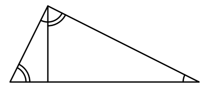
Ещё несколько задач

633. В равнобедренном треугольнике с углами 36°, 72° и 72° проведена биссектриса угла в 72°, делящая противоположную сторону на два отрезка. Докажите, что больший отрезок относится к меньшему так же, как вся сторона относится к большему отрезку.

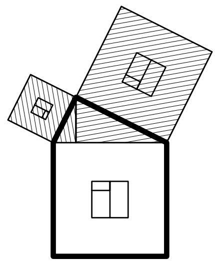
Утверждение предыдущей задачи формулируют так: биссектриса такого треугольника делит противоположную сторону в отношении «золотого сечения». Принято считать, что это отношение часто используется в архитектуре и живописи, так как приятно для глаз.

634. Докажите, что отношение боковой стороны равнобедренного треугольника с углами 36°, 72° и 72° к основанию составляет $(\sqrt{5}+1)/2$.

635. Два треугольника подобны с коэффициентом k. Докажите, что медианы, биссектрисы и высоты первого треугольника в k раз отличаются от соответствующих медиан, высот и биссектрис второго треугольника. Докажите, что площадь первого треугольника в k^2 раз отличается от площади второго треугольника.



Эта задача позволяет дать ещё одно доказательство теоремы Пифагора. Вспомним разбиение прямоугольного треугольника на два меньших, подобных исходному. Получается три подобных треугольника, и площади их пропорциональны квадратам гипотенуз этих треугольников, то есть квадратам сторон исходного треугольника. Но сумма площадей двух маленьких треугольников равна площади большого, значит, это верно и для пропорциональных им квадратов.



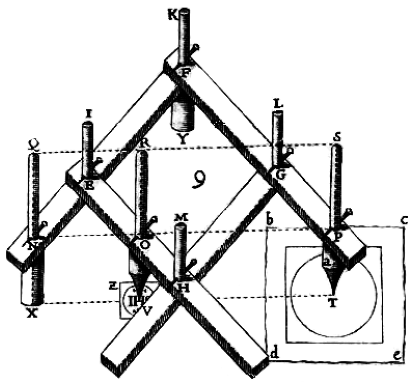
А. Гивенталь предложил рассказывать это доказательство теоремы Пифагора в виде сказки для младших школьников. Нарисуем картинку из теоремы Пифагора и проведём в прямоугольном треугольнике высоту. На этой картинке можно увидеть три «домика» (для трёх поросят — младшие школьники любят такой «оживляж»). Самый большой из них (для наиболее трудолюбивого поросёнка) нарисован нормально (чердак сверху) и обведён жирной линией. Два других домика нарисованы повёрнутыми и заштрихованы по-разному. (Для наглядности мы нарисовали ещё и окошки с форточками, но это уже к делу не относится.) Все три домика состоят из квадратного «основания» и треугольного кособокого «чердака»; они имеют одну и ту же форму, хотя и разный размер. Значит, треугольник чердака по площади составляет одну и ту же долю от квадрата основания во всех трёх. Но чердаки двух маленьких домиков вместе дают чердак большого, значит, и с основаниями то же самое — что и требовалось доказать Пифагору.

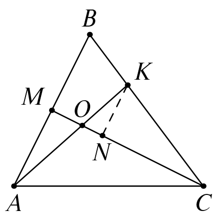
636. «На Земле живёт несколько миллиардов человек, — рассуждает Маленький Принц. — Моя планета в миллион раз меньше. Значит, на ней должно помещаться в миллион раз меньше людей, то есть несколько тысяч человек. Но радиус Земли примерно 6000 км, а радиус моей планеты в миллион раз меньше, примерно шесть метров, и несколько тысяч человек там никак не поместятся, даже если выкорчевать все баобабы и не оставлять места для моего цветка. Как же так?»

637. Даны две параллельные прямые и точка, на них не лежащая. Как провести через неё прямую, параллельную данным, с помощью одной линейки?

638. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Как удвоить его (построить отрезок вдвое большей длины), пользуясь одной линейкой?

639. На этом старинном рисунке изображён прибор, называемый *пантографом*, используемый для копирования рисунков с уменьшением. Он представляет собой шарнирный механизм. Левая нижняя точка (опора X) закреплена неподвижно; остриём (в центре круга справа внизу) обводят некоторую линию, и карандаш (в середине) обводит линию той же формы, но меньшего размера. Объясните принцип его действия.

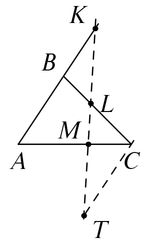




640. В треугольнике ABC проведены медиана CM и отрезок AK, причём K делит сторону BC в отношении $BK : KC = 1 : 2$. Они пересекаются в точке O. Найдите отношение $AO : OK$. ⟨Проведите через K отрезок KN, параллельный стороне AB, до пересечения с медианой CM в точке N. Ответ: $3 : 2$.⟩

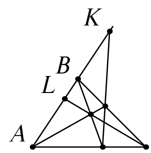
641. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка K; на стороне BC взята точка L и на стороне CA взята точка M. При этом оказалось, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

Докажите, что произведение отношений $AK : KB$, $BL : LC$ и $CM : MA$ равно 1. ⟨Проведите CT параллельно AB до пересечения с прямой, и найдите подобные треугольники.⟩



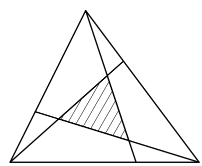
Утверждение предыдущей задачи называют *теоремой Менелая* (в честь древнегреческого геометра Менелая Александрийского). Обратите внимание на аналогию с теоремой Чевы (с. 161): там было условие, при котором три отрезка пересекаются в одной точке, а сейчас — условие, при котором три точки лежат на одной прямой.

Обе эти теоремы могут использоваться вместе для доказательства теоремы о *полном четырёхстороннике* (следующая задача).



642. Докажите, что в полном четырёхстороннике (конфигурация, показанная на рисунке) отношения $AL : LB$ и $AK : KB$ равны.

643. Дана точка L на отрезке AB, причём $AL > LB$. Как, пользуясь одной только линейкой, построить точку K на продолжении AB за точку B, для которой $AL : LB = AK : KB$?



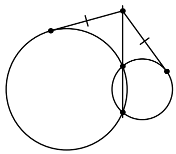
644. Стороны треугольника разделены в отношении 1 : 2, считая по часовой стрелке, и точки деления соединены с противолежащими вершинами. Какова площадь отмеченного на рисунке треугольника, если площадь исходного равна S? [Ответ: $S/7$.]

645. Каково соотношение сторон бумажного прямоугольника, если его можно разрезать на две половины, подобные исходному прямоугольнику (имеющие то же отношение сторон)?

Примерно такое отношение сторон у листов бумаги, используемых в Европе (распространённый формат A4 имеет размер 210 мм на 297 мм).

646. Каково соотношение сторон бумажного прямоугольника, если его можно разрезать на квадрат и прямоугольник, подобный исходному?

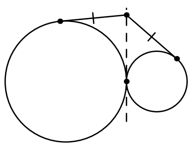
Мы уже встречались с этим отношением (золотое сечение) в задаче 633.



647. Две окружности пересекаются. Через точки пересечения проведена прямая. Из точки на этой прямой, лежащей вне окружностей, проведены две касательные к окружностям. Докажите, что отрезки до точек касания равны.

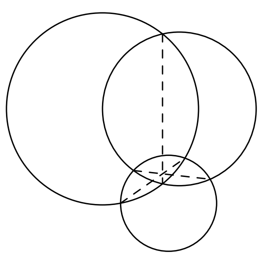
648. Докажите обратное к предыдущей задаче утверждение: если проведённые из точки отрезки касательных к двум пересекающимся окружностям оказались равными, то эта точка лежит на прямой, соединяющей точки пересечения окружностей.

649. (а) Через две точки, лежащие на прямой l, проходит несколько окружностей. Ко всем этим окружностям из точки O, также лежащей на прямой l, проведены касательные. Докажите, что отрезки от O до точек касания равны. (б) Как построить с помощью циркуля и линейки окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой? (Точки находятся на разном расстоянии от прямой.)



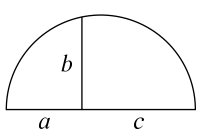
650. Докажите, что если отрезки касательных, проведённые из некоторой точки к двум касающимся окружностям, оказались равными, то эта точка лежит на общей касательной к окружностям.

651. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом. Докажите, что три их общие касательные, проходящие через точки касания окружностей, пересекаются в одной точке.



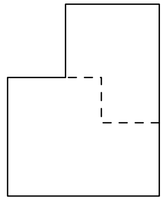
652. В трёх перекрывающихся окружностях провели отрезки, соединяющие попарно точки их пересечения. Докажите, что эти три отрезка проходят через одну точку.

653. Дан отрезок единичной длины, а также отрезки длины a и b. Как построить циркулем и линейкой отрезки длины $a \cdot b$ и a/b? $\langle$Отрезок длиной $a \cdot b$ — это решение пропорции $x : a = b : 1.\rangle$



654. Из точки на диаметре полуокружности восставлен перпендикуляр до пересечения с окружностью. Докажите, что длина этого перпендикуляра равна среднему геометрическому между отрезками, на которые точка делит диаметр: $b = \sqrt{ac}$.

655. Дан отрезок единичной длины, а также длины a. Как построить циркулем и линейкой отрезок длины $\sqrt{a}$? $\langle$См. предыдущую задачу.$\rangle$



Два многоугольника называются подобными, если имеют одинаковую форму (но, возможно, разные размеры), то есть если соответственные углы равны, а стороны пропорциональны. Мы уже видели, что любой прямоугольный треугольник, а также некоторые прямоугольники можно разрезать на две части, подобные исходной фигуре. Известен ещё один такой пример (см. рисунок), называемый *шестиугольником Амманна*. Совсем недавно (в 2010 году) Дж. Шмерль доказал, что других примеров такого рода не существует[1].

656. Найдите соотношение сторон в шестиугольнике Амманна.

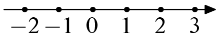
657. Объясните, как построена мозаика на рисунке, приведённом на задней стороне обложки (замощение шестиугольниками Амманна двух разных размеров).

658. В «средствах массовой информации»[2] говорилось, что изображение на полях представляет собой спутниковый снимок малайзийского «Боинга-777» (в верхнем левом углу) перед катастрофой. Сравнивая величину изображения самолёта и взлётной полосы (вертикальная полоса в правом нижнем углу, по длине чуть меньше изображения самолёта), объясните, почему это не так: оцените высоту, с которой можно было бы сделать такой «спутниковый снимок». (Длина «Боинга-777» меньше 80 м, длина полосы аэропорта — несколько километров.)

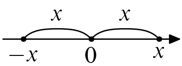
[1] J. H. Schmerl. Dividing a polygon into two similar polygons // Discrete Mathematics. 2011. V. 311, №4. P. 220–231.

[2] См., например, `www.1tv.ru/news/leontiev/271824`.

30. Координаты на прямой



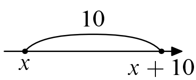
Выберем на прямой точку 0 (*начало координат*) и одно из двух направлений (на рисунке — вправо, показано стрелкой). Отложим в этом направлении отрезок единичной длины, получим *точку с координатой* 1. Отложив ещё один такой же отрезок, получим *точку с координатой* 2. Отложив от начала координат единичный отрезок в другую сторону, получим *точку с координатой* -1, затем -2 и так далее (см. рисунок).



В общем виде: отложив от точки 0 отрезок длины x в выбранном *положительном* направлении, получим точку с координатой x, а в противоположном *отрицательном направлении* — точку с координатой $-x$.

659. Сдвинемся из точки с координатой 7 на 10 единиц вправо (в положительном направлении). Какова координата получившейся точки? [Ответ: $17 = 7 + 10$.]

660. Сдвинемся из точки с координатой x на 10 единиц вправо (в положительном направлении). Какова координата получившейся точки? [Ответ: $x + 10$.]



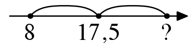
Заметим, что ответ $x + 10$ годится при любых x, в том числе отрицательных. Скажем, если мы начнём в точке -17, то окажемся в точке $-7 = (-17) + 10$, а если начнём в точке -6, то окажемся в точке $4 = (-6) + 10$.

661. Сдвинемся из точки с координатой x на y (в положительном направлении, если $y > 0$; в отрицательном направлении на $-y$, если $y < 0$). Какова координата получившейся точки? [Ответ: $x + y$.]

662. Точку A сдвинули вправо на 13 единиц и получили точку с координатой 8. Какова была координата точки A?

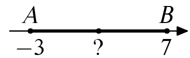
$\triangleright$ Пусть A имела координату a. Тогда $a+13 = 8$, и $a = 8 - 13 = (-5)$. $\triangleleft$

663. Кузнечик прыгнул из точки с координатой 8 в точку с координатой 17,5. Затем он сделал ещё один такой же прыжок (в том же направлении). В точке с какой координатой он оказался?



▷ Длина прыжка $17{,}5 - 8 = 9{,}5$; ещё один прыжок даст $17{,}5 + 9{,}5 = 27$. ◁

664. Даны две точки $A(-3)$ и $B(7)$ (в скобках указаны их координаты). Найдите координату середины отрезка AB.



▷ Расстояние AB равно $7-(-3) = 10$, половина расстояния 5. Сдвигая A на 5 вправо (или B на 5 влево), получаем точку с координатой 2.

665. Найдите координату середины отрезка, концы которого имеют координаты a и b.

▷ Пусть $a < b$. Тогда длина отрезка равна $b-a$. Половина длины будет $(b-a)/2$, и надо сдвинуть a на $(b-a)/2$, получится $a+(b-a)/2 = (a+b)/2$. Таким образом, координата середины отрезка равна среднему арифметическому координат его концов. Та же формула $(a+b)/2$ годится и при $a > b$, поскольку замена a на b в ней ничего не меняет. ◁

666. Какая из точек $A(5/8)$ и $B(8/13)$ находится левее? (В скобках указаны координаты точек; положительное направление — вправо.)

▷ Координаты увеличиваются слева направо, так что надо сравнить дроби $5/8$ и $8/13$ по величине:

$$\frac{5}{8} = \frac{5\cdot 13}{8\cdot 13} = \frac{65}{8\cdot 13} > \frac{64}{8\cdot 13} = \frac{8\cdot 8}{8\cdot 13} = \frac{8}{13}.$$

Значит, координата точки A больше, так что левее находится точка B.

667. Найдите расстояние между точками A (с координатой a) и B (с координатой b).

▷ Чтобы найти это расстояние, надо из большей координаты вычесть меньшую. Таким образом, оно равно $b-a$ при $b > a$ и $a-b$ при $a > b$. При $a = b$ расстояние, естественно, равно нулю. ◁

Формулу для расстояния удобно записывать с помощью знака модуля:

Абсолютной величиной, или *модулем* числа u называют само u, если u неотрицательно, и противоположное число $-u$, если u отрицательно. Обозначение: $|u|$. Таким образом,

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{если } u \geqslant 0; \\ -u, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

Например, $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-2| = |2| = 2$.

Часто на вопрос «Что такое модуль числа?» школьники отвечают: «Это число без знака». И хотя их за такой ответ справедливо ругают (мол, это не определение, а неизвестно что), но как практический рецепт нахождения модуля, если дано число в виде десятичной или обыкновенной дроби, такое правило годится. Но надо быть осторожным:

668. Чему равно $|a|$, если $a < 0$: будет ли это a или $-a$?

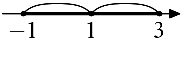
$\triangleright$ Хочется сказать, что a (ведь модуль — «число без знака», а в $-a$ есть знак «минус»), но это неверно. Ведь a отрицательно, а модуль должен быть положителен. Чтобы найти модуль, надо из двух чисел a и $-a$ выбрать положительное (точнее, неотрицательное), и в данном случае им будет как раз $-a$. $\triangleleft$

С помощью знака модуля можно записать формулу расстояния так: *расстояние между точками с координатами a и b равно $|a - b|$*.

669. Для каких чисел x выполняется равенство $x + |x| = 0$?

$\triangleright$ Это равенство означает, что $|x| = -x$, это бывает при $x \leqslant 0$. (Заметим, что граничная точка 0 тоже входит.) $\triangleleft$

670. Для каких чисел x выполняется неравенство $|x - 1| < 2$?



$\triangleright$ Величина $|x - 1|$ есть расстояние от точки x до точки 1 (полностью надо сказать: «от точки с координатой x до точки с координатой 1), и это расстояние должно быть меньше 2. Отсюда ясно, что x должно лежать между точками -1 и 3. Ответ: $-1 < x < 3$. ◁

671. Машина едет по оси координат с постоянной скоростью v (положительные значения v соответствуют движению в положительном направлении). В момент времени $t = 0$ она находится в точке a. В какой точке она находится в произвольный момент времени t?

▷ За время t она сдвигается на расстоние vt, поэтому её координата в момент t равна $a + vt$. Эта же формула годится и при $t < 0$. (А также и при $v < 0$, то есть когда движение происходит в отрицательном направлении со скоростью $|v| = -v$.) ◁

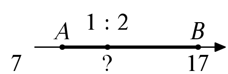
Ещё несколько задач

672. Найдите координату правого конца отрезка, если левый его конец имеет координату 8, а середина имеет координату 17,5.

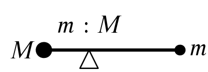
673. Деревянную рейку длиной 1 м разделили на пять равных частей и пометили точки деления синим карандашом. Затем её же разделили на семь равных частей и пометили точки деления красным карандашом. Перечислите цвета помеченных точек, идя слева направо.

674 (Продолжение). Затем рейку распилили во всех красных и во всех синих точках. Сколько получилось кусков и какой длины самый короткий и самый длинный куски?

675. Точка A имеет координату 7, точка B имеет координату 17. Точка M делит отрезок AB в отношении 1 : 2, считая от точки A. Какова координата точки M?



676. К невесомому стержню на концах прикреплены грузы масс M и m. *Центром тяжести* такой системы называется точка, которая делит стержень в отношении, обратно пропорциональном весам гру-



зов (ближе к тяжёлому концу). Физики знают, что именно в этой точке нужно подпереть рычаг, чтобы он был в равновесии. Найдите координату центра тяжести, если координаты точек масс M и m равны соответственно a и b. [Ответ: $(Ma+mb)/(M+m)$.]

677. При каких x выполнено равенство

$$|x-1|+x=1?$$

678....выполнено равенство $|x-1|+|x|=1$?

679....выполнено равенство $|x-1|+|x|=7$?

680. Чему равен квадратный корень из x^2? (Число x может быть и положительным, и отрицательным.)

681. Каково наименьшее возможное значение выражения $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$?

682. Каково наименьшее возможное значение выражения $100|x|+50|x-3|$? ⟨См. задачу 7.⟩

683. Рассмотрим три точки A, B, C с координатами 0, x и $x+y$. Запишите в этих координатах неравенство треугольника ($AC \leqslant AB+BC$; хотя в данном случае треугольник вырождается в отрезок, всё равно прямой путь из A в C не длиннее пути с остановкой в B). [Ответ: $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.]

684. Докажите неравенство $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, не ссылаясь на неравенство треугольника, а разобрав случаи разных знаков по очереди. В каком случае это неравенство обращается в равенство? ⟨Неравенство обращается в равенство, если x и y одного знака.⟩

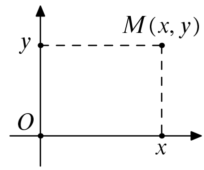
685. Докажите неравенство $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, возведя обе его части в квадрат.

686. Машина равномерно движется по прямой. В момент t_0 она была в точке x_0, а в момент t_1 она была в точке x_1. Найдите её координату в произвольный момент t.

[Ответ: $x=x_0+(x_1-x_0)(t-t_0)/(t_1-t_0)$.]

31. Координаты на плоскости

Проведём вертикальную и горизонтальную прямые — *оси координат*. Их пересечение называется *началом координат*. Чтобы найти координаты произвольной точки M, надо спроектировать её на оси координат (опустить перпендикуляры) и взять координаты соответствующих точек по горизонтальной и вертикальной осям.



Узлы сетки (клетчатая бумага со стороной клетки 1, см. раздел 13) имеют целые координаты, если оси координат идут по линиям сетки.

Традиционно горизонтальную ось координат называют *осью абсцисс*, или осью OX (и координаты по этой оси часто обозначают буквой x), а вертикальную ось называют *осью ординат*, или осью OY (координаты по этой оси часто обозначают буквой y). Но, конечно, можно взять за оси любые перпендикулярные прямые: надо лишь указать положительные направления на них и сказать, какая ось будет первой, а какая второй (при записи координат в виде пары чисел).

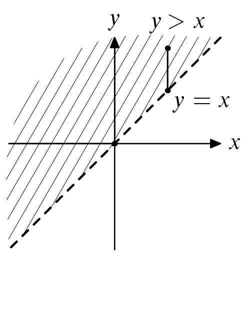
687. Чему равно расстояние точки $M(x, y)$ от осей координат?

$\triangleright$ Глядя на прямоугольник на картинке, хочется сказать, что расстояние до оси абсцисс равно y, а расстояние до оси ординат равно x. Но точка может находиться и ниже оси абсцисс, и левее оси ординат, так что правильные ответы будут $|y|$ и $|x|$. $\triangleleft$

688. Где находятся точки $M(x, y)$, у которых $x = y$ (первая координата равна второй)?

$\triangleright$ Эти точки равноудалены от осей, так что они лежат на биссектрисе угла между осями. $\triangleleft$

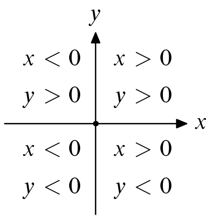
689. Где находятся точки $M(x, y)$, у которых $y > x$ (вторая координата больше первой)?



$\triangleright$ Такие точки получаются, если взять вторую координату равной первой (по предыдущей задаче), а затем увеличить. При увеличении второй координаты (первая не меняется) точка смещается вертикально вверх. Значит, искомые точки находятся сверху от прямой $y = x$.

Поскольку неравенство строгое, то точки на самой прямой не удовлетворяют условию. Поэтому сама прямая не входит в интересующее нас множество точек и показана на рисунке пунктиром. ◁

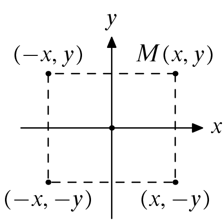
Можно было бы сказать также, что точки с $x < y$ получаются из точек с $x = y$ уменьшением x, то есть сдвигом влево, то есть ответом будет область, лежащая слева от прямой $x = y$. (Это, разумеется, та же самая область.)



690. Где находятся точки, у которых обе координаты x и y положительны? у которых $x > 0$, $y < 0$? у которых $x < 0$, $y > 0$? у которых обе координаты отрицательны?

▷ См. рисунок. ◁

691. Точка M имеет координаты (x, y). Найдите координаты точки M', симметричной точке M относительно оси абсцисс. Тот же вопрос для точки, симметричной M относительно оси ординат, а также для точки, симметричной M относительно начала координат.



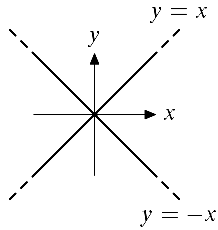
▷ Точки M и M' лежат на одной вертикальной прямой, поэтому их абсциссы одинаковы. Они находятся на одном расстоянии от оси абсцисс по разные стороны от неё, так что их ординаты равны по величине и противоположны по знаку. Ответ: $(x, -y)$. (Заметим, что этот ответ сохраняет силу и при $y = 0$, и при $y < 0$.)

Точка, симметричная M относительно оси ординат, имеет координаты $(-x, y)$.

Точка, симметричная M относительно начала координат, имеет координаты $(-x, -y)$. (Можно заметить, что она получается последовательными отражениями относительно оси абсцисс и оси ординат, так что оба знака меняются.) ◁

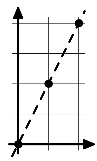
692. Где находятся точки (x, y), у которых сумма координат равна нулю, то есть $x + y = 0$?

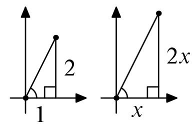
▷ Условие $x + y = 0$ можно переписать как $y = -x$. Таким образом, эти точки симметричны точкам прямой $y = x$. Получается биссектриса (другого) угла между осями координат. ◁



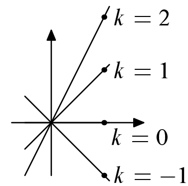
693. Где находятся точки, у которых $y = 2x$?

▷ Если нарисовать на клетчатой бумаге несколько таких точек (скажем, $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,4)$), то видно, что они ложатся на прямую. Чтобы убедиться, что действительно все точки лежат на одной прямой, рассмотрим произвольную точку $(x, 2x)$ и проверим, что она видна из начала координат в том же направлении, что и точка $(1,2)$. Два треугольника на рисунке подобны по двум катетам и (прямому) углу между ними. Значит, углы в них равны. ◁



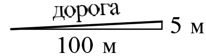


То же самое можно сказать про уравнение $y = kx$ и при других k: это уравнение задаёт прямую, проходящую через начало координат $(0,0)$ и точку $(1, k)$. Чем больше k, тем выше эта вторая точка и тем круче идёт вверх прямая. При $k = 0$ получается прямая $y = 0$, то есть ось абсцисс. А при отрицательных k получается прямая, наклонённая вправо (тем круче, чем больше k по абсолютной величине).



> Число k будем называть *наклоном* прямой на координатной плоскости. (Обычно говорят более длинно: «тангенс угла наклона прямой», или «угловой коэффициент прямой», но мы для краткости будем говорить просто о «наклоне». По-английски говорят коротко “slope”.)

Интуитивный смысл коэффициента k: если мы смещаем точку на прямой на единицу вправо, то она поднимается на k вверх. Скажем, дорожный подъём с наклоном в 0,05 означает, что на каждые 100 м горизонтального смещения дорога поднимается на 5 м.



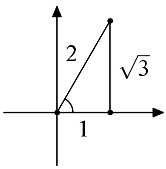
Обратите внимание, что мы говорим о 100 м смещения *по горизонтали*, а не 100 м *по дороге*. (Расстояние по дороге будет немного больше горизонтального смещения: гипотенуза длиннее катета.)

Наклон можно рассматривать как новую меру «крутизны» подъёма прямой (помимо угла с горизонталью). Сравним её с углом для нескольких значений:

694. Найдите наклон прямой, образующей с горизонталью угол 45°.

$\triangleright$ Мы уже знаем, что такая прямая задаётся уравнением $y = x$, так что наклон равен 1. $\triangleleft$

695. Найдите наклон прямой, образующей с горизонталью угол 60°.



$\triangleright$ В прямоугольном треугольнике с углом 60° меньший катет равен половине гипотенузы (достроим до правильного треугольника, задача 167). Приняв меньший катет равным 1, мы можем найти больший катет по теореме Пифагора: он равен $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Таким образом, наклон прямой, идущей под углом 60°, равен $\sqrt{3}$. $\triangleleft$

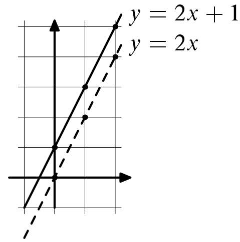
696. Найдите наклон прямой, образующей с горизонталью угол 30°.

$\triangleright$ Та же пропорция между катетами прямоугольного треугольника с углами в 30° и 60°, применённая в обратную сторону, даёт ответ: $k = 1/\sqrt{3}$. $\triangleleft$

Есть и другие «удачные» значения углов, когда наклон можно выразить формулой (с квадратными корнями). Так можно сделать для угла в 72° или в 15° (см. задачи 706 и 707). Но, скажем, для угла в 20° никакой формулы с квадратными корнями для наклона нет (и это связано с тем, что угол в 60° нельзя разделить на три равные части циркулем и линейкой). Зато этот наклон можно описать как корень кубического уравнения с целыми коэффициентами (и вообще, для угла в целое или рациональное число градусов наклон будет корнем какого-то многочлена с целыми коэффициентами). На практике пользуются программами для приближённого вычисления наклона по углу; в калькуляторе это делается с помощью клавиши «tg» (тангенс).

До сих пор речь шла о прямых, проходящих через начало координат. Другие прямые получаются из них сдвигом.

697. Где находятся точки (x, y), для которых $y = 2x + 1$?

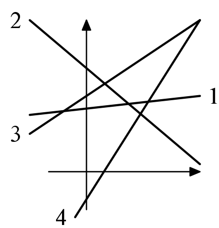


▷ Чтобы получить такую точку, можно сначала взять точку (x, y), у которой $y = 2x$, а потом увеличить y на 1. Другими словами, нужно взять прямую $y = 2x$ и потом подвинуть все её точки вверх ровно на 1, то есть всё построение на клетчатой бумаге просто переносится на клетку выше. ◁

В общем виде:

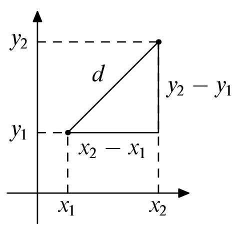
Точки (x, y), удовлетворяющие уравнению $y = kx + b$, образуют прямую. Эта прямая параллельна прямой $y = kx$ и пересекает ось ординат в точке $(0, b)$ (при $x = 0$ из уравнения получаем $y = b$). Таким образом можно задать любую невертикальную прямую.

698. На координатной плоскости изображено несколько прямых (обозначенных цифрами). Каждая из них задаётся уравнением $y = kx + b$ с какими-то k и b. Перечислите прямые (а) в порядке возрастания коэффициентов k; (б) в порядке возрастания значений b.



▷ Коэффициент k (наклон) тем больше, чем круче прямая поднимается вверх при движении слева направо. Прямая № 2 имеет отрицательный наклон, далее в порядке возрастания идут прямые 1, 3, 4.

Чтобы упорядочить прямые по возрастанию b, надо посмотреть на их точки пересечения с осью ординат и перечислить прямые снизу вверх: 4, 1, 3, 2. ◁



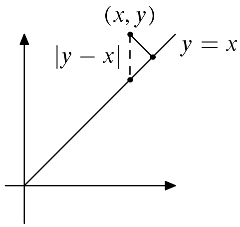
Расстояние между двумя точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно найти по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

699. Составьте уравнение для координат точек (x, y), равноудалённых от $(-2, 2)$ и $(2, 0)$.

▷ Мы знаем, что такие точки находятся на серединном перпендикуляре, который можно нарисовать на клетчатой бумаге и затем найти его уравнение.

Но можно действовать и алгебраически: равенство расстояний равносильно равенству их квадратов, поэтому условие равноудалённости можно переписать как $(x+2)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + y^2$, то есть $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2$, или $8x + 4 = 4y$, или $y = 2x + 1$. $\triangleleft$



700. Найдите расстояние от точки (x, y) до прямой $y = x$.

$\triangleright$ По вертикали это расстояние равно $|y-x|$ (см. рисунок). Но кратчайшее расстояние будет перпендикуляром, опущенным на прямую. В прямоугольном треугольнике с углами в 45° катет в $\sqrt{2}$ раз короче гипотенузы, так что ответ будет $|y-x|/\sqrt{2}$. $\triangleleft$

Ещё несколько задач

701. Точка M имеет координаты (x, y). Найдите координаты точки M', симметричной точке M относительно прямой $y = x$.

702. Как описать геометрически преобразование, переводящее точку (x, y) в точку $(-y, x)$? [Ответ: Поворот против часовой стрелки на 90°.]

703. Где находятся точки, у которых $|x| = |y|$? $\langle$Это условие выполняется, если $y = x$ или если $y = -x$.$\rangle$

704. Где находятся точки, у которых $x^2 = y^2$? $\langle$См. предыдущую задачу. Можно также заметить, что $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Когда произведение двух сомножителей равно нулю?$\rangle$

705. Найдите расстояние от точки (x, y) до прямой $y + x = 0$. Тот же вопрос для прямой $3x + 4y - 5 = 0$.

706. Найдите наклон прямой, образующей угол в 72° с горизонталью. $\langle$См. задачу 634.$\rangle$

707. Найдите наклон прямой, образующей угол в 15° с горизонталью. $\langle$Биссектриса угла в 30° прямоугольного треугольника делит противоположный катет на части, пропорциональные прилегающим сторонам.$\rangle$

708. Где находятся точки (x, y), для которых $(y - x)(y - 2x) < 0$?

709. Где находятся точки (x, y), для которых $(x - 1)(y - 1)(x + y - 3) < 0$?

710. По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону — телега и автомобиль. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом ещё через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода, и потом ещё через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 часов, а пешеход встретил машину в 11 часов. Когда пешеход встретил телегу? ⟨Медианы треугольника, пересекаясь, делятся в отношении 2 : 1.⟩

711. В курсе алгебры *параболу* определяют как множество точек (x, y), для которых $y = x^2$. Но в Древней Греции параболу определяли иначе: как множество точек, для которых расстояние от данной точки (*фокуса*) равно расстоянию от данной прямой (*директрисы*). Подберите фокус и директрису для параболы $y = x^2$. [Ответ: Фокус будет $(0, 1/4)$, директрисой будет прямая $y = -1/4$.]

712. Напишите уравнение, которому удовлетворяют координаты точек (x, y), лежащих на окружности с центром в (a, b) и радиусом r.

713. Покажите, что точки (x, y), для которых $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 11$, образуют окружность, и найдите её центр и радиус.

714. На плоскости даны две точки A и B. Докажите, что точки M, для которых расстояние MA вдвое больше расстояния MB, образуют окружность.

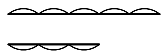
715. На плоскости даны две точки A и B. Докажите, что точки M, для которых разность $MA^2 - MB^2$ равна некоторому постоянному значению c, образуют прямую, перпендикулярную отрезку AB. Выведите отсюда, что для двух окружностей, лежащих вне друг друга, множество точек, из которых отрезки касательных к этим окружностями имеют равную длину, представляет собой прямую.

716. При каком условии точки $(0,0)$, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат на одной прямой? [Ответ: $x_1 y_2 = x_2 y_1$.]

717. Найдите площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2). [Ответ: $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.]

32. Общая мера

Представим себе, что нам нарисовали два отрезка и просят найти отношение их длин (во сколько раз один длиннее другого). При этом у нас есть циркуль и линейка (без делений). Мы сможем ответить на вопрос, если найдём «общую меру» этих отрезков. Например, если какой-то отрезок (выбранный в качестве меры длины) укладывается в одном отрезке 15 раз, а во втором — только 12, то мы сразу можем сказать, что длины отрезков относятся как $15 : 12 = 5 : 4$, то есть что первый на 25% (в 1,25 раза) длиннее.



Общей мерой двух отрезков называется такой отрезок, который укладывается целое число раз в каждом из них.

Другими словами, если принять общую меру двух отрезков за единицу длины, то длины этих отрезков будут целыми.

718. Вернёмся к примеру, когда общая мера укладывается в одном отрезке 15 раз, а в другом 12 раз. Можно ли найти бо́льший отрезок, который тоже будет общей мерой?

▷ Да: $15 = 3 \cdot 5$, а $12 = 3 \cdot 4$, поэтому если взять общую меру втрое длиннее, то она будет укладываться (соответственно) 5 раз и 4 раза. ◁

В этом примере нам удалось найти бо́льшую общую меру; найти меньшую можно всегда (достаточно поделить общую меру на несколько равных частей).

719. Прямоугольник разрезали на квадраты, проводя прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что все квадраты равны и что их сторона является общей мерой сторон прямоугольника.

▷ В самом деле, соседние квадраты имеют одинаковый размер, поскольку у них общая сторона. Значит, и все квадраты имеют одинаковый размер (можно пройти по цепочке). Получается отрезок, который укладывается в каждой из сторон прямоугольника целое число раз. $\triangleleft$

Как найти общую меру двух отрезков, зная их длины? Если длины заданы конечными десятичными дробями, то можно выбрать наибольшее число знаков после запятой и взять соответствующую единицу длины (десятую, сотую и т.п.); например, отрезки в 0,57 м и 1,9 м имеют общей мерой отрезок в 0,01 м, то есть 1 см.

720. Будет ли сантиметровый отрезок наибольшей общей мерой этих двух отрезков?

$\triangleright$ Нет: можно взять отрезок в 19 см: он укладывается три раза в первом отрезке и десять раз во втором. $\triangleleft$

Несложно найти общую меру и у двух отрезков, длины которых заданы обыкновенными дробями.

721. Найдите общую меру у двух отрезков длиной 1/5 м и 1/3 м.

$\triangleright$ Отрезок длиной 1/15 м укладывается три раза в первом и пять раз во втором. $\triangleleft$

В арифметике аналогичное действие называют приведением дробей к общему знаменателю. В качестве общего знаменателя можно взять произведение знаменателей дробей, если ничего меньшего найти не удалось.

722. Найдите общую меру у отрезков длиной $\frac{4}{15}$ и $\frac{8}{21}$.

$\triangleright$ Можно взять отрезок длиной $\frac{1}{15\cdot 21} = \frac{1}{315}$ в качестве общей меры. Видно, что

$$\frac{4}{15} = \frac{4\cdot 21}{15\cdot 21} \quad \text{и} \quad \frac{8}{21} = \frac{15\cdot 8}{15\cdot 21},$$

так что предложенный отрезок укладывается $4\cdot 21$ раз в первом отрезке и $15\cdot 8$ раз во втором. $\triangleleft$

723 (Продолжение). Есть ли более длинные общие меры?

$\triangleright$ Есть. Например, можно заметить, что $15 = 3\cdot 5$ и $21 = 3\cdot 7$, поэтому дроби можно переписать в виде $\frac{4}{15} = \frac{4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}$ и $\frac{8}{21} = \frac{8\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7}$, так что отрезок длиной

$\frac{1}{3\cdot5\cdot7} = \frac{1}{105}$ будет общей мерой. Он втрое длиннее ранее предложенного и укладывается $4 \cdot 7 = 28$ раз в первом отрезке и $8 \cdot 5 = 40$ раз во втором. $\triangleleft$

724 (Продолжение). А есть ли ещё более длинная общая мера?

$\triangleright$ Есть. Заметим, что оба числа 28 и 40 кратны 4, поэтому если взять вчетверо более длинный отрезок, то он уложится 7 раз в первом и 10 раз во втором. $\triangleleft$

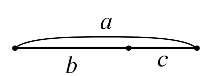
Не всякие два отрезка имеют общую меру. Это связано с существованием иррациональных чисел (см. обсуждение на с. 158). Например, сторона квадрата и его диагональ не имеют общей меры. В самом деле, если в каких-то единицах измерения квадрат имел бы целую сторону n и целую диагональ m, то $m^2 = n^2 + n^2 = 2n^2$ по теореме Пифагора, и $(m/n)^2 = 2$, а никакая дробь с целым числителем и знаменателем не даёт в квадрате 2. Другое, геометрическое доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата мы разберём в этом разделе после *алгоритма Евклида* — способа найти общую меру двух отрезков (если она существует).

Отрезки, имеющие общую меру, называют *соизмеримыми.*

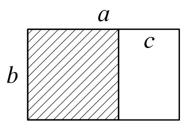
725. Докажите, что два отрезка соизмеримы тогда и только тогда, когда отношение их длин рационально (выражается дробью с целыми числителем и знаменателем).

$\triangleright$ Если общая мера укладывается в первом отрезке m раз, а во втором n раз, то отношение длин равно m/n. В другую сторону: если отношение длин a/b равно рациональному числу m/n, то $a/m = b/n$, и отрезок такой длины укладывается в a ровно m раз, а в b ровно n раз. $\triangleleft$

726. Даны два отрезка: более длинный (a) и более короткий (b). Тогда можно рассмотреть их разность $c = a - b$ (отрезать от a отрезок, равный b, и взять остаток c). Докажите, что *общие меры у a и b те же самые, что у b и c.*

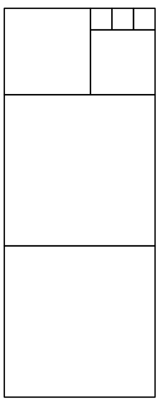


▷ Нам надо доказать две вещи: (1) если какой-то отрезок d укладывается в a и в b целое число раз, то он укладывается и в c целое число раз. И наоборот: (2) если он укладывается в b и в c целое число раз, то он укладывается и в a целое число раз. Но это почти очевидно: замостим a копиями отрезка d; какое-то (целое) число их попадёт в b, а оставшиеся копии замостят c. Напротив, если b и c можно замостить копиями d, то в итоге и получится a. ◁



Эту же задачу можно объяснить иначе: от прямоугольника $a \times b$ отрезали квадрат $b \times b$, получился прямоугольник $b \times c$. Так вот, общие меры у сторон исходного прямоугольника те же, что и у полученного после отрезания квадрата.

727. Изобретатель-самоучка Алгоритм Евклидов сделал автомат, который устроен так: в него можно засунуть бумажный прямоугольник, и он отрежет от него квадрат (проведя разрез параллельно меньшей стороне). Затем оставшийся прямоугольник можно засунуть в автомат снова, от него снова отрежут квадрат, и так далее. Что получится, если начать с прямоугольника 14×36?



▷ Сначала автомат отрежет квадрат 14×14, останется прямоугольник 14×22. Затем будет отрезан ещё один квадрат 14×14, останется прямоугольник 14×8. На следующем шаге будет отрезан квадрат 8×8, останется прямоугольник 8×6; от него отрежут квадрат 6×6 и останется прямоугольник 6×2, который будет постепенно разрезан на три квадрата 2×2. ◁

728 (Продолжение). Докажите, что любой прямоугольник с целыми сторонами будет таким способом разрезан на несколько квадратов.

▷ Ясно, что в этом случае все квадраты и все прямоугольники в ходе процесса будут иметь целые стороны. При отрезании периметр уменьшается, оставаясь целым, так что это не может продолжаться долго (число шагов не превосходит периметра исходного прямоугольника). ◁

729 (Продолжение). Докажите, что если стороны прямоугольника имеют общую меру, то описанный процесс разрежет его на несколько квадратов.

$\triangleright$ По существу эта задача совпадает с предыдущей: примем общую меру за единицу длины. $\triangleleft$

Алгоритм Евклида нахождения общей меры двух отрезков: *пока отрезки не равны, уменьшить больший отрезок на длину меньшего.*

Схема алгоритма:

пока $a \neq b$:

$$a > b \;\Rightarrow\; a \leftarrow a - b$$
$$b > a \;\Rightarrow\; b \leftarrow b - a$$

Когда (и если) отрезки станут равными, процесс прекращается, и получившийся отрезок (любой из двух равных) будет ответом.

Пример: начав с отрезков длин 14 и 36, мы приходим к отрезкам длины 2:

$$(14,36) \to (14,22) \to (14,8) \to$$
$$\to (6,8) \to (6,2) \to (4,2) \to (2,2).$$

Мы должны обосновать название алгоритма:

730. Докажите, что если алгоритм Евклида заканчивает работу (приводит к паре равных отрезков), то эти отрезки будут общей мерой двух исходных отрезков.

$\triangleright$ Задача 726 говорит, что в ходе алгоритма общие меры (если они есть) остаются те же самые: скажем, у отрезков длиной 14 и 36 они те же, что у отрезков длиной 14 и 22, те же, что у отрезков 14, 8, ..., те же, что и у отрезков $(2,2)$. А равные отрезки будут своей собственной общей мерой (которая укладывается в каждом из них ровно один раз). $\triangleleft$

731. Докажите, что если два отрезка имеют общую меру, то алгоритм Евклида через несколько шагов приведёт к равным отрезкам (и остановится).

$\triangleright$ Примем общую меру за единицу длины. Тогда длины отрезков выражаются положительными целыми числами. При вычитании одного отрезка из другого числа остаются целыми и положительными, при этом больший отрезок уменьшается, и это не может продолжаться неограниченно долго (число шагов не может быть больше начальной длины большего отрезка). $\triangleleft$

Можно сказать, что эта задача даёт способ выяснить, соизмеримы ли два данных отрезка: надо начать применять к ним алгоритм Евклида и посмотреть, остановится ли он. (Проблема, конечно, в том, что если он не останавливается, мы ни в какой момент этого не увидим — ведь процесс никогда не закончится.)

732. Кузнечик прыгает по прямой влево и вправо, при этом он может делать большие прыжки на 36 см и малые прыжки на 14 см (влево или вправо). Может ли он за несколько прыжков сдвинуться на 3 см от начального положения? на 2 см? на 1234 см?

$\triangleright$ Сдвинуться на 3 см он не сможет, так как все его прыжки смещают его на чётное число сантиметров (а складывая или вычитая чётные сдвиги, мы не можем получить нечётный: любой сдвиг будет кратен 2 см).

На 2 см кузнечик сдвинуться может. В самом деле, кузнечик может прыгнуть на 22 см, если прыгнет на 36 см в одну сторону и потом вернётся обратно на 14 см ($36 - 14 = 22$). Умея сдвигаться на 22 см (пусть за два прыжка вместо одного) и на 14 см, он может сдвинуться на 8 см ($22 - 14 = 8$). Умея сдвигаться на 14 и на 8 см, он может сдвинуться на $6 = 14 - 8$ см. Наконец, умея сдвигаться на 8 и 6 см, он может сдвинуться на $2 = 8 - 6$ см.

Затем, повторяя многократно сдвиг на 2 см, можно сдвинуться на любое чётное число сантиметров, в том числе на 1234. (Поскольку $1234 = 2 \cdot 617$, надо повторить сдвиг на 2 см 617 раз.) $\triangleleft$

Программисты бы сказали так: имея команды сдвига на 36 и 14 см, можно написать подпрограмму (процедуру, вспомогательный алгоритм) сдвига на 22 см. Затем, используя эту подпрограмму и команду сдвига на 14 см, пишем подпрограмму сдвига на $8 = 22 - 14$ см и так далее, пока не дойдём до сдвига на 2 см. Теперь, повторяя команду сдвига на 2 см 617 раз, мы можем сдвинуться на 1234 см.

733 (Продолжение). Сколько и каких прыжков должен сделать кузнечик для того, чтобы сдвинуться на 2 см, как в предыдущей задаче?

$\triangleright$ Это можно подсчитать, следуя её решению:

$$\begin{aligned}
22 &= 36 - 14;\\
8 &= 22 - 14 = (36 - 14) - 14 = 36 - 2 \cdot 14;\\
6 &= 14 - 8 = 14 - (36 - 2 \cdot 14) = 3 \cdot 14 - 36;\\
2 &= 8 - 6 = (36 - 2 \cdot 14) - (3 \cdot 14 - 36) =\\
&= 2 \cdot 36 - 5 \cdot 14.
\end{aligned}$$

Получается 2 прыжка в одну сторону на 36 см (всего 72 см) и 5 прыжков в другую сторону на 14 см (всего 70 см). Всё сходится: $72 - 70 = 2$. $\triangleleft$

734. Докажите, что алгоритм Евклида в применении к паре отрезков, имеющих общую меру, даёт их *наибольшую* общую меру, и эта наибольшая мера кратна любой другой общей мере.

$\triangleright$ В самом деле, для пар отрезков, появляющихся в ходе алгоритма, общие меры одни и те же (задача 726), а для пары равных отрезков, очевидно, их длина будет наибольшей общей мерой, кратной любой другой. $\triangleleft$

Если длины отрезков целые, то алгоритм Евклида даёт *наибольший общий делитель* двух целых положительных чисел a и b, и этот наибольший общий делитель делится на любой другой общий делитель a и b.

(Целое число $d > 0$ называется *делителем* числа x, если x делится на d без остатка, то есть x/d — целое число. Среди всех *общих делителей* чисел a и b можно найти *наибольший общий делитель.*)

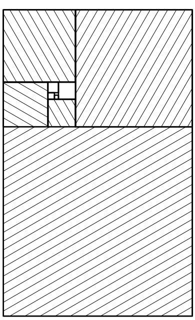
735. Найдите наибольший делитель пары чисел 123456789 и 987654321 (другими словам, наибольшую общую меру отрезков таких длин).

$\triangleright$ В принципе эту задачу можно решить перебором (и даже за разумное время, если под рукой есть компьютер), попробовав все числа от 1 до 123456789 (бо́льшие явно не подходят).

Но можно обойтись и без компьютера, пользуясь алгоритмом Евклида. Число 987654321 можно заменить на $987654321 - 123456789 = 864197532$. Ещё раз вычитая 123456789, получаем 740740743, затем 617283954, 493827165, 370370376, 246913587, 123456798 и, наконец, $123456798 - 123456789 = 9$. (В итоге мы поделили 987654321 на 123456789 с остатком и получили в остатке 9.) Как мы видели, общие делители у исходной пары и у пары $123456789, 9$ одинаковые, и дальше по алгоритму Евклида надо вычитать 9 из 123456789. Число 123456789 делится на 9 (оно равно $9 \cdot 13717421$), так что при вычитании мы получим 9 (и потом 0). Ответ: наибольший общий делитель равен 9. ◁

736. Отрезок разделён на две части в отношении золотого сечения (это означает, что бо́льшая часть относится к меньшей так же, как весь отрезок относится к большей части). Докажите, что отрезок и его большая часть не имеют общей меры.

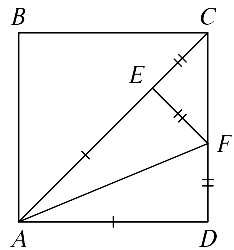
▷ Вспомним алгоритм Евклида: применяя его к паре (отрезок, его бо́льшая часть), мы получаем пару (бо́льшая часть, меньшая часть). По условию отношение отрезков в паре не изменяется, то есть мы просто уменьшили оба отрезка в какое-то число раз. Значит, на следующем шаге будет всё то же самое, и отрезки снова пропорционально уменьшатся, и так далее, так что процесс никогда не кончится. Следовательно, общей меры не существует. ◁



Это рассуждение становится более наглядным, если провести его с прямоугольниками: если стороны прямоугольника образуют золотое сечение, это значит, что при отрезании квадрата получится прямоугольник меньшего размера, подобный исходному (с тем же отношением сторон). Поскольку отношение сторон то же, то и свойство золотого сечения сохранится: отрежем квадрат от оставшейся части, получится ещё меньший прямоугольник, подобный исходному. И так будет продолжаться всё время: алгоритм Евклида никогда не завершится.

Можно сказать, что после бесконечного числа шагов прямоугольник золотого сечения будет разрезан на бесконечно много квадратов. Впрочем, одна из точек прямоугольника не попадёт ни в один из квадратов; из рисунка примерно видно, где она находится.

737. Пользуясь рисунком, дайте геометрическое доказательство того, что сторона и диагональ квадрата не имеют общей меры.



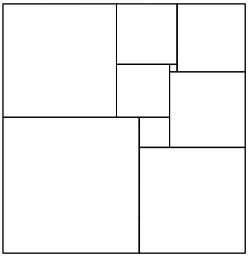
$\triangleright$ Согнём бумажный квадрат так, чтобы его сторона AD пошла по диагонали AC (линией сгиба будет биссектриса AF угла CAD). Получатся два равных прямоугольных треугольника AFD и AFE, а треугольник CEF будет прямоугольным с углом $45°$, поэтому равнобедренным. Отсюда видно, что $CE = EF = FD$, а также $AE = AD$. Теперь видно, как будет применяться алгоритм Евклида к стороне и диагонали квадрата: от диагонали AC после вычитания $AD = AE$ останется CE, а от стороны CD после вычитания $CE = DF$ останется CF. Вновь получается пара отрезков CE и CF, которые относятся друг к другу как сторона квадрата к диагонали, и всё повторяется сначала (так что никогда не кончится). $\triangleleft$

Ещё несколько задач

738. Каждый из двух отрезков a и b укладывается в некотором отрезке c целое число раз. Следует ли отсюда, что отрезки a и b имеют общую меру?

739. Найдите наименьшее положительное число x (не обязательно целое), для которого оба числа $\frac{4}{15}x$ и $\frac{8}{21}x$ будут целыми.

740. Будет ли отрезок длиной 19 см в задаче 720 наибольшей общей мерой или есть ещё больший? $\langle$Большая общая мера может укладываться не три раза, а два или один.$\rangle$



741. Найдите отношение сторон разрезанного на квадраты прямоугольника на рисунке.

На первый взгляд прямоугольник на рисунке выглядит как квадрат, но на самом деле его стороны немного разные. Квадрат тоже можно разрезать на квадраты разных размеров, но их нужно больше. Такой пример найти совсем не просто: он был построен в 1930-е годы, при этом обнаружились аналогии между разрезанием на квадраты и законами Кирхгофа для тока в электрических цепях. Тогда же было доказано, что стороны прямоугольника, разрезанного на квадраты, обязательно имеют общую меру (и это тоже не так просто).

Основная сложность в разрезании квадрата на разные квадраты — придумать схему разрезания; найти подходящие к этой схеме размеры уже не так сложно (решение систем линейных уравнений).

742. Как замостить плоскость без пробелов и перекрытий квадратами, чтобы все они были разного размера? ⟨Воспользуйтесь разрезанием прямоугольника на различные квадраты.⟩

743. На обложке приведена фотография квадратной подушки, разделенной на меньшие квадраты (схему разрезания предложил А. Дюйвестейн (A. J. W. Duijvestijn) в 1978 г., а саму подушку сделала М. Бомхольт (Magda Julie Bomholt)). Подберите подходящие размеры квадратов, чтобы всё сходилось.

744. Что получится, если разрезать прямоугольный лист бумаги формата A4 (210×297 мм) на квадраты с помощью автомата из задачи 727?

745. Сравните результат задачи 727 с представлением числа $36/14$ в виде *цепной дроби*:

$$\frac{36}{14} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}.$$

Проверьте обнаруженные закономерности, взяв в качестве примера другой прямоугольник с целыми сторонами.

746. Применяя автомат задачи 727 к некоторому прямоугольнику, получили пять квадратов, и все они оказались разного размера, кроме двух самых маленьких. Каково было соотношение сторон исходного прямоугольника?

747. Прямоугольник разрезали на несколько квадратов по задаче 727. Докажите, что стороны всех полученных квадратов (а также стороны исходного прямоугольника) выражаются целыми числами, если принять за единицу длины сторону наименьшего квадрата.

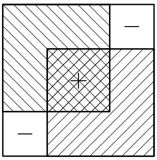
748. Прямоугольник с отношением сторон, равным золотому сечению, разрезан на квадраты, как на рисунке к задаче 736. (Квадраты отрезаются по кругу: снизу, справа, сверху, слева, снова снизу и т.д.) Как найти положение оставшейся точки, используя циркуль и линейку?

749. Кузнечик прыгает по прямой, делая прыжки (в любом направлении) двух типов: большие и маленькие. При этом длины большого и маленького прыжков всегда одинаковы, и длина большого прыжка несоизмерима (не имеет общей меры) с длиной маленького. Докажите, что где бы ни находился кузнечик и какой бы короткий промежуток на прямой мы ни выбрали, кузнечик всегда сможет (несколькими прыжками) попасть в этот промежуток.

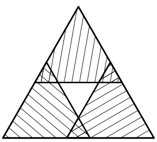
750. На клетчатой бумаге провели прямую и из каждого узла сетки опустили на эту прямую перпендикуляр. Основания этих перпендикуляров отметили, и все они оказались разными. Докажите, что они *всюду плотны* на этой прямой: на любой сколь угодно малый отрезок попадает хотя бы одно из них.

751. Муравей бегает по круговой дорожке длиной 10 м (всё время в одну сторону) и делает остановки через равные расстояния. Докажите, что каково бы ни было расстояние между остановками, можно найти две точки остановки, отстоящие друг от друга не более чем на 1 мм.

752. В узлах клетчатой бумаги, кроме $(0,0)$, нарисовали маленькие окружности одного и того же размера (центры окружностей — в узлах). Докажите, что как бы ни был мал размер окружностей, они полностью закрывают вид из точки $(0,0)$: любой луч, выходящий из этой точки, пересекает хотя бы одну окружность.



753. Пользуясь рисунком, покажите, что если площадь одного квадрата с целочисленными сторонами вдвое больше площади другого квадрата с целочисленными сторонами, то можно найти пару квадратов меньшего размера (с целочисленными сторонами) с тем же свойством. Повторяя это многократно, мы приходим к противоречию, доказав тем самым иррациональность числа $\sqrt{2}$.



754. (Продолжение) Пользуясь следующим рисунком, докажите аналогичным образом иррациональность числа $\sqrt{3}$.

33. Тригонометрия

Что такое тригонометрия?

Представьте себе, что злой волшебник Бормидав запер вас в темнице и говорит: «Выпущу, если найдёшь третью сторону треугольника со сторонами 1 м и 2 м и углом в 40° между ними, притом с ошибкой не более 1 мм». Как выбраться из темницы?

Что можно сказать по поводу этого вопроса? Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними говорит, что все треугольники с данной парой сторон и углом между ними равны, так что вопрос имеет смысл. В принципе, конечно, можно пытаться сделать точный чертёж и измерить по нему, но вряд ли реально выполнить построение с такой точностью (даже если в темнице есть карандаш, бумага, линейка и транспортир).

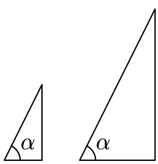
Можно ещё заметить, что искомое расстояние явно больше метра и меньше трёх, так что можно перепробовать все варианты (с шагом 1 мм) — один из них будет правильным. Но что делать, если волшебник наказывает за неправильные ответы?

В этом разделе мы увидим, как можно найти искомую сторону с помощью «теоремы косинусов» (имея калькулятор и таблицу косинусов). Такого типа задачи: *знал некоторые элементы треугольника* (*стороны и углы*), *найти другие его элементы*, — относят к *тригонометрии*. Слово «тригонометрия» можно расшифровать как «измерение треугольников»; тригон — это треугольник, подобно тому как пентагон — пятиугольник. (Зловещий «Пентагон» советской пропаганды — всего лишь пятиугольное здание министерства обороны США.)

Находить элементы треугольников нужно было при составлении карт. В XIX веке не было ни спутников системы GPS, ни даже аэрофотосъёмки — а карты местности тем не менее были, и притом довольно точные. Как же их делали? На местности строили сеть геодезических вышек, и вся территория страны разбивалась на треугольники с вершинами в этих вышках. (Некоторые вышки сохранились и до сих пор, так что вы могли их видеть.) Это называлось научным словом «триангуляция». Важно, чтобы с каждой вышки были хорошо видны соседние. Забравшись на такую вышку, геодезист измерял углы между направлениями на соседние вышки (углы треугольников). После этого достаточно было один раз померить расстояние между какими-то двумя соседними вышками, чтобы найти все остальные расстояния с помощью тригонометрии. (Конечно, на практике для надёжности мерили несколько расстояний.)

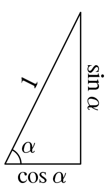
Сейчас, конечно, есть другие способы составления карт, но что такое тригонометрические функции (синус, косинус и другие), всё равно знать нужно (хотя бы для программирования тех же спутников и навигаторов).

* * *



Нарисуем несколько прямоугольных треугольников с одним и тем же острым углом α. Все они подобны друг другу, и потому отношения сторон у них одинаковые. Эти отношения имеют традиционные названия:

- *Синусом* острого угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. Обозначение: $\sin\alpha$.
- *Косинусом* острого угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Обозначение: $\cos\alpha$.
- *Тангенсом* острого угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему. Обозначение: $\operatorname{tg}\alpha$.



Удобно представлять себе треугольник с гипотенузой 1: катеты такого треугольника равны $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а их отношение равно $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$.

755. Докажите, что синус и косинус острого угла меньше 1.

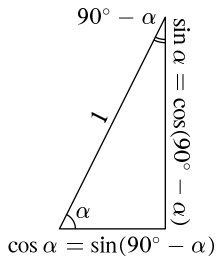
$\triangleright$ Катет короче гипотенузы. $\triangleleft$

756. Докажите, что $\sin\alpha+\cos\alpha > 1$ для любого острого угла α.

$\triangleright$ Сумма катетов длиннее гипотенузы (неравенство треугольника). $\triangleleft$

757. Докажите, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\triangleright$ Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. $\triangleleft$



758. Докажите, что $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

$\triangleright$ Катет, противолежащий одному острому углу, будет прилежащим к другому, который как раз равен $90^\circ - \alpha$ (где α — первый угол). $\triangleleft$

759. Чему равен $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = a$?

$\triangleright$ Синус и косинус меняются местами, так что $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 1/a$. $\triangleleft$

760. Чему равны синусы, косинусы и тангенсы углов в 30°, 45°, 60°, 90°?

$\triangleright$ В прямоугольном треугольнике с углом в 30° меньший катет равен половине гипотенузы (достраиваем до правильного треугольника, задача 167), так что $\sin 30^\circ = 1/2$. Больший катет можно найти по теореме Пифагора: если гипотенуза равна 1, то он равен

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Их отношение, $\operatorname{tg} 30^\circ$, поэтому равно $1/\sqrt{3}$.

Для угла в 60° всё наоборот: $\cos 60^\circ = 1/2$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Наконец, для прямоугольного треугольника с углом 45° (равнобедренный прямоугольный треугольник, половинка квадрата) имеем

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$$

(диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз длиннее его стороны), а $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. $\triangleleft$

761. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$ (для острого угла α). Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$\rhd$ Примем прилежащий катет за единицу, тогда противолежащий катет будет 2. По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, так что $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$ и $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$. $\lhd$

В общем виде: если $\operatorname{tg}\alpha = a$, то гипотенуза будет $\sqrt{1+a^2}$, так что $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+a^2}$ и $\sin\alpha = a/\sqrt{1+a^2}$. Другими словами, можно написать такие формулы, выражающие синус и косинус острого угла через его тангенс:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Выразить тангенс через синус (или косинус) ещё проще: так как $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

значит,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

(аналогично для косинуса).

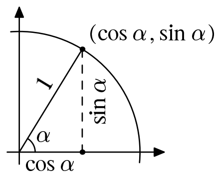
Эти формулы позволяют найти синус по тангенсу или наоборот, но как найти синус, если известна градусная мера угла? Для этого выпускались таблицы в виде книг. Например, в СССР неоднократно издавалась книга «Восьмизначные таблицы тригонометрических функций» Л. С. Хренова (464 страницы в издании 1967 года); его же «Семизначные таблицы...» занимали 406 страниц (издание 1971 года), «Шестизначные таблицы...» издания 1978 года — 367 страниц, а «Пятизначные таблицы...» (издание 1949 года) — всего 103 страницы. В стандартный комплект школьных учебников издавна входили «табли-

Таблица VIII. СИНУСЫ.

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	585
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	599
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	612
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	626
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	640
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	653
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	666
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	679
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	692
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	704

цы Брадиса» — брошюра с разными математическими таблицами, составленная В. М. Брадисом. Фрагмент таблицы синусов из этой брошюры воспроизведён на рисунке выше. (Конечно, сами значения в этих таблицах были известны и до Хренова с Брадисом, они лишь организовали материал и подготовили издание.) Удивительным образом эти таблицы до сих пор переиздаются, и в интернет-магазинах можно купить издание 2012 года, которое, как и много лет назад, открывается таблицей «Точные произведения двузначных чисел».

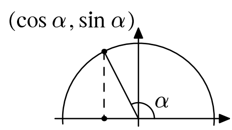
Определение синуса и косинуса можно пересказать другими словами.



Нарисуем на координатной плоскости круг единичного радиуса и возьмём на нём точку, видимую из центра круга под углом α к горизонтали (см. рисунок). Тогда координаты этой точки будут $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

762. Формально синус и косинус определены у нас для острых углов. Как вы думаете, чему разумно считать равным синус и косинус прямого угла?

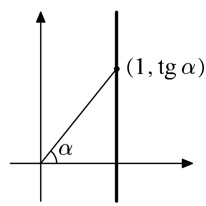
▷ Когда угол приближается к прямому, точка на окружности приближается к вертикальной оси, и для прямого угла её координаты будут $(0, 1)$. Поэтому разумно считать $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$. ◁



Легко догадаться, как разумно определить синус и косинус для тупых углов: нужно просто идти дальше по тому же кругу, пока угол не станет тупым, и взять координаты получившейся точки.

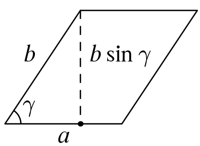
При этом косинус (первая координата) станет отрицательным, поскольку точка лежит слева от вертикальной оси.

763. Чему равны $\sin(90^\circ + \beta)$ и $\cos(90^\circ + \beta)$? [Ответ: $\sin(90^\circ+\beta) = \cos\beta$; $\cos(90^\circ+\beta) = -\sin\beta$.]



Тангенс можно представлять себе так: проведём на координатной плоскости прямую под углом α (с горизонталью) до пересечения с вертикальной прямой $x = 1$. Получится прямоугольный треугольник с углом α и прилежащим катетом 1, так что координаты точки пересечения будут $(1, \operatorname{tg}\alpha)$.

Уравнение прямой будет $y = (\operatorname{tg}\alpha) \cdot x$, так что то, что мы кратко называли «наклоном» прямой (коэффициент при x), будет тангенсом угла наклона этой прямой. Видно, что с ростом (острого) угла α величина $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает (а когда угол приближается к прямому, точка пересечения уходит вверх неограниченно и тангенс, как говорят, «стремится к бесконечности»). Из формулы $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ видно, что с ростом α и $\operatorname{tg}\alpha$ значение $\cos\alpha$ убывает (знаменатель растёт). А с убыванием $\cos\alpha$ значение $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ растёт. (Наглядно рост $\sin\alpha$ и убывание $\cos\alpha$ с ростом угла α тоже понятны: когда острый угол α увеличивается, точка на окружности движется влево-вверх.)



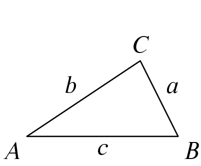
764. Докажите, что если стороны параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен γ, то площадь этого параллелограмма равна $ab\sin\gamma$.

▷ Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту. Взяв a в качестве основания, видим, что опущенная на него высота равна $b\sin\gamma$. ◁

Эта формула годится не только для острого угла γ, но и для тупого. Для прямого угла она превращается в формулу для площади прямоугольника (произведение сторон), поскольку синус прямого угла равен единице.

765. Две стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ. Чему равна площадь этого треугольника?

▷ Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма из предыдущей задачи (половине произведения основания на высоту), то есть $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. ◁



Заметим, что в формуле для площади треугольника можно брать разные углы (и соответствующие стороны). Например, для треугольника ABC со сторонами a, b, c (лежащими против одноимённых углов, см. рисунок) можно написать

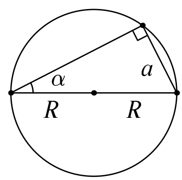
$$2S = ab\sin\angle C = bc\sin\angle A.$$

В последнем равенстве можно b сократить, и получится $a \sin \angle C = c \sin \angle A$. Другими словами, $a/(\sin \angle A) = c/(\sin \angle C)$: отношение стороны к синусу противолежащего угла одно и то же у двух сторон. Разумеется, точно так же можно сравнить и две другие стороны, так что мы приходим к равенству, которое называют *теоремой синусов*:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}.$$

Можно доказать теорему синусов и не используя площади:

766. Вписанный в окружность радиуса R угол α опирается на хорду длины a. Докажите, что $a = 2R \sin \alpha$.



▷ Прежде всего заметим, что все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, равны. Поэтому при вычислении длины хорды можно брать тот угол, который удобнее. Возьмём угол, у которого одна из сторон является диаметром окружности. Образуется прямоугольный треугольник с гипотенузой $2R$ и острым углом α. Катет, противолежащий этому углу, и есть интересующая нас хорда. Значит, её длина равна $2R \sin \alpha$. ◁

767. Докажите с помощью предыдущей задачи теорему синусов и установите, что указанное в ней отношение равно диаметру описанной около треугольника окружности.

▷ В самом деле, предыдущая задача показывает, что $a = 2R \sin \angle A$, то есть что

$$\frac{a}{\sin \angle A} = 2R.$$

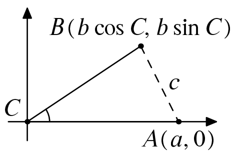
Аналогично и для двух других сторон треугольника. ◁

Теорема синусов может быть полезна для отыскания элементов треугольника. Пусть, скажем, мы знаем все три стороны треугольника и один из его углов (точнее, его синус). Тогда с помощью теоремы синусов можно найти синусы двух других углов.

Однако злой волшебник, с которого мы начали этот раздел, хотел другого: известны две стороны треугольника и угол между ними, найти третью сторону. Для этого годится другая теорема, называемая *теоремой косинусов*:

> В треугольнике со сторонами a, b, c выполнено равенство:
>
> $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C,$$
>
> где C — угол, опирающийся на сторону c.

768. Докажите теорему косинусов.



▷ По существу мы уже встречались с этой теоремой в задачах 595 и 596, но теперь можно доказать её совсем просто с помощью формулы для расстояния в координатах. Расположим наш треугольник так, чтобы точка C попала в начало координат, сторона a шла по горизонтальной оси (а сторона b — как получится, то есть под углом α к горизонтали). Тогда координаты точки A будут $(a, 0)$, а координаты точки B будут $(b\cos\angle C, b\sin\angle C)$. Чтобы найти $c = AB$, можно воспользоваться формулой для расстояния в координатах (для краткости мы обозначаем угол просто буквой C):

$$\begin{aligned} c^2 &= (b\cos C - a)^2 + (b\sin C - 0)^2 = \\ &= b^2\cos^2 C - 2ab\cos C + a^2 + b^2\sin^2 C. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что

$$b^2\cos^2 C + b^2\sin^2 C = b^2(\cos^2 C + \sin^2 C) = b^2.$$

Теорема косинусов доказана. ◁

На нашем рисунке угол $\angle C$ был острым, но ровно то же самое рассуждение годится и для тупого угла $\angle C$.

Теперь мы можем ответить на вопрос, с которого начинался раздел. Если две стороны треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен $40°$, то по теореме косинусов квадрат третьей стороны равен

$$1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 40° = 1+4-4\cdot 0{,}7660\ldots \approx 1{,}9358\ldots$$

и сама эта сторона равна $\sqrt{1{,}9358\ldots} = 1{,}3913\ldots$; сказав «1 метр и 391 миллиметр», мы выходим из заточения.

Правда, для этого нужна не только теорема косинусов, но и таблица, в которой можно найти косинус 40°. (А также надо уметь складывать, вычитать, умножать, вычислять квадратные корни и оценивать точность вычислений, так что всё не так просто.)

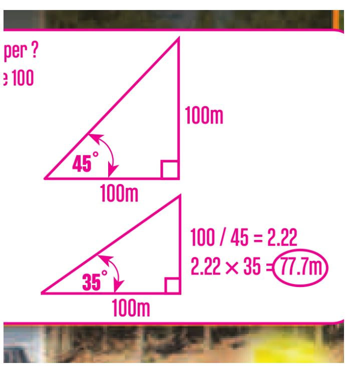
Ещё, конечно, неплохо бы объяснить, откуда люди узнали, чему равен $\cos 40^\circ$, то есть как были составлены первые таблицы тригонометрических функций. Это сложная история; считается, что первые подобные таблицы были составлены древнегреческим астрономом Гиппархом, но они не сохранились. В новейшие времена тригонометрические функции вычисляют с помощью средств математического анализа (разложение в ряды и пр.) — сначала это делали вручную, а теперь соответствующие программы есть в большинстве калькуляторов.

На этом мы заканчиваем наше краткое знакомство с тригонометрией; многие важные утверждения приведены ниже в качестве задач.

Ещё несколько задач

769. Как выразить $\sin(180^\circ - \alpha)$ и $\cos(180^\circ - \alpha)$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?

770. На картинке (взятой с сайта известной фирмы детских игрушек) предлагается способ отыскания катета прямоугольного треугольника, лежащего



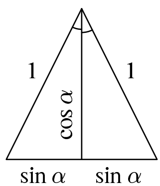
против угла в 35°, если другой катет равен 100 м. Что имели в виду авторы этой картинки и почему их способ неверен? (Правильный ответ около 70 м.)

771. Докажите, что для произвольного острого угла выполняется неравенство $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$. Для каких α достигается равенство? ⟨Нарисуйте на координатной плоскости окружность и прямую $x + y = \sqrt{2}$.⟩

772. Имеются три угла α, β, γ, причём

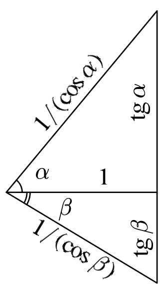
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Докажите, что $\sin\alpha \leqslant \sin\beta + \sin\gamma$. ⟨Можно записать неравенство треугольника для треугольника с углами α, β и γ.⟩



773. Рассмотрим равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине равен 2α, а боковые стороны равны 1. Покажите, что его основание равно $2\sin\alpha$, а высота равна $\cos\alpha$, так что площадь треугольника равна $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Покажите, что его площадь также равна $\frac{1}{2}\sin(2\alpha)$, тем самым доказав *формулу синуса двойного угла*:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$



774. Вычислите площадь треугольника на рисунке двумя способами (целиком и по частям) и докажите таким образом, что

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Выведите отсюда *формулу синуса суммы*:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

775. Координатную плоскость повернули вокруг начала координат на угол α против часовой стрелки. Куда после этого попала точка $(x, 0)$? [Ответ: $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$.]

776 (Продолжение). Куда после этого попала точка $(0, y)$? [Ответ: $(-y\sin\alpha, y\cos\alpha)$.]

777 (Продолжение). Куда после этого попала точка (x, y)?

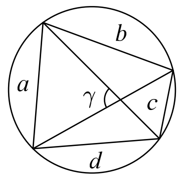
[Ответ: $(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.]

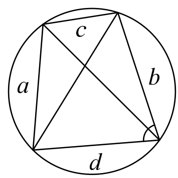
778 (Продолжение). Применив предыдущую задачу к точке $(\cos\beta, \sin\beta)$, получите снова формулу синуса суммы, а также *формулу косинуса суммы*:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

779. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = a$. [Ответ: $2a^2 - 1$.]

780. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей, умноженного на синус угла между ними.





781. Докажите *теорему Птолемея*: *произведение диагоналей вписанного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d равно сумме произведений противоположных сторон $ac + bd$*. ⟨Площадь четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей, умноженному на синус угла γ между ними. Перевернём треугольник со сторонами b, c на другую сторону (вместе с сегментом окружности, в который он вписан). Получится четырёхугольник той же площади, и эту площадь можно найти как половину от $ac\sin\gamma + bd\sin\gamma$ (проверьте, что снова появляется тот же угол γ).⟩

782. Покажите, что если одна из диагоналей четырёхугольника в теореме Птолемея является диаметром, то мы получаем в качестве частного случая формулу суммы синусов.

783. На координатной плоскости нарисована окружность единичного радиуса $x^2 + y^2 = 1$. Через точку $A(-1, 0)$ этой окружности проведена прямая с наклоном k. Найдите уравнение этой прямой и вторую точку её пересечения с окружностью. ⟨Уравнение прямой $y = k(x+1)$; вторая точка пересечения находится из условия $x^2 + k(x+1)^2 = 1$; это квадратное уравнение, у которого один корень равен -1, второй можно найти по теореме Виета и он равен $(1-k^2)/(1+k^2)$, получается точка $((1-k^2)/(1+k^2), 2k/(1+k^2))$.⟩

784 (Продолжение). Выведите отсюда формулы, выражающие $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

785 (Продолжение). Покажите, что если число k рационально, то и вторая точка пересечения прямой с окружностью имеет обе рациональные координаты. Как найти с помощью этого наблюдения бесконечно много рациональных точек на окружности (=точек, обе координаты которых рациональны)? Почему так получатся все рациональные точки окружности? Как связаны рациональные точки на окружности с пифагоровыми тройками (прямоугольными треугольниками с целыми сторонами)?

786. В семизначных таблицах тригонометических функций профессора Хренова (о которых мы говорили) 406 страниц, а в пятизначных — всего 103. Почему такая разница — два лишних знака (семь вместо пяти) увеличивают объём таблиц чуть ли не в четыре раза? (Тут есть причина, не связанная с размером страниц книги, шрифта, набором табулируемых функций и пр.)

Послесловие

Цели школьного курса геометрии

Школьная геометрия вообще вещь довольно странная. Традиционно евклидова геометрия служила для философов образцом строгости — но невозможно строго и понятно изложить доказательства признаков равенства треугольников. Элементарную геометрию преподают по всему миру уже несколько тысяч лет — но трудно сказать, кому уж так важно знать, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Знаменитый французский математик Жан Дьёдонне с большим жаром и остроумием пишет в предисловии к своей книге «Линейная алгебра и элементарная геометрия» (М.: Наука, 1972, русский перевод): «В элементарной геометрии [в результате развития линейной алгебры] открылся ⟨...⟩ „королевский путь“: отправляясь от очень простых аксиом ⟨...⟩ можно при помощи тривиальных вычислений непосредственно и в несколько строчек получить всё то, для чего раньше нужно было возводить леса искусственных и сложных систем треугольников, чтобы во что бы то ни стало свести задачу к священным случаям „равенства“ или „подобия“ треугольников — к единственной основе всей традиционной техники Евклида».

В других местах того же предисловия: «Важнее ли ⟨...⟩ для конструктора знать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, или же овладеть принципами теории сопротивления материалов? Конечно, тригонометрические формулы совершенно необходимы для представителей трёх очень почтенных профессий: (1) для астрономов; (2) для геодезистов; (3) для составителей учебников тригонометрии». А также: «Следствием развития математики является то, что результаты, которые первооткрыватели получают после трудных рассуждений, зачастую через 50–100 лет могут быть выведены на нескольких строчках. ⟨...⟩ Примером ⟨...⟩ является изобретение анализа бесконечно малых. Оно сразу свело решение проблем, над которыми бились изощрённые умы Евдокса и Архимеда, к почти автоматическим вычислениям».

Подобными соображениями руководствовался не только Дьёдонне, и не только во Франции: примерно те же мотивы привели к замене «арифметического решения текстовых задач» и простых дробей в младших классах на «уравнения с иксами» и калькуляторы, а также к введению в школьную программу «элементов математического анализа».

К сожалению, эти реформы (теперь, видимо, это уже всем стало ясно) оказались откровенно неудачными, несмотря на участие в них выдающихся математиков. Скажем, учебник геометрии с участием Колмогорова[1] (как, впрочем, и последующий учебник Погорелова[2]), как показала практика, оказался явно менее удачным, чем старинный учебник Киселёва[3] — не имевшего никаких математических достижений. Как мне кажется, принципиальная ошибка была в следующем: цель курса математики не в сообщении заранее определённого набора сведений логически кратчайшим путём[4], а в практике решения задач и получения удовольствия от этого. Пробежки в парке на уроках физкультуры вовсе не теряют смысла от того, что вдоль него проложили автобусный маршрут. И как бы ни были ограничены (подготовкой, природными склонностями и пр.) возможности школьника к самостоятельному движению, от замены его поездками в автобусе-экспрессе будет только вред.[5]

Задачник и учебник

Если исходить из сказанного выше, то самое главное в школьном курсе геометрии — практика решения задач. Выучивание теорем и доказательств само по себе бессмысленно, если не решать задач. С другой стороны, большая часть теоретического материала может быть развёрнута в последовательность задач.[6]

В отличие от ситуации с учебниками, в последние десятилетия появилось много хороших задачников по геометрии (в частности, задачники

---

[1] А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрия. Учебное пособие для 6–8 классов. М.: Просвещение, 1980.

[2] А.В. Погорелов. Геометрия: Учебное пособие для 6–10 классов средних школ. М.: Просвещение, 1985.

[3] А.П. Киселёв. Элементарная геометрия. Для средних учебных заведений. М.: Типография Рябушинского, 1914.

[4] Как до сих пор считают чиновники от образования, объявляющие конкурс учебников по заранее составленной программе.

[5] В принципе, Дьёдонне это понимал. В том же предисловии он пишет: «Согласен, скажете вы, пусть теоремы, которым учат школьников, предназначены для того, чтобы в дальнейшем быть забытыми; однако, упражняясь на этих искусственных примерах, они познакомятся с методами исследований и приобретут навыки мышления, которые в дальнейшем окажут им большую помощь». Но дальше он странным образом отвечает на это: «Сказанное, несомненно, было правильным в эпоху, предшествующую Декарту, но оно устарело уже для современников Ньютона. Действительно, следствием развития математики является то, что результаты, которые первооткрыватели получают, следуя по извилистым и иногда тёмным путям, зачастую через 50–100 лет могут быть выведены на нескольких строчках» (мы уже приводили конец этой цитаты). Не очень понятно, как этот вывод «на нескольких строчках» может заменить приобретение навыков мышления (пусть на искусственных примерах).

[6] Так происходит, например, на уроках Р.К. Гордина в московской школе № 57 — школьникам раздаются листки с задачами, которые они решают на уроках и дома, а учебник открывают разве что при подготовке к экзамену в самом конце. Надо учесть, впрочем, что это школа с углублённым изучением математики и соответствующим уровнем школьников.

Гордина, Прасолова, Шарыгина[1]). В них собрано множество интересных и трудных задач — и это достоинство оборачивается недостатком, если речь идёт о изучении базовых понятий и методов курса геометрии, когда важны прежде всего простые (но разнообразные, не сводящиеся к повторению по образцу) задачи.

Цель этого сборника состоит в том, чтобы попытаться собрать такие (простые, но разнообразные) задачи и расположить их в таком порядке, чтобы они могли служить основой для постепенного изучения планиметрии. Сборник, конечно, не может быть заменой учебника (такая задача требовала бы как минимум многолетнего опыта преподавания с его помощью и соответственной коррекции), но сделана попытка включить базовый теоретический материал в последовательность естественно развивающихся задач. Некоторая доля более сложных задач тоже включена, чтобы и лучше подготовленным школьникам (и преподавателям) было интересно. Задачи предваряют краткие пояснения, рассчитанные на то, что школьники отчасти знакомы с понятиями и терминологией (из объяснений учителя, учебников и пр.).

При отборе задач я старался в первую очередь включить задачи с интересными и легко запоминающимся условиями и решениями, а также задачи, связывающие геометрию с окружающей действительностью (в том числе и не очень формально поставленные). Конечно, в практическом преподавании по технологическим причинам необходимы и похожие (однотипные) задачи, а также зачастую скучные задачи на вычисление — просто потому, что их легче проверять (по ответу). В сборнике таких совсем мало, и тут, видимо, надо обращаться к другим задачникам.

Математическая строгость

Как мне кажется, геометрические доказательства должны (по крайней мере вначале) восприниматься как убедительные рассуждения о свойствах реальных предметов — вырезанных из бумаги треугольников, измеренных линейкой отрезков и т. п. Поэтому, скажем, «доказательство» признака равенства треугольников, основанное на прикладывании одного к другому или на переворачивании треугольника, хотя и может рассматриваться как доказательство с большой натяжкой (в учебнике Погорелова есть аксиома о возможности откладывания треугольника, равного данному, по данную сторону от данного луча), тем не менее вполне уместно.

[1] Р. К. Гордин. Планиметрия. Задачник. 7–9 классы. М.: МЦНМО, 2012; В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1986, МЦНМО, 2007; И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1982.

С другой стороны, в тех случаях, когда рассуждение имеет ясную логическую структуру, её следует подчёркивать.

Более или менее разумная граница, по-моему, проходит так: если мы утверждаем, что какие-то отрезки равны, это доказывать надо, а вот обосновывать, что какие-то прямые действительно пересекутся или что точка действительно попадет по данную сторону от прямой — не надо (разве что это можно сделать особенно красиво и убедительно). Таким образом, вся часть рассуждений, связанная с «аксиомами порядка» (в терминологии «Оснований геометрии» Гильберта[1]) более или менее полностью пропадает. Как мне кажется, такая граница между тем, что принято доказывать, и тем, что доказывать не принято, достаточно хорошо воспринимается школьниками (и лишь в конце курса, уже имея некоторую математическую культуру, лучшие из них могут осознать имевшие место пробелы аргументации).

Об измерении отрезков и углов: Евклид[2] и старинные учебники (Адамар[3], отчасти Киселёв) уделяют этому большое внимание, а современные с самого начала предполагают, что длина отрезка и величина угла являются числами (что бы это ни значило) и обладают нужными свойствами. Видимо, второе более практично, и надо так и делать.

В качестве de facto аксиом стоит использовать утверждения, которые чаще всего нужны при решении задач: признаки равенства треугольников, критерий параллельности прямых (равенство углов при секущей), сохранение отношений отрезков при параллельном проектировании (доказав для случая соизмеримых отрезков, можно пользоваться общим утверждением), формулу для площади прямоугольника (см. соответствующие разделы). Обсуждение проблем «строгого» доказательства этих фактов явно выходит за рамки базового курса геометрии. (См. брошюру автора[4], где рассмотрены некоторые из них.)

Как возникла эта книга

Эти задачи в основном были собраны в середине 1990-х годов, когда я ездил к И. М. Гельфанду для совместной работы над заданиями организованной им заочной математической школы при Rutgers University, а также над книжкой для школьников по алгебре[5]. В частности, под на-

[1] Д. Гильберт. Основания геометрии. М.: ОГИЗ, 1948.

[2] Начала Евклида. Книги I–VI. М. – Л.: ГТТИ, 1948.

[3] Ж. Адамар. Элементарная геометрия. Часть первая. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948.

[4] А. Шень. О «математической строгости» и школьном курсе математики. М.: МЦНМО, 2011.

[5] И. М. Гельфанд, А. Шень. Алгебра. М.: МЦНМО, 2009.

блюдением И. М. я составлял список задач по планиметрии — но так и не успел тогда закончить, и этот текст представляет собой промежуточную рабочую версию, впоследствии дополненную (и за ошибки в которой И. М. никак не ответствен).

Мне хочется надеяться, что идеи и замечания И. М. по поводу этих задач (и вообще по поводу преподавания математики) в достаточной степени проявились в получившемся сборнике.

Как сообщила мне Т. Алексеевская, сейчас готовится к изданию (на английском языке) книга для школьников по геометрии, написанная ею совместно с И. М.

Пользуюсь случаем поблагодарить своих учителей (в частности, геометрии) и коллег, разговоры и советы которых (по поводу этого сборника, преподавания геометрии и вообще) оказали на меня большое влияние, в том числе Г. А. Чувахину, Т. М. Великанову, Б. П. Гейдмана, Р. К. Гордина, С. В. Маркелова, В. В. Прасолова, В. М. Сапожникова, И. Ф. Шарыгина. Эта книга так бы и не появилась, если бы не П. Р. Гольдштейн, который прочёл предварительный вариант текста, указав на разные ошибки (ныне исправленные) и убедил довести дело до конца.

Благодарю также Ольгу Гагаркину и Дмитрия Щербакова, изготовивших METAPOST-программы для большей части рисунков (остальные я сделал сам), а также всех читателей предварительного варианта, указавших на недочёты книги. Татьяна Коробкова обнаружила множество ошибок и опечаток, не замеченных мною, а Виктор Шувалов их исправил (или велел исправить), а также усовершенствовал вёрстку и размещение картинок. Большое спасибо!

Александр Шень

shen@landau.ac.ru, shen@mccme.ru, sasha.shen@gmail.com.

Москва, Монпелье, март 2013 года.

Александр Шень

ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ

Редактор *Т. Л. Коробкова*
Рисунки (METAPOST): *О. Гагаркина, А. Шень, Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 12.11.2014 г. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 15. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ОАО «Щербинская типография».
117623, Москва, Типографская ул., д. 10. Тел. (495) 659-23-27.