Алгебра

Israel M. Gelfand, Alexander Shen

И. М. Гельфанд
А. Шень

АЛГЕБРА

Издание четвёртое, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

ББК 22.141
Г32

Гельфанд И. М., Шень А.

Г32 Алгебра. — 4-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2017. — 144 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0946-2

Эта книга — про алгебру. Алгебра — наука древняя, и от повседневного употребления её сокровища поблекли. Авторы старались вернуть им первоначальный блеск.

Основную часть книги составляют задачи, большинство которых приводится с решениями. Начав с элементарной арифметики, читатель постепенно знакомится с основными темами школьного курса алгебры, а также с некоторыми вопросами, выходящими за рамки школьной программы, так что школьники разных классов (от 6 до 11) могут найти в книге темы для размышлений.

Предыдущее издание книги вышло в 2014 г.

ББК 22.141

Файл книги: ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/algebra.pdf
исходные тексты: ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/algebra.zip

Израиль Моисеевич Гельфанд
Александр Шень

АЛГЕБРА

12+

Обложка: *Т. Алексеевская*
Техн. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 07.07.2016. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объём 9 печ. л. Гарнитура тип таймс. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-0946-2

1. Предисловие

Эта книга — про алгебру. Алгебра — наука древняя, и от повседневного употребления её сокровища поблекли. Мы старались вернуть им прежний блеск.

Основную часть книги составляют задачи. Мы советуем такой порядок действий: решить задачу; сравнить своё решение с приведённым в книге (если оно там есть); перейти к следующей задаче. Если вам не удаётся решить задачу (а среди них есть и трудные), можно посмотреть указание или прочесть решение. Если решения нет, то можно смело читать дальше и вернуться к этой задаче в другой раз.

Книга состоит из разделов, посвящённых самым разным темам. Некоторые из них совсем короткие, есть и подлиннее.

Вы, конечно, прекрасно знаете арифметику, но освежить её в памяти не помешает. Начнём с самых простых вещей.

2. Перемена мест слагаемых

Сложим 3 и 5:

$$3+5=8.$$

А теперь переставим слагаемые:

$$5+3=8.$$

Ответ не изменился. Любитель электроники, для которого сложение — не более чем клавиша «+» на калькуляторе, будет удивлён. Ведь в первый раз он нажимал клавиши в таком порядке:

$$\boxed{3}\quad\boxed{+}\quad\boxed{5}\quad\boxed{=}\,,$$

а во второй раз — совсем в другом:

$$\boxed{5}\quad\boxed{+}\quad\boxed{3}\quad\boxed{=}\,.$$

Почему же на экране появилось одно и то же число 8?

Мы с вами знаем, в чём здесь дело. Получить сначала 3 яблока, а потом 5 — то же самое, что получить сначала 5, а потом 3 — и так, и этак будет 8: *от перемены мест слагаемых сумма не меняется.*

$$5 + 3 = 3 + 5$$

3. Перемена мест сомножителей

Аналогичным свойством обладает умножение. Но прежде договоримся об обозначениях. В арифметике умножение обозначают косым крестом «×». В алгебре этот знак употребляют редко. Обычно его заменяют точкой «·». Будем так делать и мы.

Сравним $3 \cdot 5$ и $5 \cdot 3$. Оба произведения равны 15. Но почему они одинаковы, объяснить уже не так легко. Ведь дать трём мальчикам по пять яблок и дать пятерым мальчикам по три яблока — это вовсе не одно и то же.

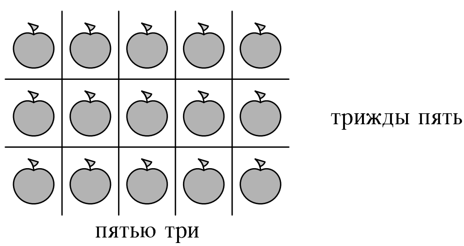
Один из авторов как-то спросил первоклассницу, сколько будет дважды четыре.

— Восемь, — сразу же ответила она.

— А четырежды два?

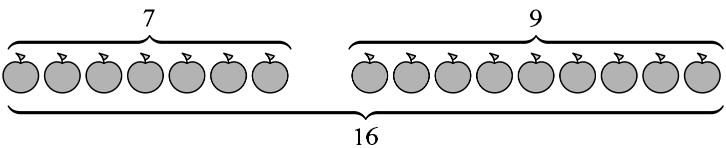
Тут девочка задумалась, складывая в уме $2 + 2 + 2 + 2$. Пройдёт год, она твёрдо запомнит, что от перемены мест сомножителей произведение не меняется, и забудет, что когда-то это было вовсе не так уж и ясно.

Проще всего равенство $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$ объяснить на картинке: яблоки в прямоугольнике можно считать по рядам (три ряда из пяти яблок) или по колонкам (пять колонок по три яблока).



4. Сложение столбиком

Чтобы узнать, сколько будет $7+9$, можно нарисовать 7 яблок, рядом 9 яблок и сосчитать, сколько всего яблок: одно, два, три, четыре, ..., пятнадцать, шестнадцать. Получим: $7+9=16$.



Таким способом можно складывать любые числа. Но чтобы таким способом сложить, к примеру, 137 и 268, понадобится изрядное терпение. И математики изобрели другие способы. Один из них — сложение столбиком.

В разное время и в разных странах люди записывали числа по-разному, и об этом написаны целые книги. Мы так привыкли с детства к записи чисел в десятичной системе с помощью цифр 0, 1, 2, ..., 8, 9, что с трудом можем представить себе, насколько её изобретение облегчило вычисления.

Даже сама возможность записывать сколь угодно большие числа — и при том достаточно коротко — для древних была вовсе не очевидной. Великий древнегреческий математик Архимед написал книгу «Псаммит, или исчисление песка» о том, что можно записать число, большее числа песчинок, заполняющих целиком сферу с радиусом, равным расстоянию от Земли до неподвижных звёзд.

Сейчас десятичная система вне конкуренции, если не считать двоичной системы, которая распространена не среди людей, а среди компьютеров. В двоичной системе всего две цифры (0 и 1), числа записываются длиннее. Компьютеру это не страшно — лишь бы правила арифметических действий были простыми.

О двоичной системе мы ещё поговорим, а пока вернёмся к сложению чисел, записанных в десятичной системе. Их складывают «в столбик». Мы не будем объяснять вам, как это делается — вы это знаете сами. Попробуйте решить такую задачу.

$\boxed{1}$ В строку написано несколько восьмёрок. Кое-где между ними вставлены знаки «+», причём полученная сумма равна 1000. Как так может быть? Приведите пример с минимальным возможным числом слагаемых. (Например, расстановка $88+88+8+8+88$ не подходит, так как получается не 1000, а всего лишь 280.)

Решение. Запишем сложение в столбик:

$$\begin{array}{r} \ldots 8 \\ \ldots . \\ \underline{\ldots 8} \\ 1000 \end{array}$$

Мы не знаем, сколько слагаемых и сколько восьмёрок в каждом слагаемом. Известно, однако, что каждое слагаемое кончается на 8 и что в разряде единиц суммы стоит 0. Чтобы восьмёрки дали нуль, нужно как минимум 5 слагаемых:

$$\begin{array}{r} \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \ldots 8 \\ \underline{\ldots 8} \\ 1000 \end{array}$$

При этом в уме остаётся 4, так как $8+8+8+8+8=40$. Чтобы в разряде десятков получить 0, к этой четвёрке нужно добавить две восьмёрки: $4+$ $+8+8=20$.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ ..88 \\ \underline{..88} \\ 1000 \end{array}$$

В уме остаётся 2, так что в разряде сотен нужна одна восьмёрка:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 88 \\ \underline{888} \\ 1000 \end{array}$$

Ответ. $8+8+8+88+888=1000$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какие цифры обозначены буквами А, Б и В в примере на сложение столбиком

$$\begin{array}{r} \text{ААА} \\ \underline{\text{БББ}} \\ \text{АААВ} \end{array}$$

(все буквы А обозначают одну и ту же цифру, буквы Б — другую, буквы В — третью)?

Решение. Цифра А равна единице — только единица может появиться при переносе из разряда сотен в разряд тысяч. Чтобы определить цифру Б, зададим себе такой вопрос: происходит ли перенос из разряда единиц в разряд десятков (при сложении А с Б)? Если бы он не происходил, то в разрядах единиц, десятков и сотен у суммы стояла бы одна и та же цифра — а это не так. Значит, перенос происходит. Поскольку $А=1$, это возможно лишь в случае $Б=9$. Получаем ответ: $А=1$, $Б=9$, $В=0$.

$$\begin{array}{r} 111 \\ 999 \\ \hline 1110 \end{array}$$

5. Таблица умножения. Умножение столбиком

Чтобы умножить, к примеру, 17 на 38, можно нарисовать картинку из 17 рядов по 38 точек и сосчитать все точки. Но так, конечно, не делают, а умножают в столбик.

Способ умножения в столбик (по-учёному «алгоритм умножения в столбик») основан на том, что у вас в голове есть готовая таблица умножения однозначных чисел. Таблицу эту надо — увы! — вызубрить, и если на заданный посреди ночи вопрос «Сколько будет семью восемь?» вы не отвечаете немедленно «Пятьдесят шесть!», а складываете спросонья семь восьмёрок или восемь семёрок, дело плохо.

А вот произведение $17 \cdot 38$ запоминать уже не надо, его можно вычислить в столбик (одним из двух способов):

$$\begin{array}{r} 17 \\ 38 \\ \hline 136 \\ 51 \\ \hline 646 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 38 \\ 17 \\ \hline 266 \\ 38 \\ \hline 646 \end{array}$$

Не удивляет ли вас — хоть немножко — что результаты совпадают (хотя промежуточные значения разные)?

Вот несколько задач на умножение столбиком.

3 Умножьте несколько трёхзначных чисел на 1001. Объясните наблюдаемую закономерность.

4 Умножьте 101010101 на 57.

5 Умножьте 10001 на 1020304050.

6 Умножьте 11111 на 1111.

7 Шестизначное число, первая цифра которого — единица, увеличится в три раза, если эту первую цифру переставить в конец. Найдите число.

Решение. Запишем умножение в столбик:

$$\begin{array}{r}1\text{АБВГД}\\ 3\\ \hline \text{АБВГД}1\end{array}$$

(А, Б, В, Г, Д обозначают неизвестные цифры; пока мы не знаем, есть ли среди них одинаковые). Цифра Д равна 7, поскольку из произведений

$$\begin{array}{lllll}3\times0=0, & 3\times1=3, & 3\times2=6, & 3\times3=9, & 3\times4=12,\\ 3\times5=15, & 3\times6=18, & 3\times7=21, & 3\times8=24, & 3\times9=27\end{array}$$

лишь $3\times7=21$ кончается на 1. Получаем:

$$\begin{array}{r}1\text{АБВГ}7\\ 3\\ \hline \text{АБВГ}71\end{array}$$

При умножении 3×7 в уме остаётся 2, поэтому $3\times\text{Г}$ должно кончаться на 5. Это возможно, лишь если $\text{Г}=5$:

$$\begin{array}{r}1\text{АБВ}57\\ 3\\ \hline \text{АБВ}571\end{array}$$

Аналогично находим $\text{В}=8$, $\text{Б}=2$, $\text{А}=4$.

Ответ.

$$\begin{array}{r}142857\\ 3\\ \hline 428571\end{array}$$

6. Деление «уголком»

Самое сложное из арифметических действий — деление. Чтобы почувствовать себя уверенно, решите такие задачи.

8 Разделите 123123123 на 123. (Проверьте ответ умножением!)

9 Делится ли число 111...1 (100 единиц) на число 1111111 без остатка?

10 Какой остаток получится, если разделить число 1000…0 (20 нулей) на 7?

11 Решая предыдущую задачу, вы могли заметить, что цифры в частном (и остатки) начинают повторяться:

$$
\begin{array}{l|l}
100000000\ldots & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{7} & \underbrace{142857}14 \\
30 & \\
\underline{28} & \\
20 & \\
\underline{14} & \\
60 & \\
\underline{56} & \\
40 & \\
\underline{35} & \\
50 & \\
\underline{49} & \\
10 & \\
\underline{7} & \\
30 & \\
\underline{28} & \\
2\ldots &
\end{array}
$$

Будет ли так продолжаться и дальше — или это случайность?

12 Разделите на 7 числа 2000…000 (20 нулей), 3000…000 (20 нулей), 4000…000 (20 нулей) и т. д. Сравните полученные ответы.

13 Умножьте число 142 857 на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и сравните результаты.

Запомнив число 142 857, можно удивлять своих знакомых фокусом: мгновенно умножать его на любое число от 2 до 7.

14 Попробуйте изобрести аналогичные фокусы, поделив 1000…0 на другие числа (заменив 7 на другое число).

7. Двоичная система счисления

15 Угадайте закономерность и продолжите таблицу на следующей странице, написав ещё пять – десять строк.

0
1
10
11
100
101
110
111
1000
1001
1010
1011
1100
…

16 Имеются гири в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г и 16 г (по одной штуке каждого веса). Убедитесь, что из них можно набрать любой вес от 0 до 31 граммов, продолжив таблицу («+» означает «гиря используется», «−» означает «не используется»).

	16	8	4	2	1		
0	−	−	−	−	−	00000	0
1	−	−	−	−	+	00001	1
2	−	−	−	+	−	00010	10
3	−	−	−	+	+	00011	11
4	−	−	+	−	−	00100	100
5	−	−	+	−	+	00101	101
6	−	−	+	+	−	00110	110
7	−	−	+	+	+	00111	111
8	−	+	−	−	−	01000	1000
9	−	+	−	−	+	01001	1001
10	−	+	−	+	−	01010	1010
11	−	+	−	+	+	01011	1011
…	…	…	…	…	…	…	…

В предыдущей задаче по существу используется та же самая таблица (0 и 1 соответствуют − и +). Эта таблица и задаёт перевод чисел из десятиной системы счисления в двоичную.

десятичная	двоичная
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
…	…

У двоичной системы есть преимущество: не надо запоминать десять цифр, достаточно двух. Но есть и недостаток: числа слишком длинные. (Например, число 1024 записывается в двоичной системе так: 10000000000.)

17 Догадайтесь, как записывается в двоичной системе счисления число 45.

18 Какое число записывается как 10101101 в двоичной системе счисления?

19 Сложите «столбиком» числа, записанные в двоичной системе:

$$1010 + 101 = ?$$
$$1111 + 1 = ?$$
$$1011 + 1 = ?$$
$$1111 + 1111 = ?$$

Проверьте ответы, переводя слагаемые и сумму в десятичную систему счисления.

20 Выполните вычитание чисел в двоичной системе «в столбик». Проверьте результаты, переведя все числа в десятичную систему.

$$1101 - 101 = ?$$
$$110 - 1 = ?$$
$$1000 - 1 = ?$$

21 Умножьте записанные в двоичной системе числа 1101 и 1010 «в столбик»:

$$\times\begin{array}{r} 1101 \\ \underline{1010} \\ ???? \end{array}$$

Проверьте результат, перейдя в десятичную систему.

Указание. Вот два образца:

$$\times\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{11} \\ 1011 \\ \underline{1011} \\ 100001 \end{array} \qquad\qquad \times\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{101} \\ 1011 \\ \underline{1011} \\ 110111 \end{array}$$

22 Разделите 11011 на 101 (двоичная запись) уголком. Проверьте результат, перейдя в десятичную систему.

Указание. Вот образец:

$$\begin{array}{l|l} 11001 & 100 \\ \cline{2-2} \underline{100} & 110 \leftarrow \text{частное} \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 01 & \\ \underline{0} & \\ 1 \leftarrow \text{остаток} & \end{array}$$

23 В десятичной системе дробь $1/3$ записывается как 0,333… А как эта же дробь запишется в двоичной системе?

24 Придумайте, как записать числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 в троичной системе счисления.

8. Коммутативность

Вернёмся теперь к правилу «от перемены мест слагаемых сумма не меняется». Его можно записать так:

$$\begin{aligned} &\text{первое слагаемое} + \text{второе слагаемое} = \\ &\qquad\qquad = \text{второе слагаемое} + \text{первое слагаемое} \end{aligned}$$

или, сокращённо,

$$\text{перв.сл.} + \text{втор.сл.} = \text{втор.сл.} + \text{перв.сл.}$$

Но и эта запись кажется математикам слишком длинной, и они вместо «перв.сл.» и «втор.сл.» пишут просто буквы — например, буквы a и b. Получается:

$$\boxed{a+b=b+a}$$

Правило «от перемены мест сомножителей произведение не меняется» запишется тогда так:

$$\boxed{a\cdot b=b\cdot a}$$

Напомним, что точка — знак умножения. Иногда её опускают и пишут просто

$$\boxed{ab=ba}$$

Свойство $a+b=b+a$ математики называют «коммутативностью сложения», а свойство $ab=ba$ — «коммутативностью умножения».

Замечание. Знак умножения можно опускать не всегда: $3\cdot 7$ равно 21, а вовсе не 37. Отметим, что помимо трёх уже известных нам обозначений $a\times b$, $a\cdot b$ и ab для произведения a на b широко распространено четвёртое: `a*b` (в компьютерных программах).

9. Ассоциативность

Сложим теперь не два числа, а три:

$$3+5+11=8+11=19.$$

Но можно сделать и иначе:

$$3+5+11=3+16=19.$$

Порядок действий обозначают скобками:

$$(3+5)+11$$

означает, что сначала надо сложить 3 и 5, а

$$3+(5+11)$$

требует сложить сначала 5 и 11.

Результат не зависит от порядка действий. Математики называют это свойство «ассоциативность сложения» и записывают его так:

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c)}$$

Если вы захотите объяснить наглядно кому-нибудь, что такое ассоциативность, можно сказать так: сладкий кофе с молоком можно получить, добавив молоко в кофе с предварительно размешанным сахаром — а можно добавить сахар в кофе с молоком. В обоих случаях получится одно и то же — это и есть ассоциативность:

$$(\text{сахар} + \text{кофе}) + \text{молоко} = \text{сахар} + (\text{кофе} + \text{молоко}).$$

25 Проделайте описанный только что эксперимент с кофе.

26 Вычислите в уме $357 + 17\,999 + 1$.

Решение. Сложить 357 и 17 999 в уме не так легко. Зато если сложить сначала $17\,999 + 1$, получится 18 000 и прибавить 357 ничего не стоит:

$$357 + (17\,999 + 1) = 357 + 18\,000 = 18357.$$

27 Сложите в уме $357 + 17\,999$.

Решение. $357 + 17\,999 = (356 + 1) + 17\,999 = 356 + (1 + 17\,999) = 356 + 18\,000 = 18\,356$.

28 Сложите $899 + 1\,343 + 101$.

Указание. Воспользуйтесь коммутативностью сложения.

Свойством ассоциативности обладает и умножение:

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

или, сокращённо:

$$\boxed{(ab)c = a(bc)}$$

29 Перемножьте $37 \cdot 25 \cdot 4$.

30 Перемножьте $125 \cdot 37 \cdot 8$.

10. Расстановки скобок

Педант сказал бы — с полным правом — что запись вроде

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

не имеет смысла, пока не сказано, в каком порядке выполнять умножение. Даже если не переставлять сомножители, возможностей много:

$$((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5 = (6 \cdot 4) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120,$$
$$(2 \cdot (3 \cdot 4)) \cdot 5 = (2 \cdot 12) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120,$$
$$(2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) = 6 \cdot 20 = 120,$$
$$2 \cdot ((3 \cdot 4) \cdot 5) = 2 \cdot (12 \cdot 5) = 2 \cdot 60 = 120,$$
$$2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 5)) = 2 \cdot (3 \cdot 20) = 2 \cdot 60 = 120.$$

31 Равенства

$$(2\cdot 3)\cdot(4\cdot 5) = ((2\cdot 3)\cdot 4)\cdot 5 = (2\cdot(3\cdot 4))\cdot 5 = 2\cdot((3\cdot 4)\cdot 5) = 2\cdot(3\cdot(4\cdot 5))$$

можно объяснить с помощью закона ассоциативности $a(bc) = (ab)c$. Например, первое из четырёх равенств получается при $a = 2\cdot 3$, $b = 4$, $c = 5$. Какие надо взять a, b, c, чтобы объяснить остальные равенства?

32 Расставьте всеми способами скобки в произведении

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6,$$

не меняя порядок сомножителей (аналогично только что приведённому примеру). Постарайтесь перебирать все варианты систематически, чтобы что-нибудь не пропустить. (*Указание.* Должно получиться 14 способов.)

33 Сколько нужно использовать левых и правых скобок, чтобы полностью указать порядок действий в произведении

$$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 99\cdot 100\ ?$$

Поскольку результат умножения не зависит от порядка действий, скобки часто опускают, предполагая, что читатель домыслит их сам — всё равно как.

Следующая задача показывает возможности, даваемые умелой перестановкой и группировкой слагаемых.

34 Найдите сумму $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100$.

Решение. Сгруппируем 100 слагаемых в 50 пар: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (49 + 52) + (50 + 51)$. В каждой паре сумма 101, всего пар 50, так что получается $50\cdot 101 = 5050$.

По преданию, школьник Карл Гаусс (впоследствии великий немецкий математик) шокировал своего учителя, решив эту задачу в уме — в то время как тот надеялся часок отдохнуть, пока ученики заняты сложением ста чисел!

11. Дистрибутивность

Есть ещё одно свойство сложения и умножения, называемое «дистрибутивность». Если 2 мальчикам и 3 девочкам дать по 7 яблок, то мальчики получат $2\cdot 7 = 14$ яблок, девочки получат $3\cdot 7 = 21$ яблоко, а всего яблок будет

$$2\cdot 7 + 3\cdot 7 = 14 + 21 = 35.$$

Тот же ответ можно получить иначе: каждый из $2 + 3 = 5$ ребят получил 7 яблок, поэтому всего яблок будет

$$(2 + 3)\cdot 7 = 5\cdot 7 = 35.$$

Таким образом,

$$(2+3)\cdot 7 = 2\cdot 7 + 3\cdot 7$$

или, в общем виде,

$$\boxed{(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c}$$

Это свойство называется «дистрибутивностью». Переставив сомножители, можно записать его и так:

$$\boxed{c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b}$$

35 Вычислите в уме $1001\cdot 20$.

Решение. $1001\cdot 20 = (1000+1)\cdot 20 = 1000\cdot 20 + 1\cdot 20 = 20\,000 + 20 = 20\,020$.

36 Вычислите в уме $1001\cdot 102$.

Решение. $1001\cdot 102 = (1000+1)\cdot 102 = 1000\cdot 102 + 1\cdot 102 = 102\,000 + 102 = 102\,102$.

Свойство дистрибутивности — это правило раскрытия скобок. Раскроем с его помощью скобки в произведении двух сумм

$$(a+b)(m+n).$$

Забудем на минуту, что запись $(m+n)$ — это сумма m и n, и будем считать её «иероглифом», обозначающим некое — неважно какое — число. По правилу дистрибутивности

$$(a+b)\cdot\boxed{m+n} = a\cdot\boxed{m+n} + b\cdot\boxed{m+n}$$

Теперь вспомним, что $\boxed{m+n}$ — это сумма m и n. Снова воспользуемся дистрибутивностью и продолжим равенство:

$$\ldots = a\cdot(m+n) + b\cdot(m+n) = am + an + bn + bm.$$

Общее правило: чтобы перемножить две суммы, надо умножить каждый член первой суммы на каждый член второй суммы и потом всё это сложить.

37 Сколько слагаемых будет в произведении

$$(a+b+c+d+e)(x+y+z)$$

после того, как мы раскроем скобки?

38 Сколько слагаемых будет в произведении

$$(a+b+c)(d+e)(x+y+z)$$

после того, как мы раскроем скобки?

12. Буквы в алгебре

Постепенно мы всё больше и больше используем буквенные обозначения (a, b, c, ..., x, y, z). По традиции использование буквенных обозначений («иксов») считается одной из наиболее трудных тем школьного курса математики. Раньше в начальной школе изучалась «арифметика», где никаких иксов не было, а в средней школе (с 5-го класса) переходили к «алгебре» — где уже были иксы. Потом «арифметику» переименовали в «математику» и ввели иксы в начальных классах — чем окончательно запутали бедных школьников (как утверждают скептики).

Мы надеемся, что у вас, дорогой читатель, не было трудностей с пониманием смысла буквенных обозначений. Тем не менее мы хотим дать вам совет — на случай, если придётся объяснять это своим одноклассникам, брату или сестре, родителям или — в будущем — детям. Смысл букв проще всего объяснить, сказав, что буквы — это *сокращения для слов.*

Поясним это. В равенстве

$$a + b = b + a$$

буквы a и b были сокращениями для слов «первое слагаемое» и «второе слагаемое». Записывая $a + b = b + a$, мы имеем в виду, что вместо a и b можно подставить любые числа и получить верное равенство. Таким образом, $a + b = b + a$ можно считать единой сокращённой записью равенств $1 + 7 = 7 + 1$, $1028 + 17 = 17 + 1028$ — так же как и бесчисленного множества других равенств того же вида.

Другой пример использования букв:

$\boxed{39}$ Малый бидон и большой бидон вместе вмещают 5 литров; в двух малых бидонах и трёх больших помещается всего 13 литров. Какова ёмкость бидонов?

Решение. («Арифметическое».) Ёмкость малого бидона и ёмкость большого бидона в сумме равны 5 литрам. Поэтому 2 малых бидона и 2 больших вмещают 10 литров ($10 = 2 \cdot 5$). Кроме того, мы знаем, что 2 малых и 3 больших бидона вмещают 13 литров. Таким образом, добавление одного лишнего большого бидона увеличивает суммарную ёмкость с 10 до 13 литров. Следовательно, ёмкость большого бидона равна $13 - 10 = 3$ литра. Зная ёмкость большого бидона, легко найти ёмкость малого, так как в сумме они дают 5 литров: $5 - 3 = 2$.

Ответ. Ёмкость малого бидона — 2 литра, ёмкость большого — 3 литра.

Это же решение можно записать короче, сократив слова «ёмкость малого бидона» до «М.Б.», а «ёмкость большого бидона» до «Б.Б.». Вот что получится: по условию,

$$\text{М.Б.} + \text{Б.Б.} = 5,$$

поэтому

$$2 \cdot \text{М.Б.} + 2 \cdot \text{Б.Б.} = 10.$$

По условию,

$$2 \cdot \text{М.Б.} + 3 \cdot \text{Б.Б.} = 13.$$

Вычтя из этого равенства предыдущее, находим, что Б.Б. $= 3$, теперь из первого равенства находим, что М.Б. $= 2$.

Осталось заменить русские обозначения «М.Б.» и «Б.Б.» на традиционные x и y, чтобы получить стандартное «алгебраическое» решение задачи. Вот оно.

Обозначим ёмкость малого бидона через x, а ёмкость большого — через y. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 3y = 13. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2, получаем, что

$$2x + 2y = 10.$$

Вычитая это равенство из второго уравнения системы, находим, что

$$y = 13 - 10 = 3.$$

Теперь из первого уравнения

$$x = 5 - y = 5 - 3 = 2.$$

Ответ. $x = 2$, $y = 3$.

Ещё один пример, иллюстрирующий использование буквенных обозначений.

Фокус. Задумайте число. Прибавьте к нему 3. Умножьте результат на 2. Отнимите задуманное число. Отнимите 4. Отнимите ещё раз задуманное число. У вас получилось 2, не так ли?

$\boxed{\textbf{40}}$ Объясните, почему этот фокус всегда удаётся.

Решение. Давайте проследим по таблице, что происходит с задуманным числом (мы обозначаем его через x).

Задумайте число	x
Прибавьте к нему 3	$x + 3$
Умножьте результат на 2	$2 \cdot (x + 3) = 2x + 6$
Отнимите задуманное число	$(2x + 6) - x = x + 6$
Отнимите 4	$(x + 6) - 4 = x + 2$
Отнимите задуманное число ещё раз. Получилось 2	$(x + 2) - x = 2$

13. Сложение отрицательных чисел

В том, что $3+5=8$, можно убедиться, взяв три яблока, добавив к ним пять яблок и сосчитав получившуюся кучу яблок: «раз, два, три, четыре, ..., семь, восемь». Но как проверить, что $(-3)+(-5)=(-8)$ или что $3+(-5)=$ $=(-2)$? Обычно это объясняют на примерах:

$3+5=8$	Вчера было 3 градуса тепла, сегодня температура повысилась на 5 градусов и стала 8 градусов.
$(-3)+5=2$	Вчера было -3 градуса, сегодня на 5 градусов теплее, т. е. $+2$ градуса.
$3+(-5)=(-2)$	Вчера было $+3$ градуса, сегодня на 5 градусов холоднее, т. е. -2 градуса.
$(-3)+(-5)=(-8)$	Вчера было -3 градуса, сегодня на 5 градусов холоднее, т. е. -8 градусов.

Вот ещё один пример:

$3+5=8$	три протона + пять протонов = восемь протонов
$(-3)+5=2$	три антипротона + пять протонов = два протона (не считая γ-излучения[1])
$3+(-5)=(-2)$	три протона + пять антипротонов = два антипротона (не считая γ-излучения)
$(-3)+(-5)=(-8)$	три антипротона + пять антипротонов = восемь антипротонов

14. Умножение отрицательных чисел

Чтобы подсчитать, чему равно трижды пять, надо сложить три слагаемых, каждое из которых равно пяти:

$$5+5+5=15.$$

С некоторой натяжкой то же объяснение годится и для произведения $1\cdot 5$, если считать, что «сумма» из одного-единственного слагаемого равна этому слагаемому. Но произведение $0\cdot 5$ или $(-3)\cdot 5$ так не объяснишь: что означает сумма из нуля или из минус трёх слагаемых?

[1] Протон и антипротон — элементарные частицы; при встрече протона с антипротоном они аннигилируют, т. е. исчезают, превращаясь в γ-излучение.

Можно, однако, переставить сомножители:

$$5 \cdot 0 \;=\; 0+0+0+0+0 \;=\; 0,$$
$$5 \cdot (-3) \;=\; (-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3) \;=\; -15.$$

Если мы хотим, чтобы произведение не изменялось при перестановке сомножителей — как это было для положительных чисел — то тем самым должны считать, что

$$0 \cdot 5 = 0, \qquad (-3) \cdot 5 = -15.$$

Теперь перейдём к произведению $(-3) \cdot (-5)$. Чему оно равно: -15 или $+15$? Оба варианта имеют резон. С одной стороны, минус в одном сомножителе уже делает произведение отрицательным — тем более оно должно быть отрицательным, если отрицательны оба сомножителя. С другой стороны, в таблице

$3 \cdot 5 = +15$	$3 \cdot (-5) = -15$
$(-3) \cdot 5 = -15$	$(-3) \cdot (-5) = ?$

уже есть два минуса, но только один плюс, и «по справедливости» $(-3) \cdot (-5)$ должно быть равно $+15$. Так что же предпочесть?

Вас, конечно, такими разговорами не запутаешь: из школьного курса математики вы твёрдо усвоили, что минус на минус даёт плюс. Но представьте себе, что ваш младший брат или сестра спрашивает вас: а почему? Что это — каприз учительницы, указание высшего начальства или теорема, которую можно доказать?

Обычно правило умножения отрицательных чисел поясняют на примерах:

$3 \cdot 5 = 15$	три раза получить по пять рублей — это пятнадцать рублей дохода
$3 \cdot (-5) = -15$	три раза заплатить штраф в пять рублей — пятнадцать рублей убытка
$(-3) \cdot 5 = -15$	три раза недополучить по пять рублей — пятнадцать рублей убытка
$(-3) \cdot (-5) = 15$	три раза не заплатить штраф по пять рублей — пятнадцать рублей дохода

Можно объяснять и иначе. Напишем подряд числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Теперь напишем те же числа, умноженные на 3:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots$$

Легко заметить, что каждое число больше предыдущего на 3. Теперь напишем те же числа в обратном порядке (начав, например, с 5 и 15):

$$\begin{array}{cccccc} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & \ldots \\ 15, & 12, & 9, & 6, & 3, & \ldots \end{array}$$

Продолжим дальше:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & \ldots \\ 15, & 12, & 9, & 6, & 3, & 0, & -3, & -6, & -9, & -12, & -15, & \ldots \end{array}$$

При этом под числом -5 оказалось число -15, так что $3\cdot(-5)=-15$: плюс на минус даёт минус. Теперь повторим ту же процедуру, умножая числа 1, 2, 3, 4, 5, ... на -3 (мы уже знаем, что плюс на минус даёт минус):

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ -3, & -6, & -9, & -12, & -15, & \ldots \end{array}$$

Каждое следующее число нижнего ряда меньше предыдущего на 3. Запишем числа в обратном порядке

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \\ -15, & -12, & -9, & -6, & -3 \end{array}$$

и продолжим:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & \ldots \\ -15, & -12, & -9, & -6, & -3, & 0, & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & \ldots \end{array}$$

Под числом -5 оказалось 15, так что $(-3)\cdot(-5)=15$.

Возможно, эти объяснения и удовлетворили бы вашего младшего брата или сестру. Но вы вправе спросить, как же обстоят дела на самом деле и можно ли доказать, что $(-3)\cdot(-5)=15$?

Ответ здесь таков: можно доказать, что $(-3)\cdot(-5)$ *должно равняться* 15*, если только мы хотим, чтобы обычные свойства сложения, вычитания и умножения оставались верными для всех чисел, включая отрицательные.* Схема этого доказательства такова.

Докажем сначала, что $3\cdot(-5)=-15$. Что такое -15? Это число, противоположное 15, т. е. число, которое в сумме с 15 даёт 0. Так что нам надо доказать, что

$$3\cdot(-5)+15=0.$$

В самом деле,

$$3\cdot(-5)+15=3\cdot(-5)+3\cdot 5=3\cdot(-5+5)=3\cdot 0=0.$$

(Вынося число 3 за скобку, мы воспользовались законом дистрибутивности $ab+ac=a(b+c)$ при $a=3$, $b=-5$, $c=5$ — ведь мы предполагаем, что он остаётся верным для всех чисел, включая отрицательные.) Итак, $3\cdot(-5) = -15$. (Дотошный читатель спросит нас, почему $3\cdot 0 = 0$. Честно признаемся: доказательство этого факта — как и вообще обсуждение того, что такое ноль — мы пропускаем.)

Докажем теперь, что $(-3)\cdot(-5) = 15$. Для этого запишем

$$(-3) + 3 = 0$$

и умножим обе части равенства на -5:

$$((-3) + 3)\cdot(-5) = 0\cdot(-5) = 0.$$

Раскроем скобки в левой части:

$$(-3)\cdot(-5) + 3\cdot(-5) = 0,$$

т. е. $(-3)\cdot(-5) + (-15) = 0$. Таким образом, число $(-3)\cdot(-5)$ противоположно числу -15, т. е. равно 15. (В таком рассуждении также есть пробелы: следовало бы доказать, что $0\cdot(-5) = 0$ и что существует только одно число, противоположное числу -15.)

15. Действия с дробями

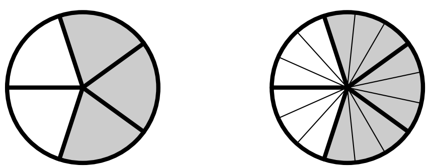
Если вас попросят сравнить дроби

$$\frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \frac{9}{15},$$

то, конечно, вы сразу скажете, что они равны:

$$\frac{9}{15} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{3}{5}.$$

На рисунке это можно показать так:



А что вы скажете о дробях $\frac{221}{391}$ и $\frac{403}{713}$?

Если бы вы помнили наизусть таблицу умножения двузначных чисел, то сразу бы сказали, что они равны:

$$\frac{221}{391} = \frac{17\cdot 13}{17\cdot 23} = \frac{13}{23} = \frac{31\cdot 13}{31\cdot 23} = \frac{403}{713}.$$

Но как быть, если мы не помним этой таблицы? Тогда надо привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{221}{391}=\frac{221\cdot 713}{391\cdot 713}\quad \text{и}\quad \frac{403}{713}=\frac{403\cdot 391}{713\cdot 391}$$

и сравнить числители:

$$\begin{array}{r} 713\\ \underline{221}\\ 713\\ 1426\\ \underline{1426}\\ 157573 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 391\\ \underline{403}\\ 1173\\ \underline{1564}\\ 157573 \end{array}$$

Так мы убедимся, что дроби равны — но так и не узнаем, что на самом деле обе они равны $13/23$!

41 Что больше: $1/3$ или $2/7$?
Решение. $1/3=7/21$, $2/7=6/21$, т. е. $1/3>2/7$.

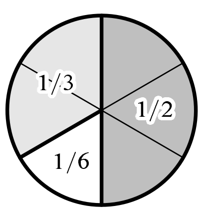
Бытовая формулировка этой задачи («Что больше: бутылка на троих или две на семерых?») подсказывает другое решение: бутылка на троих — это две бутылки на шестерых, а не на семерых, т. е. $1/3$ больше $2/7$. Говоря научно, мы «привели дроби к одинаковому числителю»:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}<\frac{2}{7}.$$

42 Что больше: $\dfrac{10001}{10002}$ или $\dfrac{100001}{100002}$? (*Указание.* Обе дроби меньше 1. На сколько?)

43 Что больше: $\dfrac{12345}{54321}$ или $\dfrac{12346}{54322}$?

Приведение к общему знаменателю — традиционная проблема при изучении арифметики. Классический вопрос: «Сколько торта останется мне, если брат съест половину торта, а сестра — треть торта?» Ответ (одна шестая) виден на рисунке.



Мы уверены, что никто из наших читателей не складывает дроби, складывая отдельно числители и знаменатели:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} \to \frac{2+5}{3+7} = \frac{7}{10}.$$

Вместо суммы эта операция даёт нечто среднее: $7/10 = 0{,}7$ находится между $2/3 = 0{,}666\ldots$ и $5/7 = 0{,}714285\ldots$ Это легко понять: если в одной компании было две бутылки на троих (по $2/3$ на человека), а в другой компании было пять бутылок на семерых (по $5/7$ на человека), то после встречи всё выровняется, и будет семь бутылок на десятерых $7/10$ на человека).

44 Назовём дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d — целые положительные числа) «соседними», если их разность $\frac{ad-bc}{bd}$ имеет числитель ± 1, то есть если $ad - bc = \pm 1$.

1. Докажите, что в этом случае обе дроби несократимы.

2. Докажите, что если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ соседние, то дробь $\frac{a+c}{b+d}$ находится между ними и является соседней с обеими дробями $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

3. Докажите, что в этом случае никакая дробь $\frac{e}{f}$ с натуральными e и f, у которой $f < b + d$, не находится между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

45 Метровый стержень разделили на 7 равных частей красными пометками и на 13 равных частей синими пометками. Затем его распилили на 20 равных частей. Докажите, что на всех этих частях (кроме крайних) будет ровно одна пометка — синяя или красная).

Решение. На крайних частях пометок не будет, так как $\frac{1}{20}$ меньше, чем $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{13}$. Остаётся 18 частей. Достаточно доказать, что на каждой из них будет не более одной пометки. (Всего пометок также 18, поэтому ни одна часть не останется без пометки.) Красная пометка соответствует числу $\frac{k}{7}$, синяя — числу $\frac{l}{13}$; дробь

$$\frac{k+l}{7+13} = \frac{k+l}{20}$$

находится между ними. Следовательно, в ней будет проведён разрез, разделяющий $\frac{k}{7}$ и $\frac{l}{13}$ по разным частям.

46 Что больше: пять процентов от семи миллионов или семь процентов от пяти миллионов[2]?

[2] — Вопрос мой прост и краток, — / Промолвил Носорог,/ — Что лучше: со́рок пя́ток/ Или пято́к соро́к?» (А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все. Пересказ Б. Заходера.)

47 Как отрезать от шнура в $2/3$ м кусок в $1/2$ м, не имея метра?
Решение. Кусок в $1/2$ м составляет три четверти от всего шнура:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

так что от шнура надо отрезать четверть (два раза сложив его пополам).

16. Степени

В последовательности чисел

$$2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$$

каждое следующее число вдвое больше предыдущего:

$$\begin{aligned} 4 &= 2\cdot 2 \\ 8 &= 4\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 2 \quad \text{(3 раза)} \\ 16 &= 8\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \quad \text{(4 раза)} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Математики применяют такие полезные обозначения:

$$\begin{aligned} 2\cdot 2 &= 2^2 \\ 2\cdot 2\cdot 2 &= 2^3 \\ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 &= 2^4 \\ &\ldots \end{aligned}$$

так что, например, $2^6 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 64$.

Последовательность 2, 4, 8, 16, … можно теперь записать так: 2, 2^2, 2^3, 2^4, … Запись a^n читают «a в степени n» («а в степени эн») или «n-ая степень числа a» («энная степень числа а»). При этом a называют *основанием* степени, n — *показателем* степени.

Для a^2 и a^3 есть специальные названия: квадрат числа a, куб числа a. Они объясняются тем, что площадь квадрата со стороной a равна a^2, а объём куба со стороной a равен a^3.

48 Чему равны: (а) 2^{10}; (б) 10^3; (в) 10^7?

49 Сколько цифр в десятичной записи числа 10^{1000}?

Астрономы используют степени 10 для записи больших чисел. Например, скорость света примерно равна

$$300000 \text{ км/с} = 3\cdot 10^5 \text{ км/с} = 3\cdot 10^8 \text{ м/с} = 3\cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

50 В астрономии *световым годом* называют расстояние, которое свет проходит за год. Чему примерно равно расстояние до ближайшей к Солнцу звезды в метрах, если оно составляет около 4 световых лет?

В следующей таблице приведено несколько «больших» чисел (знак $\simeq$ в ней означает «примерно равно»).

Число молекул в грамме воды	$\simeq 3 \cdot 10^{22}$
Радиус Земли	$\simeq 6 \cdot 10^{6}$ м
Расстояние до Луны	$\simeq 4 \cdot 10^{8}$ м
Расстояние до Солнца («астрономическая единица длины»)	$\simeq 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м
Размер доступной современным наблюдателям части Вселенной	$\simeq 10^{26}$ м
Масса Земли	$\simeq 6 \cdot 10^{24}$ кг
Возраст Земли	$\simeq 5 \cdot 10^{9}$ лет
Возраст Вселенной	$\simeq 1{,}5 \cdot 10^{10}$ лет
Число людей на Земле	$\simeq 6 \cdot 10^{9}$
Средняя продолжительность жизни человека	$\simeq 2 \cdot 10^{9}$ сек

Замечание. Граница между «большим» и «малым» условна и зависит от единиц измерения: например, расстояние до Солнца, измеренное в световых годах, примерно равно 0,000015.

В дальнейшем мы увидим, что не только очень большие, но и очень малые числа удобно записывать с помощью степеней.

Программисты предпочитают иметь дело со степенями двойки, а не десятки. Оказалось, что $2^{10} = 1024$ примерно равно $1000 = 10^3$ и приставка «кило», обычно обозначающая 1000 (килограмм равен 1000 граммов, километр равен 1000 метров), в программировании означает 1024: 1 килобит $=$ $= 1024$ бита. (Бит — единица измерения «количества информации».)

51 Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{20}?

52 Тот же вопрос для числа 2^{100}.

53 Нарисуйте график зависимости числа цифр в десятичной записи 2^n от величины n.

При пересчёте степеней двойки в степени десятки нужно умножать показатель степени примерно на 0,3:

$$2^{10} \simeq 10^{0,3\cdot 10}, \qquad 2^n \simeq 10^{0,3\cdot n}.$$

(Более точно было бы умножать не на 0,3, а на число 0,30102…, которое называется логарифмом двух по основанию 10.)

Многие микрокалькуляторы, умножая большие числа, выдают ответ, содержащий степени:

$$370\,000 \cdot 2\,100\,000 = 7{,}77 \cdot 10^{11}.$$

На экране при этом не пишется знак умножения и число 10 (а вместо запятой ставится точка, как принято за границей):

$$7.77 \qquad 11$$

Заметим, что в обычной записи

$$777\,000\,000\,000$$

ответ мог бы не поместиться на экране калькулятора.

17. Отрицательные степени

Мы выписывали степени числа 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \ldots$$

Попробуем, начиная с какого-либо числа (скажем, 128), записать эту последовательность в обратном порядке:

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2.$$

Раньше каждое число было вдвое больше предыдущего, теперь — вдвое меньше. Продолжим эту последовательность:

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

У последовательности

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128, \ldots$$

было удобное краткое обозначение:

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ \ldots$$

В обратном порядке:

$$\begin{array}{ccccccc} 128, & 64, & 32, & 16, & 8, & 4, & 2 \\ 2^7, & 2^6, & 2^5, & 2^4, & 2^3, & 2^2, & 2 \end{array}$$

Продолжая по аналогии, можно написать:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 128, & 64, & 32, & 16, & 8, & 4, & 2, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{16}, & \ldots \\ 2^7, & 2^6, & 2^5, & 2^4, & 2^3, & 2^2, & 2^1, & 2^0, & 2^{-1}, & 2^{-2}, & 2^{-3}, & 2^{-4}, & \ldots \end{array}$$

Эти обозначения широко используются. Таким образом,

$$2^3=8,\ \ 2^1=2,\ \ 2^0=1,\ \ 2^{-1}=\frac{1}{2},\ \ 2^{-2}=\frac{1}{4},\ \ 2^{-3}=\frac{1}{8},\quad \text{и т. д.}$$

Раньше, говоря о степенях, мы понимали 2^3 как «2, повторённое сомножителем 3 раза», а 2^5 — как «2, повторённое сомножителем 5 раз». Если ещё можно, с некоторой натяжкой, сказать, что 2^1 есть двойка, повторённая сомножителем один раз, то про $2^0=1$ или $2^{-3}=\frac{1}{8}$ такое объяснение было бы смешным. Просто математики договорились считать, что (при положительных целых n) 2^{-n} понимается как $\frac{1}{2^n}$.

Мы надеемся, что это соглашение не показалось вам искусственным. Впоследствии мы увидим, насколько оно удобно и даже — в определённом смысле — неизбежно.

54 Запишите в виде десятичных дробей (а) 10^{-1}; (б) 10^{-2}; (в) 10^{-3}.

Вот несколько «малых» чисел вокруг нас:

1 см	$=10^{-2}$ м
1 мм	$=10^{-3}$ м
1 микрон	$=10^{-6}$ м
1 нанометр	$=10^{-9}$ м
1 ангстрем	$=10^{-10}$ м
Масса молекулы воды	$\simeq 3\cdot 10^{-23}$ г
Размер живой клетки	$\simeq 15\text{–}350\cdot 10^{-9}$ м
Граница применимости известных законов физики («элементарная длина», как говорят физики)	$\simeq 10^{-31}$ см
Длина световой волны (красный свет)	$\simeq 7\cdot 10^{-7}$ м

Деление чисел на большие и малые, как мы уже говорили, условно. При желании можно было бы включить в эту таблицу величины из предыдущей: например, радиус Земли $\simeq 6\cdot 10^3$ км $\simeq 4\cdot 10^{-5}$ астрономических единиц.

55 За какое время красный свет проходит расстояние, равное длине волны? (Это время называют *периодом колебаний* для красного света.)

Итак, запомните:

Определение. Для целых положительных n

$$a^n = a \cdot a \times \ldots \times a \quad (n \text{ раз}),$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$
$$a^0 = 1.$$

$\boxed{56}$ Верно ли равенство $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ для отрицательных n и для $n = 0$?

Можно ли *доказать*, что $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$? Нельзя, поскольку запись a^{-n} сама по себе, до принятия нашего соглашения (или, как говорят математики, определения) смысла не имеет. Если вдруг все математики мира почему-либо договорятся понимать a^n как-то иначе, то с этого момента равенство $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ перестанет быть верным. Однако этого не произойдёт — зачем менять привычное и удобное соглашение?! Нарушив его, мы чрезвычайно всё усложним (см. следующий раздел).

С помощью обозначений для степеней длинное выражение

$$2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot d$$

можно записать короче — как $2a^4b^3c^2d$, а

$$\frac{2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot c \cdot c}{b \cdot b \cdot b \cdot d} \quad —$$

как $2a^4b^{-3}c^2d^{-1}$.

$\boxed{57}$ Запишите с использованием показателей степени:
(а) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$; (б) $\dfrac{2 \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b}$.
Ответ. (а) $a^{10}b^4$; (б) $2a^3b^{-2}$.

$\boxed{58}$ Перепишите, используя лишь положительные показатели степеней: (а) a^3b^{-5}; (б) $a^{-2}b^{-7}$.
Ответ. (а) $\dfrac{a^3}{b^5}$; (б) $\dfrac{1}{a^2b^7}$.

18. Как умножить a^m на a^n, или почему наше определение удобно

Умножить a^m на a^n совсем просто, если m и n положительны. Например,

$$a^5 \cdot a^3 = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ раза}}) = a^{5+3} = a^8.$$

Вообще, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Действительно, a^m — это a, повторённое множителем m раз, а a^n — это a, повторённое n раз. Аналогичным образом, для $n=1$ имеем:

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Показатели степеней могут быть и отрицательными. Наше правило годится и в этом случае! Например, при $m=5$, $n=-3$ оно гласит:

$$a^5 \cdot a^{-3} = a^{5+(-3)} = a^2.$$

Проверим: $a^5 \cdot a^{-3}$ по определению есть

$$a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a^2.$$

Более дотошный читатель попросит проверить ещё и такое равенство:

$$a^{-5} \cdot a^3 = a^{-5+3} = a^{-2}.$$

Пожалуйста. По определению,

$$a^{-5} \cdot a^3 = \frac{1}{a^5} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}.$$

Ещё более дотошные вспомнят, что оба числа m и n могут быть отрицательными и попросят проверить, что

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = a^{(-5)+(-3)} = a^{-8}.$$

Действительно,

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}.$$

Не думайте, что мы уже разобрали все случаи. Мы забыли, что один из показателей (или даже оба) может быть равен 0, а a^0 мы определяли отдельным соглашением. Разберём и этот случай: проверим, что

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m.$$

Действительно, по определению $a^0 = 1$, так что

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m.$$

59 Надо ли при этом отдельно разбирать случаи $m<0$, $m=0$ и $m>0$?

60 Чему равно $\frac{a^m}{a^n}$? При всех ли целых m и n ваш ответ годится?

19. Правило умножения степеней

При умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются:

$$\boxed{a^m \cdot a^m = a^{m+n}}$$

Это правило позволяет удобно работать с большими и малыми числами: например, для умножения $2 \cdot 10^7$ на $3 \cdot 10^{-11}$ достаточно умножить 2 на 3 и сложить 7 и -11:

$$(2 \cdot 10^7) \cdot (3 \cdot 10^{-11}) = (2 \cdot 3) \cdot (10^7 \cdot 10^{-11}) = 6 \cdot 10^{7+(-11)} = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Подобным образом обычно выполняется умножение в компьютерах (только вместо 10 используется 2).

61 $2^{1001} \cdot 2^n = 2^{2000}$. Чему равно n?

62 $2^{1001} \cdot 2^n = \frac{1}{4}$. Чему равно n?

63 Что больше: 10^{-3} или 2^{-10}?

64 $\frac{2^{1000}}{2^n} = 2^{501}$. Чему равно n?

65 $\frac{2^{1000}}{2^n} = \frac{1}{16}$. Чему равно n?

66 $4^{100} = 2^n$. Чему равно n?

67 $2^{100} \cdot 3^{100} = a^{100}$. Чему равно a?

68 $(2^{10})^{15} = 2^n$. Чему равно n?

Мы говорили, что принятое определение отрицательных степеней неизбежно и что отказ от него приведёт к путанице. Сейчас мы поясним, что имелось в виду. Предположим, что мы хотим определить отрицательные степени как-то иначе, но так, чтобы по-прежнему выполнялось равенство $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ при всех m и n. Оказывается, что это невозможно. В самом деле, при $n = 0$ должно быть $a^m \cdot a^0 = a^{m+0}$, т. е. $a^m \cdot a^0 = a^m$. Следовательно, $a^0 = 1$. Но тогда из $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ с неизбежностью вытекает, что $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Что получится, если степень вновь возвести в степень? Например,

$$(a^2)^3 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{\text{3 раза}} = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6.$$

Аналогично,

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

для любых положительных целых m, n. И вновь наши соглашения об отрицательных степенях «думают за нас»: оказывается, что эта же формула верна и для отрицательных m и n. Например,

$$(a^{-2})^3 = \left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{(-2)\cdot 3}.$$

69 Проверьте эту формулу для других комбинаций знаков (если $m > 0$, $n < 0$; если оба числа m и n отрицательны; если одно из них равно нулю).

Ещё одна, последняя, формула такова:

$$\boxed{(ab)^n = a^n \cdot b^n}$$

70 Проверьте эту формулу для положительных и отрицательных целых чисел n.

71 Чему равно $(-a)^{775}$: будет ли это a^{775} или $-a^{775}$?

72 Чему равно $\left(\frac{a}{b}\right)^n$? Верна ли ваша формула для отрицательных n?

Мы определили степени с положительным и отрицательным целым показателем. Однако на этом наши приключения с определением степени не кончатся: вспомните, что помимо целых чисел бывают и дробные.

73 Как вы думаете, чему равно $4^{1/2}$? А $27^{1/3}$? Можете ли вы как-то обосновать своё предположение?

Впоследствии мы узнаем, как возвести число в дробную степень.

20. Формулы сокращённого умножения. Квадрат суммы

Мы уже сталкивались с формулой

$$(a+b)(m+n) = am + an + bm + bn$$

(чтобы перемножить две суммы, нужно каждое слагаемое первой умножить на каждое слагаемое второй, а потом всё сложить). Перемножим теперь две одинаковые скобки:

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb.$$

Вспоминая, что $ab = ba$ и что для aa и bb у нас есть удобные обозначения a^2 и b^2, получаем

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

или

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

74 Вычислите в уме: (а) 101^2; (б) 1002^2.

75 Каждый из двух сомножителей увеличили на 10 процентов. На сколько процентов увеличится их произведение?

Словесная формулировка: *квадрат суммы равен сумме квадратов плюс удвоенное произведение слагаемых.*

Обратите внимание на то, что похожие выражения «квадрат суммы» и «сумма квадратов» обозначают разное: квадрат суммы — это $(a+b)^2$, а сумма квадратов — это a^2+b^2.

76 «Сын отца» и «отец сына» — это одно и то же или нет?

21. Как объяснить формулу $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ младшему брату или сестре

Добрый волшебник дарил приходившим к нему детям конфеты. Он любил дружных детей и давал каждому столько конфет, сколько детей приходило. (Придя в одиночку, можно было получить одну конфету, а придя вдвоём — по две каждому.)

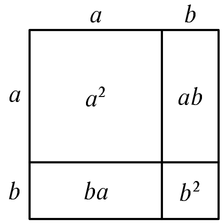
Как-то раз к нему пришло a мальчиков. Каждый из них получил a конфет — всего a^2 конфет. Только они ушли, пришли b девочек. Каждая получила по b конфет — всего b^2. Всего в этот день мальчики и девочки получили a^2+b^2 конфет.

На следующий день a мальчиков и b девочек пришли вместе. Каждый из $a+b$ ребят получил $a+b$ конфет — всего $(a+b)^2$ конфет. В какой день — первый или второй — мальчики и девочки вместе получили больше конфет и на сколько?

Чтобы ответить на этот вопрос, можно рассуждать так. Во второй день каждый из a мальчиков получил b лишних конфет (за пришедших девочек). Всего мальчики получили лишних ab конфет. Каждая девочка получила лишних a конфет за мальчиков — всего лишних ba конфет. В общей сложности мальчики и девочки получили $ab+ba=2ab$ лишних конфет во второй день по сравнению с первым. Значит $(a+b)^2$ больше a^2+b^2 на величину $2ab$. Таким образом, $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

77 Разрежьте квадрат со стороной $a + b$ на квадрат со стороной a, квадрат со стороной b и два прямоугольника со сторонами a и b.

Решение.



22. Квадрат разности

Формула $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ является сокращённой записью бесчисленного множества равенств вроде

$$(5+7)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 + 7^2$$

или

$$\left(13 + \frac{1}{3}\right) = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

которые получаются, если вместо a и b подставить конкретные числа. Эти числа могут быть и отрицательными. Подставим, например, $a = 7$, $b = -5$:

$$(7 + (-5))^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot (-5) + (-5)^2.$$

Вспоминая, что плюс на минус даёт минус, а минус на минус даёт плюс, можно записать

$$(7-5)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 + 5^2$$

Аналогичное равенство верно и для других чисел, так что в общем виде можно записать

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Словами: *квадрат разности равен сумме квадратов минус удвоенное произведение слагаемых.*

78 Вычислите в уме: (а) 99^2; (б) 998^2.

79 Во что превращаются формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ при (а) $a = b$; (б) $a = 2b$?

23. Разность квадратов

80 Перемножьте $a+b$ и $a-b$.

Решение. Раскроем скобки в этом произведении:

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

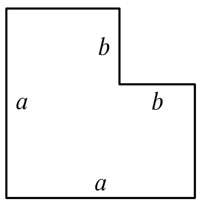
(ab и ba взаимно уничтожаются).

Получаем формулу «разности квадратов»:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

81 Перемножьте в уме 101 и 99.

82 Из квадрата со стороной a вырезан квадрат со стороной b. Разрежьте получившуюся фигуру на части и сложите из них прямоугольник со сторонами $a-b$ и $a+b$.



Приведённые нами формулы (квадрат суммы, квадрат разности и разность квадратов) называют *формулами сокращённого умножения.*

83 Два целых числа, одно из которых на 2 больше другого, перемножили и к произведению прибавили 1. Докажите, что получился точный квадрат (квадрат целого числа). Например,

$$3 \cdot 5 + 1 = 16 = 4^2,$$

$$13 \cdot 15 + 1 = 196 = 142.$$

Первое решение. Обозначим меньшее число через n. Тогда большее равно $n+2$. Их произведение равно $n(n+2) = n^2 + 2n$. Прибавив 1, получим $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (формула квадрата суммы).

Второе решение. Обозначим большее число через n. Тогда меньшее равно $n-2$. Произведение равно $n(n-2) = n^2 - 2n$. Прибавив 1, получим $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ (формула квадрата разности).

Третье решение. Если мы не хотим отдавать предпочтение большему или меньшему из чисел, обозначим через n число между ними. Тогда меньшее число равно $n-1$, большее число равно $n+1$, произведение чисел равно $(n+1)(n-1)=n^2-1$ (формула разности квадратов), т. е. на единицу меньше точного квадрата.

84 Напишем квадраты чисел 1, 2, 3, ...:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots,$$

и под каждыми двумя квадратами напишем их разность:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & 49 & & \ldots \\ & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & \ldots & \end{array}$$

В нижнем ряду каждое число больше предыдущего на 2. Почему?

Решение. Соседние числа n и $n+1$ имеют квадраты n^2 и $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. Разница квадратов равна $2n+1$, и при увеличении n на 1 она увеличивается на 2.

Замечание. Последовательности чисел, в которых каждое следующее число больше предыдущего на одну и ту же величину (как в 3, 5, 7, 9, ...), называют *арифметическими прогрессиями.* С ними мы ещё встретимся.

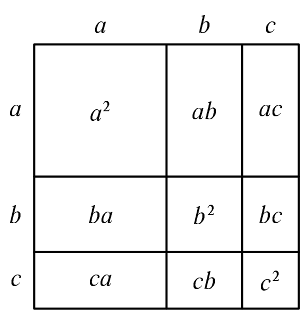
85 Есть правило, позволяющее находить квадрат числа, кончающегося на 5: «отбросьте последнюю цифру 5, останется число n; умножьте n на $n+1$ и к полученному числу допишите справа 25». Например:

$$\begin{array}{rl} 35^2: & \text{отбрасываем 5, остаётся 3;}\quad 3\cdot 4=12, \\ & \text{приписываем 25, получаем } 35^2=1225. \\ 115^2: & 11\cdot 12=132, \text{ так что } 115^2=13225. \end{array}$$

Объясните это правило.

86 Вычислите $(a+b+c)^2$.

Решение. $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ba+ b^2+bc+ca+cb+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$:



87 Вычислите $(a+b-c)^2$.

Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

88 Вычислите $(a+b+c)(a+b-c)$.
Указание. Воспользуйтесь формулой разности квадратов.

89 Вычислите $(a+b+c)(a-b-c)$
Указание. И здесь полезна формула разности квадратов.

90 Вычислите $(a+b-c)(a-b+c)$.
Указание. Даже здесь полезна формула разности квадратов.

91 Вычислите $(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$.
Первое решение. Это равно

$$(a-b)^2(a+b)^2=((a-b)(a+b))^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)&=((a^2+b^2)-2ab)((a^2+b^2)+2ab)=\\&=(a^2+b^2)^2-4a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2a^2=a^4+b^4-2a^2b^2.\end{aligned}$$

24. Куб суммы

Найдём формулу для $(a+b)^3$. По определению

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b),$$

и можно было бы раскрыть скобки прямо так. Но мы пойдём другим путём, заметив, что

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b).$$

Раскрывая скобки, мы должны каждое слагаемое первой скобки умножить на a, а затем на b и потом всё сложить:

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^2\cdot a+2ab\cdot a+b^2\cdot a+a^2\cdot b+2ab\cdot b+b^2\cdot b.$$

Вспоминая правило $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ и записывая в каждом слагаемом сначала a, а затем b, получим

$$\begin{aligned}a^3+2a^2b+ab^2\ \ &+\\ +a^2b\ \ +2ab^2+b^3&.\end{aligned}$$

В этой сумме есть подобные члены (отличающиеся лишь числовым множителем). Для наглядности они написаны друг под другом. Собирая их вместе, получаем

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

92 Вычислите в уме 11^3.

Указание. $11 = 10 + 1$.

93 Вычислите в уме 101^3.

94 Чему равно $(a - b)^3$?

Решение. Можно было бы действовать как раньше, записав $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$ и раскрыв скобки. Однако проще подставить в формулу для $(a + b)^3$ выражение $-b$ вместо b:

$$(a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2 \cdot (-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3,$$

или

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3}$$

(пользуемся тем, что минус на минус даёт плюс, а плюс на минус даёт минус).

25. Четвёртая степень суммы

Прежде чем вычислять $(a + b)^4$, попытаемся угадать ответ. Для, этого выпишем уже известные формулы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Чтобы пополнить наш «экспериментальный материал», можно добавить к ним

$$(a + b)^1 = a + b.$$

Итак, вот что мы уже имеем:

$$(a + b)^1 = a + b.$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = ???$$

Попробуем отгадать, что будет дальше. Сколько будет слагаемых? Конечно, пять. Каково будет первое слагаемое? Конечно, a^4. А следующее? Это уже сложнее. Разобьём вопрос на два:

(1) какие будут степени a и b?

(2) какие будут при них числовые коэффициенты?

Первый вопрос проще. Мы знаем, что

в $(a + b)^1$ входят a и b,
в $(a + b)^2$ входят a^2, ab и b^2,
в $(a + b)^3$ входят a^3, a^2b, ab^2 и b^3,

поэтому теперь есть все основания предположить, что

$$\text{в } (a+b)^4 \text{ входят } a^4,\ a^3b,\ a^2b^2,\ ab^3 \text{ и } b^4.$$

Теперь напишем коэффициенты — при этом для единообразия напишем множитель 1 там, где его обычно опускают:

$$(a+b)^1 = 1a + 1b.$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Сами коэффициенты:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Первый из неизвестных коэффициентов, конечно, равен 1. Второй, вероятно, 4 (поскольку над ним стоят 1, 2, 3)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & ? & ? & ? \end{array}$$

Ещё два коэффициента можно угадать. Так как в $(a+b)^4$ буква b ничем не хуже буквы a, то коэффициент при b^4 такой же, что и при a^4, а коэффициент при ab^3 такой же, как при a^3b:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & ? & 4 & 1 \end{array}$$

Что же касается коэффициента при a^2b^2, то так просто его не угадаешь — надо вычислять. Сделаем это, снова записывая подобные члены друг под другом:

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) = \\ &= a^3\cdot a + 3a^2b\cdot a + 3ab^2\cdot a + b^3\cdot a + \\ &\quad + a^3b + 3a^2b\cdot b + 3ab^2\cdot b + b^3\cdot b = \\ &= a^3\cdot a + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + \\ &\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Объединяя (или, как говорят, «приводя») подобные члены, получаем

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

Все наши догадки подтвердились; кроме того, мы нашли коэффициент при a^2b^2, оказавшийся равным 6.

26. Формулы для $(a+b)^5$, $(a+b)^6$ и треугольник Паскаля

В формуле для $(a+b)^5$ ожидаются члены

$$a^5 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^2b^3 \quad ab^4 \quad b^5$$

и коэффициенты

$$1 \quad 5 \quad ? \quad ? \quad 5 \quad 1.$$

Чтобы узнать два средних коэффициента — надо полагать, они будут одинаковыми — поступим как обычно:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) = \\
&= a^4\cdot a + 4a^3b\cdot a + 6a^2b^2\cdot a + 4ab^3\cdot a + b^4\cdot a + \\
&\quad + a^4\cdot b + 4a^3b\cdot b + 6a^2b^2\cdot b + 4ab^3\cdot b + b^4\cdot b = \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

Итак, наша таблица коэффициентов пополнилась ещё одним рядом:

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Быть может, вы уже заметили закономерность в этой таблице: в каждой следующей строке коэффициент получается сложением двух элементов предыдущей — стоящего над ним и стоящего слева вверху: $1+4=5$, $4+6=10$, $6+4=10$, $4+1=5$.

Причина этого станет ясной, если в нашем вычислении $(a+b)^5$ оставить только коэффициенты:

$$\begin{array}{rrrrrrl} 1\ldots & +4\ldots & +6\ldots & +4\ldots & +1\ldots & + & \\ & +1\ldots & +4\ldots & +6\ldots & +4\ldots & +1\ldots & = \\ =1\ldots & +5\ldots & +10\ldots & +10\ldots & +5\ldots & +1\ldots & \end{array}$$

Для красоты таблицу коэффициентов можно записать симметрично и ещё дописать сверху 1, так как $(a+b)^0=1$. Получается треугольник

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1, \end{array}$$

который можно продолжать вниз по правилу: каждое число равно сумме двух чисел над ним (кроме крайних, которые равны 1). Например, следующий ряд будет

$$1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1,$$

и это даёт формулу

$$\boxed{(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$$

Построенный нами треугольник называется *треугольником Паскаля* (Блез Паскаль [1623–1662] — французский математик и философ).

95 Чему равны 11^3, 11^4, 11^5, 11^6?

96 Напишите формулу для $(a+b)^7$.

97 Напишите формулы для $(a-b)^4$, $(a-b)^5$, $(a-b)^6$.

98 Сложите числа в каждой из строк треугольника Паскаля: не замечаете ли вы закономерности?

99 Что дают формулы $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5, \ldots$ при $b=a$?

100 Нет ли связи между двумя предыдущими задачами?

101 Что дают формулы $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5, \ldots$ при $b=-a$?

27. Многочлены

Многочленом называют выражение, составленное из букв и чисел с помощью операций сложения, вычитания и умножения. Входящие в него буквы называют *переменными.* Примеры многочленов:

$$a^4+a^3b+ab^3+b^4,$$
$$(5-7x)(x-1)(x-3)+11,$$
$$(a+b)(a^3+b^3),$$
$$(a+b)(a+2b)+ab,$$
$$(x+y)(x-y)-(y-x)(y+x),$$
$$0,$$
$$(x+y)^{100}.$$

В этих примерах, помимо сложения, вычитания и умножения, используется возведение в целую положительную степень. Это допустимо, так как оно сводится к умножению (a^4, например, есть сокращение для $a\cdot a\cdot a\cdot a$). Но, скажем, a^{-7} или x^y — не многочлены.

Одночленом называется многочлен, не содержащий сложения и вычитания, т. е. являющийся произведением букв и чисел. Примеры одночленов:

$$5\cdot a\cdot 7\cdot b\cdot a,$$
$$127a^{15},$$
$$(-2)a^2b.$$

(в последнем примере знак минус — это не вычитание, а часть обозначения числа «-2»).

Записывая одночлен, обычно группируют вместе числа и одинаковые буквы: вместо $5\cdot a\cdot 7\cdot b\cdot a$ пишут $35a^2b$.

Обратите внимание, что одночлен — это тоже многочлен: в математике часто один — это уже много. (Математики говорят о «множестве решений» какого-то уравнения, даже если у него только одно решение или решений вообще нет.) Раскрывая скобки, любой многочлен можно преобразовать в сумму одночленов. Например,

$$(a+b)(a^3+b^3)=aa^3+ab^3+ba^3+bb^3=a^4+a^3b+ab^3+b^4,$$
$$(a+b)(a+2b)=a^2+2ab+ba+2b^2.$$

При этом могут возникнуть *подобные* члены — содержащие одни и те же буквы в одинаковых степенях. Например, во втором из только что приведённых примеров одночлены $2ab$ и ba подобны. Подобные одночлены можно объединить:

$$(a+b)(a+2b)=a^2+2ab+ba+2b^2=a^2+3ab+2b^2.$$

Эту операцию называют «приведением подобных членов».

102 Преобразуйте многочлен $(1+x+y)(12-zx-y)$ в сумму одночленов и приведите подобные члены.

Решение.

$$(1+x-y)(12-zx-y)=12-zx-\underline{y}+12x-xzx-xy-\underline{12y}+yzx+y^2=$$
$$=12-zx-13y+12x-zx^2-xy+yzx+y^2.$$

(подобные члены подчёркнуты).

Строго говоря, это ещё не всё: по условию должна быть сумма одночленов, а у нас есть вычитание. Это легко исправить, записав

$$12+(-1)zx+(-13)y+12x+(-1)zx^2+(-1)xy+1yzx+1y^2.$$

(для единообразия мы добавили множители 1).

Стандартным видом многочлена называют его запись в виде суммы одночленов, в которой каждый одночлен есть произведение числа (коэффициента) и степеней различных букв, причём подобные члены уже приведены. Решая предыдущую задачу, мы привели многочлен $(1+x+y)(12-zx-y)$ к стандартному виду.

Чтобы сложить два многочлена в стандартном виде, достаточно сложить коэффициенты при подобных членах. При этом некоторые члены могут сократиться:

$$[1x+(-1)y]+[1y+(-2x)+1z]=$$
$$=(1+(-2))x+((-1)+1)y+1z=(-1)x+0y+1z=(-1)x+1z.$$

При умножении надо умножить каждое слагаемое на каждое. Умножая два одночлена, мы складываем степени при каждой переменной:

$$(a^5b^7c)\cdot(a^3bd^4)=a^{5+3}b^{7+1}cd^4=a^8b^8cd^4.$$

После этого надо привести подобные. Например,

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+\underline{x^2y}+\underline{\underline{xy^2}}-\underline{yx^2}-\underline{\underline{xy^2}}-y^3=x^3-y^3.$$

(Подобные члены подчёркнуты одинаково; дотошный читатель отметит, что мы нарушили правила записи многочленов в стандартном виде, опустив коэффициенты -1 и 1.)

103 Перемножьте $(1+x)(1+x^2)$.

104 Перемножьте $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$.

105 Перемножьте $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$.

106 Найдите $(1+x+x^2+x^3)^2$.

$\boxed{\mathbf{107}}$ Найдите $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})^2$.

$\boxed{\mathbf{108}}$ Найдите коэффициент при x^{30} и x^{29} в многочлене

$$\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10}\right)^3.$$

$\boxed{\mathbf{109}}$ Перемножьте $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9+x^{10})$.

$\boxed{\mathbf{110}}$ Перемножьте $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$\boxed{\mathbf{111}}$ Перемножьте $(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10})$ и $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})$.

28. Отступление: какие многочлены считать равными?

Понятие «равны» для многочленов может определяться по-разному. Первый вариант: многочлены считаются равными, если один из них может быть преобразован в другой по правилам алгебры (раскрытием скобок, приведением подобных, вынесением за скобку и т. п.). Второй вариант: многочлены считаются равными, если при подстановке любых чисел вместо букв они принимают одно и то же числовое значение. Оказывается, что эти два варианта эквивалентны: многочлены, равные в одном смысле, равны и во втором. В самом деле, если один многочлен преобразуется в другой по правилам алгебры, то эти преобразования сохраняют силу и после подстановки чисел вместо букв. Обратное утверждение («если два многочлена принимают одинаковые значения при подстановке любых чисел вместо букв, то один из них может быть преобразован в другой») доказать не так просто, и мы примем его на веру без доказательства.

Если мы хотим убедить кого-то, что два многочлена равны, удобен первый вариант определения: достаточно показать, как один многочлен преобразуется в другой. Напротив, если мы хотим убедить кого-то, что многочлены *не* равны, удобней второй вариант: достаточно указать числовые значения букв, при которых многочлены принимают различные числовые значения.

$\boxed{\mathbf{112}}$ Не раскрывая скобок, убедитесь, что

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\neq(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Решение. При подстановке $x=1$ левая часть обращается в нуль, а правая нет.

$\boxed{\mathbf{113}}$ В верном равенстве многочленов

$$(x^2-1)(x+\ldots)=(x-1)(x+3)(x+\ldots)$$

два числа стёрли, заменив точками. Что это были за числа?

Указание. Подставьте $x=-1$ и $x=-3$.

Пусть теперь нам даны два многочлена, про которые неизвестно заранее, равны они или нет. Как это узнать? Можно подставить на пробу какие-то числа, и сделать несколько проб. Если хоть раз получатся разные результаты, то многочлены не равны. Если же нет, то есть основания подозревать, что они равны.

114 Ваня подставил в многочлены $(x+1)^2-(x-1)^2$ и x^2+4x-1 числа 1 и -1 вместо x и утверждает, что эти многочлены равны. Прав ли он?

Решение. Нет: достаточно подставить $x=0$.

Так что подозрения — не доказательство (хотя впоследствии мы увидим, что иногда конечного числа проверок бывает достаточно).

Чтобы проверить, равны ли два многочлена, их можно привести к стандартному виду. Если после этого они отличаются лишь порядком одночленов или порядком сомножителей в одночленах, то они, очевидно, равны. Если же нет, то можно доказать, но мы примем это на веру — многочлены не равны.

Иногда равные многочлены называют «тождественно равными», подчёркивая, что имеется в виду равенство для всех числовых значений букв. Так, например, многочлен a^2-b^2 тождественно равен многочлену $(a-b)(a+b)$.

29. Сколько одночленов останется?

115 Какое максимальное количество одночленов может быть в произведении двух многочленов, каждый из которых содержит 4 одночлена?

Замечание. Ко всякому многочлену можно добавить фиктивные одночлены с коэффициентом 0:

$$x^3+4=x^3+0x^2+0x+4.$$

Такие одночлены мы не учитываем.

Решение. Перемножим многочлены $(a+b+c+d)$ и $(x+y+z+u)$:

$$(a+b+c+d)(x+y+z+u)=ax+ay+az+au+\\+bx+by+bz+bu+cx+cy+cz+cu+dx+dy+dz+du.$$

Всего 16 членов. Ясно, что больше 16 быть не может (каждый из четырёх одночленов первого многочлена умножается на четыре одночлена второго).

116 Может ли произведение двух многочленов, каждый из которых содержит 4 одночлена, состоять меньше чем из 16 одночленов?

Решение. Да: среди 16 одночленов могут оказаться подобные. Например,

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6,$$

и из 16 членов после приведения подобных остаётся всего 7.

117 Может ли при перемножении двух ненулевых многочленов получиться так, что вообще все члены сократятся друг с другом?

Ответ. Нет.

Замечание. Вероятно, эта задача кажется вам бессмысленной, ведь и так ясно, что такого быть не может. В этом случае советуем вернуться к ней позднее.

118 Может ли при перемножении двух многочленов и последующем приведении подобных остаться единственный одночлен? (Случай, когда каждый из многочленов состоял из одного одночлена, нас не интересует.)

119 Может ли при перемножении двух многочленов получиться многочлен, в котором меньше одночленов, чем в каждом из сомножителей?

Решение. Да:

$$(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2) = ((x^2 + 2y^2) + 2xy)((x^2 + 2y^2) - 2xy) =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^2 - 4x^2y^2 = x^4 + 4y^4.$$

30. Коэффициенты и значения

Вспомним треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

и формулы для $(a + b)^n$:

$$\begin{array}{lcc} (a+b)^0 & = & 1 \\ (a+b)^1 & = & 1a + 1b \\ (a+b)^2 & = & 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 & = & 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ (a+b)^4 & = & 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \end{array}$$

Каждая из этих формул является равенством двух многочленов. Из этого равенства можно получить множество числовых равенств, подставив вместо a и b конкретные числа.

120 Что получится, если подставить $a = 1$, $b = 1$?

Решение.

$$\begin{aligned}
&(1+1)^0 = 1\\
&(1+1)^1 = 1+1\\
&(1+1)^2 = 1+2+1\\
&(1+1)^3 = 1+3+3+1\\
&(1+1)^4 = 1+4+6+4+1\\
&\qquad\quad \ldots
\end{aligned}$$

Поскольку $1+1=2$, мы доказали, что сумма чисел в любой строке треугольника Паскаля является степенью двойки.

121 Сложив числа в строках треугольника Паскаля с чередующимися знаками, получаем нули:

$$\begin{aligned}
1-1 &= 0\\
1-2+1 &= 0\\
1-3+3-1 &= 0\\
1-4+6-4+1 &= 0\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Почему так получается?

Указание. Подставьте $a=1$, $b=-1$.

122 В многочлене $(1+2x)^{200}$ раскрыли все скобки, приведя его к стандартному виду (сумма степеней x с коэффициентами). Чему равна сумма коэффициентов?

Указание. Подставьте $x=1$.

123 Тот же вопрос, что и в задаче 122, но для многочлена $(1-2x)^{200}$.

124 Многочлен $(1+x-y)^3$ привели к стандартному виду. Чему равна сумма коэффициентов во всех одночленах?

125 (Продолжение.) Чему равна сумма коэффициентов при тех одночленах, которые не содержат y?

126 (Продолжение.) Чему равна сумма коэффициентов при тех одночленах, которые содержат x?

31. Разложение на множители

Умножение многочленов — операция подчас трудоёмкая, но не требующая сообразительности, надо лишь аккуратно следовать правилам. Обратная операция — разложение многочлена в произведение нескольких множителей — требует большей изобретательности (а иногда и вообще невыполнима). Мы разберём сейчас несколько приёмов.

127 Разложите на множители многочлен $ac + ad + bc + bd$.
Решение. $ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$.

128 Разложите на множители многочлен $ac + bc - ad - bd$.

129 Разложите на множители многочлен $1 + a + a^2 + a^3$.

130 Разложите на множители многочлен $1 + a + a^2 + \ldots + a^{13} + a^{14}$.

131 Разложите на множители многочлен $x^4 - x^3 + 2x - 2$.

Иногда оказывается необходимым разбить один член на два, прежде чем удастся сгруппировать члены подходящим образом:

132 Разложите на множители многочлен $a^2 + 3ab + 2b^2$.
Решение. $a^2 + 3ab + 2b^2 = a^2 + ab + 2ab + 2b^2 = a(a + b) + 2b(a + b) = (a + 2b)(a + b)$.

133 Разложите на множители многочлен $a^2 - 3ab + 2b^2$.

134 Разложите на множители многочлен $a^2 + 3a + 2$.

Формулу квадрата суммы можно прочесть «справа налево», рассматривая её как разложение многочлена $a^2 + 2ab + b^2$ на множители. Это же разложение можно получить так:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a(a + b) + b(a + b) = (a + b)(a + b).$$

135 Разложите на множители многочлен $a^2 + 4ab + 4b^2$.

136 Разложите на множители многочлен $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$.

137 Разложите на множители многочлен $a^2 - 2a + 1$.

Иногда полезно добавить и вычесть некоторые одночлены. Этот приём мы продемонстрируем на примере многочлена $a^2 - b^2$ (хотя его разложение нам и так известно):

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a + b)(a - b).$$

138 Разложите на множители $x^5 + x + 1$.

Решение.

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = \\ &= (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Возможно, это решение обескуражило вас — непонятно, как до него догадаться. Авторам это тоже непонятно.

Посмотрим на разложение $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ещё с одной точки зрения. Если $a = b$, то $a - b = 0$ и правая часть обращается в нуль (один сомножитель равен нулю). Значит, и левая тоже. Это и понятно: если $a = b$, то $a^2 = b^2$. Аналогично, если $a + b = 0$, то $a^2 = b^2$ (в этом случае $a = -b$ и $a^2 = b^2$: от изменения знака числа его квадрат не меняется).

139 Докажите, что если $a^2 = b^2$, то $a = b$ или $a = -b$.

Таким образом, раскладывая выражение на множители, полезно поинтересоваться, когда оно равно нулю — это может подсказать сомножители.

140 Разложите на множители $a^3 - b^3$.

Решение. Выражение $a^3 - b^3$ обращается в нуль, если $a = b$. Поэтому можно предположить, что одним из множителей будет $a - b$. После этого найти разложение не так сложно:

$$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 =$$
$$= a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = (a^2 + ab + b^2)(a-b).$$

141 Разложите на множители $a^3 + b^3$.

Решение.

$$a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 =$$
$$= a^2(a+b) - ab(a+b) + b^2(a+b) = (a^2 - ab + b^2)(a+b).$$

Это же разложение можно получить из предыдущего, подставив $(-b)$ вместо b.

142 Разложите на множители $a^4 - b^4$.

Решение.

$$a^4 - b^4 = a^4 - a^3b + a^3b - a^2b^2 + a^2b^2 - ab^3 + ab^3 - b^4 =$$
$$= a^3(a-b) + a^2b(a-b) + ab^2(a-b) + b^3(a-b) =$$
$$= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Заметим, что можно разложить и иначе:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Оба разложения получаются из разложения

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

различной группировкой сомножителей.

143 Разложите на множители $a^5 - b^5$.

144 Разложите на множители $a^{10} - b^{10}$.

145 Разложите на множители $a^7 - 1$.

146 Разложите на множители $a^2 - 4b^2$.

Решение. Воспользовавшись тем, что $4 = 2^2$, запишем

$$a^2 - 4b^2 = a^2 - 2^2b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a - 2b)(a + 2b).$$

Попытаемся применить тот же приём к многочлену $a^2 - 2b^2$. Здесь нам понадобится число, называемое «квадратный корень из двух», обозначаемое $\sqrt{2}$ и равное примерно 1,4142... — его главное свойство состоит в том, что его квадрат равен 2, т. е. $(\sqrt{2})^2 = 2$.

(Вообще квадратным корнем из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначается $\sqrt{a}$. Такое число всегда существует, причём только одно; к вопросу о квадратных корнях мы ещё вернёмся.)

С помощью квадратного корня из 2 мы можем записать:

$$a^2 - 2b^2 = a^2 - (\sqrt{2}b)^2 = (a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b).$$

Таким образом, нам удалось разложить $a^2 - 2b^2$ на множители, правда, в качестве коэффициента пришлось использовать $\sqrt{2}$.

Замечание. Запишем

$$a - b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right).$$

Значит ли это, что нам удалось разложить $a - b$ на множители? Конечно, нет, так как $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ — не многочлен (операция извлечения квадратного корня не допускается в многочленах — только сложение, вычитание и умножение). А как же $a - \sqrt{2}b$? Почему мы считаем это выражение многочленом? Дело в том, что многочлен — по нашему определению — строится из букв и чисел с помощью операций сложения, вычитания и умножения. А $\sqrt{2}$ — самое настоящее число (хотя и равное квадратному корню из другого числа). Так что всё в порядке.

147 Разложите на множители $a^2 - 2$.

148 Разложите на множители $a^2 - 3b^2$.

149 Разложите на множители $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

150 Разложите на множители $a^2 + 4ab + 3b^2$.

151 Разложите на множители $a^4 + b^4$.

(Известное нам разложение для $a - b$ тут не помогает, так как подставив в него $(-b)$ вместо b, мы ничего нового не получаем.)

Решение. Применим хитрость: добавим и вычтем $2a^2b^2$:

$$a^4+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}ab)^2=$$
$$=(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)(a^2+b^2-\sqrt{2}ab).$$

Подведём некоторые итоги. Мы научились разлагать на множители многочлен a^n-b^n при любом n (один из множителей равен $a-b$). При нечётном n из этого разложения можно получить разложение для a^n+b^n (подстановка $-b$ вместо b; один из множителей равен $a+b$). Остаются ещё многочлены a^2+b^2, a^4+b^4, a^6+b^6 и т. д. Для второго из них мы нашли разложение на множители.

152 Какие ещё многочлены вида $a^{2n}+b^{2n}$ можно разложить на множители?

Указание. $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3$. Аналогичный приём можно применить в случаях, когда n имеет нечётный делитель, больший 1, или делится на 4 — мы научились разлагать на множители все многочлены вида a^n+b^n, кроме a^2+b^2.

Разложить a^2+b^2 можно было бы так:

$$a^2+b^2=a^2-(\sqrt{-1}\cdot b)^2=(a-\sqrt{-1}\cdot b)(a+\sqrt{-1}\cdot b),$$

да вот беда — квадратного корня из -1 (т. е. числа, квадрат которого равен -1) не существует, так как квадрат любого ненулевого числа положителен. Ну что ж, решили математики, если такого числа нет, то его надо выдумать. И выдумали — и получились числа, которые назвали комплексными. Но это уже другая история.

153 Как вы думаете, чему равно произведение двух «комплексных чисел» $(2+3\sqrt{-1})$ и $(2-3\sqrt{-1})$?

В заключение — несколько задач потруднее.

154 Разложите на множители x^4+1.

155 Разложите на множители $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

156 Разложите на множители $a^{10}+a^5+1$.

157 Разложите на множители $a^3+b^3+c^3-3abc$.

158 Разложите на множители $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

159 Разложите на множители $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

160 Докажите, что если $a,\ b>1$, то $a+b<1+ab$.

Указание. Разложите на множители $(1+ab)-(a+b)$.

161 Докажите, что если $a^2+ab+b^2=0$, то $a=0$ и $b=0$.

Указание. Вспомните разложение для a^3-b^3. (Другое решение мы увидим дальше, когда речь пойдёт о квадратных уравнениях.)

162 Докажите, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

163 Докажите, что если

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

то среди чисел a, b, c есть равные по величине и противоположные по знаку (т. е. $a=-b$, $a=-c$ или $b=-c$).

32. Рациональные выражения

В многочленах не разрешается деление (только сложение, вычитание и умножение). Если деление разрешить, получится то, что называют «рациональными выражениями». (Единственное ограничение: то, на что делят, не должно тождественно равняться 0.)

Примеры рациональных выражений:

(а) $\dfrac{ab}{c}$; (б) $\dfrac{a/b}{b/c}$; (в) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$; (г) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$;

(д) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}}{\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}}+1$; (е) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$; (ж) $\dfrac{1}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})/2}$.

Но, скажем, $\dfrac{x^2-x^2}{x-x}$ — не рациональное выражение, так как выражение в знаменателе тождественно равно 0.

Заметим, что разрешение использовать деление не обязывает его использовать — так что любой многочлен является рациональным выражением.

33. Преобразование рационального выражения в частное двух многочленов

Рациональное выражение может включать в себя несколько операций деления. Однако его можно преобразовать так, чтобы операция деления была единственной, и притом последней. Другими словами, всякое рациональное выражение может быть преобразовано в частное двух многочленов.

Делается это с помощью таких приёмов.

1. *Сложение.* Пусть мы хотим сложить дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{R}{S}$, где P, Q, R, S — многочлены. Приведём дроби $\frac{P}{Q}$ и $\frac{R}{S}$ к общему знаменателю (если не придумаем ничего лучшего, можно домножить P и Q на S, а R и S на Q):

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{PS}{QS}+\frac{QR}{QS}=\frac{PS+QR}{QS}.$$

2. *Вычитание* аналогично:

$$\frac{P}{Q}-\frac{R}{S}=\frac{PS}{QS}-\frac{QR}{QS}=\frac{PS-QR}{QS}.$$

3. *Умножение*:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}.$$

4. *Деление*:

$$\frac{P}{Q}\Big/\frac{R}{S}=\frac{PS}{QR}.$$

В ходе преобразований иногда удаётся сократить дробь, выделив один и тот же множитель в числителе и знаменателе:

$$\frac{PX}{QX}=\frac{P}{Q}.$$

164 Преобразуйте выражения (б) – (д) и (ж) из приведённых нами в качестве примеров к указанному виду (выражения (а) и (е) уже имеют такой вид).

Ответы и решения.

(б) $\frac{ac}{b^2}$; (в) $\frac{x}{x+1}$;

(г) $$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}; \qquad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1};$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{x+1}{2x+1}; \qquad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{3x+2}{2x+1};$$

в результате получаем $\dfrac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}} = \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

(д) $$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}}+1 = \frac{(x^2z+y^2x+x^2y)/xyz}{(y^2z+z^2x+x^2y)/xyz}+1 = \frac{(x^2z+y^2x+x^2y)\cdot xyz}{(y^2z+z^2x+x^2y)\cdot xyz}+1 =$$

$$= \frac{(x^2z+y^2x+x^2y)}{(y^2z+z^2x+x^2y)}+1 = \frac{x^2z+y^2x+x^2y+y^2z+z^2x+x^2y}{y^2z+z^2x+x^2y};$$

(ж) $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Отметим, что при преобразованиях одного и того же выражения можно получить разные ответы. Например, выражение

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$$

можно оставить как есть, а можно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

Замечание. Строго говоря, сокращение — не вполне законная операция, ведь при некоторых значениях переменных сокращаемое выражение может равняться нулю. Например, $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$ не имеет смысла при $x=-1$, а $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ имеет. Обычно на этот эффект не обращают внимания, но иногда он становится важным.

Часто предлагаются задачи, в которых требуется «упростить выражение» — привести его к наиболее простому виду. Хотя простота — это дело вкуса, в таких задачах обычно ясно, чего хотят их авторы.

165 Упростите выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Решение. Сложим две первые дроби, приведя их к общему знаменателю $(c-a)(c-b)(b-a)$ (числитель и знаменатель первой дроби умножаем на $b-a$, числитель и знаменатель второй — на $c-a$; используем, что

$b-c=-(c-b)$):

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=$$
$$=\frac{(x-a)(x-b)(b-a)-(x-a)(x-c)(c-a)}{(c-a)(c-b)(b-a)}=$$
$$=\frac{(x-a)[(x-b)(b-a)-(x-c)(c-a)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}=$$
$$=\frac{(x-a)[xb-\underline{xa}-b^2+ab-xc+\underline{xa}+c^2-ac]}{(c-a)(c-b)(b-a)}=$$
$$=\frac{(x-a)[x(b-c)+a(b-c)-(b-c)(b+c)]}{(c-a)(c-b)(b-a)}=$$
$$=\frac{(x-a)(b-c)(x+a-b-c)}{(c-a)(c-b)(b-a)}.$$

Сократив на $(c-b)=-(b-c)$, получаем

$$\frac{(x-a)(b+c-a-x)}{(c-a)(b-a)}.$$

Прибавим теперь третью дробь (знаменатели у них одинаковы):

$$\frac{(x-a)(b+c-a-x)}{(c-a)(b-a)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=$$
$$=\frac{xb+xc-xa-x^2-ab-ac+a^2+ax+x^2-xb-xc+bc}{(c-a)(b-a)}=$$
$$=\frac{a^2+bc-ab-ac}{(c-a)(b-a)}=\frac{a(a-b)-c(a-b)}{(c-a)(b-a)}=\frac{(a-c)(a-b)}{(c-a)(b-a)}=1.$$

Итак, мы доказали тождество

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1.$$

166 Проверьте это тождество для частных случаев $x=a$, $x=b$ и $x=c$.

Мы увидим впоследствии, что этой проверки на самом деле достаточно, чтобы убедиться в истинности тождества. Так что можно было бы избежать утомительных вычислений, которые мы провели.

В заключение — несколько задач, в которых встречаются рациональные выражения. Выражение

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Big/2}$$

(обратное к среднему арифметическому чисел, обратных к числам a и b) называется *средним гармоническим* чисел a и b. Оно часто встречается в различных задачах.

167 Бассейн разделен на две равные части, каждая из которых наполняется своей трубой — одна за a часов, другая за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если включить обе трубы, убрав перегородку?

168 Двигаясь по течению реки, катер проходит путь из А в Б за a часов, против течения (из Б в А) — за b часов. За сколько времени он прошёл бы путь из А в Б, если бы течения не было? (Скорость катера и течения считать постоянными).

169 Первую половину пути машина ехала со скоростью v_1, вторую — со скоростью v_2. Какова её средняя скорость?

170 Известно, что $x+\frac{1}{x}=7$. Вычислите (а) $x^2+\frac{1}{x^2}$; (б) $x^3+\frac{1}{x^3}$.

171 Число $x+\frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что число $x^n+\frac{1}{x^n}$ для любого $n=1, 2, 3, \ldots$ также является целым.

172 Преобразовывая выражение (г) на странице 53, мы обнаружили, что

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x+1},\qquad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\frac{x+1}{2x+1},\qquad \frac{1}{\dfrac{3x+2}{2x+1}}=\frac{2x+1}{3x+2}.$$

Записав в виде отношения многочленов рациональные выражения

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}},\qquad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}}},\qquad \ldots$$

попытайтесь обнаружить закономерность, которой подчиняются коэффициенты этих многочленов. (Такого рода выражения называются *непрерывными дробями*; коэффициенты многочленов в нашей задаче оказываются так называемыми числами Фибоначчи, см. стр. 78.)

34. Многочлены и рациональные дроби с одной переменной

Если многочлен содержит только одну переменную, то при записи его в стандартном виде одночлены обычно располагают в порядке убывания показателей степени. Одночлен максимальной степени называют *старшим* членом, а его степень — *степенью* многочлена. (Члены с нулевыми коэффициентами не учитываются. Для многочлена, равного нулю, степень не определена.) Например, многочлен $7x^2 + 3x + 1$ имеет старший член $7x^2$, а степень его равна 2.

Многочленами степени 0 считают числа, не равные 0.

173 Каков старший член у многочлена $(2x+1)^5$?

174 Один многочлен имеет степень m, а другой n. Какова степень их произведения?

Решение. При перемножении старших членов получится одночлен степени $m+n$ (так как $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$), коэффициент при котором будет равен произведению коэффициентов при x^m и x^n. Этот одночлен ни с чем сократиться не может, так как все другие попарные произведения имеют меньшую степень.

175 Какую степень может иметь (а) сумма многочлена степени 7 и многочлена степени 9? (б) сумма двух многочленов степени 7?

Ответ. (а) 9; (б) любую, не превосходящую 7.

176 В многочлен степени 10 с одной переменной x подставили вместо x выражение $y^7 + 5y^2 - y - 4$. Какова степень получившегося многочлена (от y)?

35. Деление многочленов с остатком

Обыкновенные дроби, числитель и знаменатель которых — целые положительные числа, бывают *правильные* и *неправильные*. Правильные — это те, у которых числитель меньше знаменателя. Например, $\frac{3}{7}$ и $\frac{1}{15}$ — правильные дроби, а $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{11}$ или $\frac{37}{7}$ — неправильные.

Из неправильной дроби можно выделить целую часть, разделив с остатком числитель на знаменатель; останется правильная дробь:

$7 = 1 \cdot 5 + 2$ (частное 1, остаток 2)	$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$	$\begin{array}{r\|l} 7 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{5} & 1 \\ 2 & \end{array}$
$37 = 5 \cdot 7 + 2$ (частное 5, остаток 2)	$\frac{37}{7} = 5 + \frac{2}{7}$	$\begin{array}{r\|l} 37 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{35} & 5 \\ 2 & \end{array}$
$11 = 1 \cdot 11 + 0$ (частное 1, остаток 0)	$\frac{11}{11} = 1$	$\begin{array}{r\|l} 11 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{11} & 1 \\ 0 & \end{array}$

Сейчас мы научимся выполнять аналогичные преобразования для дробей, числитель и знаменатель которых — многочлены с одной переменной. Такая дробь считается *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя. Например, $\frac{10x}{x^2}$, $\frac{1}{x^3-1}$ — правильные дроби, а $\frac{x^4}{x-2}$, $\frac{x+1}{x+2}$, $\frac{x^3}{5x}$, $\frac{x^3+1}{x+1}$ — неправильные.

Всякая неправильная дробь может быть преобразована к виду

$$(\text{многочлен}) + (\text{правильная дробь}).$$

Вот несколько примеров такого преобразования:

(а) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{(x+1)+2}{x+1} = 1 + \dfrac{2}{x+1}$.

(б) $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{(x+2)-2}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$.

(в) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{x+(1/2)}{2x+1} - \dfrac{1/2}{2x+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1/2}{2x+1}$.

(Когда мы говорили, что в многочленах не может быть деления, это не значило, что коэффициенты обязательно целые — они могут быть любыми, в том числе и дробными. Так, например, число $1/2$ — вполне законный многочлен степени 0.)

(г) $\dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{(x^2-4)+4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)+4}{x-2} = (x+2) + \dfrac{4}{x-2}$.

(д) $\dfrac{x^4}{x-2} = \dfrac{(x^4-16)+16}{x-2} = \dfrac{(x^2+4)(x+2)(x-2)+16}{x-2} =$
$= (x^2+4)(x+2) + \dfrac{16}{x-2}$.

Существует стандартный способ выделения многочлена из неправильной рациональной дроби, аналогичный обычному делению чисел «уголком». Покажем его на примерах:

Пример. Преобразуем неправильную дробь $\dfrac{x^4}{x-2}$:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3} & x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \leftarrow \text{частное} \\
\quad 2x^3 & \\
\quad \underline{2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad 4x^2 & \\
\qquad \underline{4x^2 - 8x} & \\
\qquad\quad 8x & \\
\qquad\quad \underline{8x - 16} & \\
\qquad\qquad 16 \leftarrow \text{остаток} &
\end{array}$$

Та же процедура может быть записана иначе:

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x-2} &= \frac{x^4-2x^3}{x-2}+\frac{2x^3}{x-2} = x^3+\frac{2x^3}{x-2} = x^3+\frac{2x^3-4x^2}{x-2}+\frac{4x^2}{x-2} = \\ &= x^3+2x^2+\frac{4x^2}{x-2} = x^3+2x^2+\frac{4x^2-8x}{x-2}+\frac{8x}{x-2} = \\ &= x^3+2x^2+4x+\frac{8x}{x-2} = x^3+2x^2+4x+\frac{8x-16}{x-2}+\frac{16}{x-2} = \\ &= x^3+2x^2+4x+8+\frac{16}{x-2}.\end{aligned}$$

Итак, мы получаем:

$$x^4 = (x^3+2x^2+4x+8)(x-2)+16.$$

Пример. Теперь преобразуем дробь $\dfrac{x^3+2x}{x^2-x+1}$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\quad +2x & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2+x} & x+1 \\ \qquad\ x^2+x & \\ \qquad\ \underline{x^2-x\ \ +1} & \\ \qquad\qquad\ 2x-1 & \end{array}$$

Другая запись тех же преобразований:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+2x}{x^2-x+1} &= \frac{x^3-x^2+x}{x^2-x+1}+\frac{x^2+x}{x^2-x+1} = x+\frac{x^2+x}{x^2-x+1} = \\ &= x+\frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1} = (x+1)+\frac{2x-1}{x^2-x+1}.\end{aligned}$$

Итак,

$$x^3+2x = (x+1)(x^2-x+1)+(2x-1).$$

Пример (последний). Преобразуем дробь $\dfrac{x^3}{2x-3}$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-(3/2)x^2} & (1/2)x^2+(3/4)x+(9/8) \\ \qquad (3/2)x^2 & \\ \qquad \underline{(3/2)x^2-(9/4)x} & \\ \qquad\qquad\qquad (9/4)x & \\ \qquad\qquad\qquad \underline{(9/4)x-(27/8)} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (27/8) & \end{array}$$

Те же преобразования:

$$\frac{x^3}{2x-3}=\frac{x^3-(3/2)x^2}{2x-3}+\frac{(3/2)x^2}{2x-3}=\frac{1}{2}x^2+\frac{(3/2)x^2-(9/4)x}{2x-3}+\frac{(9/4)x}{2x-3}=$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{(9/4)x-(27/8)}{2x-3}+\frac{27/8}{2x-3}=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}\right)+\frac{27/8}{2x-3}.$$

Итак,

$$x^3=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}\right)(2x-3)+\frac{27}{8}.$$

Деление многочленов с остатком:

(делимое) = (неполное частное) · (делитель) + (остаток)

Степень остатка меньше степени делителя (*или остаток равен* 0).

177 Каковы могут быть степени остатка и неполного частного при делении многочлена степени 7 на многочлен степени 3?

Ответ. Степень неполного частного равна 4, степень остатка может быть 0, 1 или 2; кроме того, остатка может не быть вовсе (т. е. он может быть равен 0).

178 Докажите, что неполное частное и остаток (обладающие указанными в рамке свойствами) всегда существуют и единственны.

Решение. Метод нахождения неполного частного и остатка был продемонстрирован выше на примерах. Для доказательства единственности предположим, что при делении P на S могут получиться два неполных частных Q_1 и Q_2 и два соответствующих остатка R_1 и R_2. Тогда мы имеем

$$P=Q_1S+R_1,$$
$$P=Q_2S+R_2,$$

причём у обоих многочленов R_1 и R_2 степени меньше, чем у S. Тогда

$$Q_1S+R_1=Q_2S+R_2$$

и, следовательно,

$$R_1-R_2=Q_2S-Q_1S=(Q_2-Q_1)S.$$

Если получившийся многочлен R_1-R_2 не равен нулю, то его степень меньше, чем у S (так как степени обоих многочленов R_1 и R_2 меньше, чем у S). Поэтому равенство $R_1-R_2=(Q_2-Q_1)S$ возможно в одном-единственном случае: если $Q_2-Q_1=0$, $R_1-R_2=0$, т. е. $Q_1=Q_2$, $R_1=R_2$.

Что считать остатком и частным, если степень делимого с самого начала меньше степени делителя? В этом случае полагают, что частное равно 0, а остаток равен делимому.

Деление многочленов похоже на обычное деление:

$$
\begin{array}{l|l}
1234 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{11} & 112 \\
\;\;13 & \\
\;\;\underline{11} & \\
\;\;\;\;24 & \\
\;\;\;\;\underline{22} & \\
\;\;\;\;\;\;2 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2+3x+4 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+x^2} & x^2+x+2 \\
\qquad x^2+3x & \\
\qquad \underline{x^2+x} & \\
\qquad\qquad 2x+4 & \\
\qquad\qquad \underline{2x+2} & \\
\qquad\qquad\quad 2 &
\end{array}
$$

$$1234 = 112\cdot 11 + 2 \qquad\qquad x^3+2x^2+3x = (x^2+x+2)(x+1)+2.$$

В этом примере аналогия полная; чтобы убедиться в этом, достаточно подставить 10 вместо x. В других случаях, например,

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2+3x+4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2+3x+6 \\
\qquad 3x^2+3x & \\
\qquad \underline{3x^2-x} & \\
\qquad\qquad 6x+4 & \\
\qquad\qquad \underline{6x-6} & \\
\qquad\qquad\quad 10 &
\end{array}
$$

$$x^3+2x^2+3x+4 = (x^2+3x+6)(x-1)+10$$

аналогия неполная: подставив в последнее равенство $x=10$, получим равенство $1234 = 136\cdot 9 + 10$, которое, хотя и верно, но не означает, что при делении 1234 на 9 частное равно 136, а остаток равен 10 (на самом деле частное равно 137, а остаток равен 1).

179 Разделите x^3-1 на $x-1$.

180 Разделите x^4-1 на $x-1$.

181 Разделите $x^{10}-1$ на $x-1$.

182 Разделите x^3+1 на $x+1$.

183 Разделите x^4+1 на $x+1$.

Ответы к первым трём из этих пяти задач являются частным случаем общей формулы

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1,$$

которую легко проверить делением уголком или просто перемножив $x-1$ и $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1$. На эту формулу можно смотреть как на способ суммирования ряда последовательных степеней некоторого числа x:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

(она годится для всех x, кроме 1). См. ниже о сумме геометрической прогрессии.

184 Степени двойки

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

обладают таким свойством: сумма нескольких первых чисел этой последовательности на единицу меньше следующего числа:

$$1 + 2 = 3 = 4 - 1,$$
$$1 + 2 + 4 = 7 = 8 - 1,$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 16 - 1$$

и т. д. Объяснить наблюдаемую закономерность.

Решение. Подставим в равенство

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

значение $x = 2$. Получим

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Другое решение. Чтобы вычислить сумму $1 + 2 + 4 + 8 + 16$, прибавим и вычтем 1:

$$\begin{aligned}1 + 2 + 4 + 8 + 16 &= (1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16) - 1 = \\ &= (2 + 2 + 4 + 8 + 16) - 1 = \\ &= (4 + 4 + 8 + 16) - 1 = \\ &= (8 + 8 + 16) - 1 = \\ &= (16 + 16) - 1 = \\ &= 32 - 1.\end{aligned}$$

Аналогично для других степеней.

36. Остаток при делении на $x - a$

Существует способ найти остаток от деления произвольного многочлена на двучлен $x - a$ (где a — любое число), не производя деления.

Пусть, например, нужно найти остаток от деления x^4 на двучлен $x - 2$. Прежде всего заметим, что остаток — это число (его степень должна быть меньше степени $x - 2$). Чтобы найти это число, в равенство

$$x^4 = (\text{неполное частное})(x - 2) + (\text{остаток})$$

подставим $x=2$. Получим

$$2^4 = (\ldots)\cdot 0 + (\text{остаток}),$$

т. е. остаток равен $2^4 = 16$.

Вообще, пусть P — любой многочлен, который мы хотим разделить на $x-a$ (где a — некоторое число). Запишем

$$P = (\text{неполное частное})(x-a) + (\text{остаток})$$

и подставим $x=a$. Получаем такое правило:

> Чтобы найти остаток от деления многочлена с одной переменной x на двучлен $x-a$, надо подставить в этот многочлен число a вместо x.

Это правило называют «теоремой Безу». Она позволяет находить остаток (но не частное), не производя деления.

Вот важное следствие теоремы Безу:

> Чтобы узнать, делится ли данный многочлен на двучлен $x-a$ без остатка, достаточно посмотреть, обращается ли он в нуль при подстановке a вместо x.

Число, при подстановке которого многочлен обращается в нуль, называют *корнем многочлена*. Таким образом, многочлен P делится нацело на $x-a$ в том и только в том случае, когда a — корень многочлена P.

185 При каких n многочлен x^n-1 делится на $x-1$ без остатка?

186 При каких n многочлен x^n+1 делится на $x+1$ без остатка?

Найдя корень многочлена, мы получаем возможность разложить его на множители, выделив множитель $x-a$ (a — найденный корень). После этого можно пытаться разлагать этот многочлен дальше, применяя этот же приём к частному.

187 Разложите на множители многочлены
(а) x^4+5x-6; (б) x^4+3x^2+5x+1; (в) x^3-3x-2.

188 Известно, что 1 и 2 — корни многочлена P. Докажите, что P делится без остатка на $(x-1)(x-2)$.

Решение. Поскольку 1 является корнем P, то P делится нацело на двучлен $(x-1)$, то есть $P=(x-1)\cdot Q$. Подставив в это равенство $x=2$, видим, что 2 является корнем Q, то есть Q делится на $x-2$, $Q=(x-2)\cdot R$. Тогда $P=(x-1)(x-2)R$.

Замечание. Типичное неверное решение таково: P делится на $x-1$ (так как 1 — корень) и на $x-2$ (так как 2 — корень), следовательно, P делится на $(x-1)(x-2)$. Ошибка: «следовательно» здесь не обосновано. Например, 12 делится на 6 и на 4, но мы не можем сказать: «следовательно, 12 делится на $6 \cdot 4 = 24$».

Аналогичным образом можно доказать, что

если различные числа a_1, a_2, ..., a_n являются корнями многочлена P, то P делится на $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

189 Какое наибольшее число корней может иметь многочлен степени 5?

Решение. 5 корней. Например, многочлен

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

имеет корни 1, 2, 3, 4, 5. Больше 5 корней быть не может. В самом деле, если бы многочлен P степени 5 имел 6 корней a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, то он должен был бы делиться на

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)$$

т. е.

$$P = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)Q,$$

что невозможно, так как степень правой части не меньше 6.

Вообще *многочлен степени n не может иметь больше n различных корней.*

Замечание. Мы использовали здесь выражение «различные корни», так как слова «число корней» могут пониматься по-разному. Например, сколько корней у многочлена $x^2 - 2x + 1$? Заметим, что $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, так что $x = 1$ является его корнем, а любое число $x \neq 1$ — не является. Таким образом, мы можем сказать, что этот многочлен имеет в точности один корень. С другой стороны, общая формула для многочлена с двумя корнями a и b есть

$$c(x-a)(x-b)$$

и наш многочлен

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

является специальным случаем этой формулы для $a = b = 1$ (и $c = 1$), так что математики часто говорят, что этот многочлен имеет «два равных корня». Мы не будем пользоваться этой терминологией, но вы можете встретить её, например, в формулировке так называемой «основной теоремы алгебры», гласящей, что «любой многочлен степени n имеет в точности n комплексных корней».

190 Как проверить, делится ли данный многочлен P на $x^2 - 1$?

Ответ. Надо выяснить, являются ли числа 1 и -1 корнями многочлена P.

191 При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 - 1$?

В заключение этого раздела вернёмся к тождеству

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} - 1 = 0,$$

которое мы обсуждали на с. 54 (мы перенесли 1 в левую часть). Пусть a, b, c — различные числа. Рассмотрим левую часть тождества как многочлен от x. Степень этого многочлена не выше 2. Поэтому он может иметь не более двух корней (если только не равен 0 тождественно). Но числа a, b и c являются его корнями. Значит, он тождественно равен нулю!

Дотошный читатель в этом месте укажет, что мы смешиваем равенство рациональных выражений при всех числовых значениях букв (даже не при всех, строго говоря: если $a = b$, то левая часть не имеет смысла) и возможность преобразовать одно выражение в другое по правилам алгебры. Критика справедливая, и ответить на неё не так просто — мы этого делать не будем.

192 Остаток от деления многочлена P (от одной переменной x) на многочлен $x^2 - 1$ является многочленом степени не выше 1, т. е. имеет вид $ax + b$. Как найти a и b, зная значения P в точках $x = -1$ и $x = 1$?

Указание. Подставить в равенство

$$P = (x^2 - 1)(\text{неполное частное}) + (ax + b)$$

числа $x = 1$ и $x = -1$.

193 При делении на $x^2 - 1$ многочлен P даёт остаток $5x - 7$. Каков будет остаток при делении P на $x - 1$?

194 Многочлен $P = x^3 + x^2 - 10x + 1$ имеет три корня (авторы за это ручаются), которые мы обозначим x_1, x_2, x_3. Напишите многочлен с целыми коэффициентами, который бы имел три корня:

(а) $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$; (б) $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$; (в) $\dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{1}{x_2}$, $\dfrac{1}{x_3}$.

195 Найдите коэффициенты (числа) a и b, если известно, что многочлен $x^3 + ax^2 + x + b$ делится без остатка на $x^2 - 3x + 2$.

37. Многочлены, значения, интерполяция

Пусть P — многочлен, содержащий только одну переменную (букву) x. Чтобы подчеркнуть это, будем обозначать его $P(x)$ (читается «пэ от икс»). Подставим вместо x какое-либо число, например, 6, и выполним все вычисления. Полученное число называют *значением* многочлена $P(x)$ для $x=6$ и обозначают $P(6)$ (читается «пэ от шести»).

Например, если $P(x)=x^2-x-4$, то $P(0)=0^2-0-4=-4$. Другие значения: $P(1)=-4$, $P(2)=-2$, $P(3)=2$, $P(4)=8$, $P(5)=16$, $P(6)=26$ и т. д.

196 Составьте таблицу значений $P(0), \ldots, P(6)$ многочлена $P(x)=x^3-2$.

197 Выпишем значения $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... многочлена $P(x)=x^2-x-4$:

$$-4, -4, -2, \quad 2, \quad 8, 16, 26, \ldots$$

Под каждыми двумя соседними числами напишем их разность:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
-4 & & -4 & & -2 & & 2 & & 8 & & 16 & & 26 & & \ldots \\
 & 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & \ldots &
\end{array}$$

и с полученной последовательностью «первых разностей» сделаем то же самое:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
-4 & & -4 & & -2 & & 2 & & 8 & & 16 & & 26 & & \ldots \\
 & 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & \ldots & \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \ldots & &
\end{array}$$

Получаются двойки. Докажите, что это не случайно, и что все следующие члены в третьей строке — тоже двойки.

198 Докажите, что для любого многочлена степени 2 все «вторые разности» одинаковы.

199 Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многочленов третьей степени.

200 Найдите значения многочлена $P(x)=x^2+x+41$ (этот многочлен рассматривал Л. Эйлер) при $x=1, 2, 3, \ldots, 10$. Убедитесь, что все они — простые числа (не делятся нацело ни на что, кроме единицы и самого себя). Может быть, все числа $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ... простые?

Посмотрим теперь, что можно сказать о многочлене, если у нас есть какая-то информация о его значениях.

Многочленом *степени не выше n* (с одной переменной) будем называть многочлен равный нулю, а также любые многочлены степени $0, 1, 2, \ldots, n$.

Например, многочлен степени не выше 1 имеет вид $ax+b$. При $a\neq 0$ он имеет степень 1. При $a=0$, $b\neq 0$ он имеет степень 0. При $a=b=0$ получается нулевой многочлен (степени не имеющий).

Аналогично многочлен степени не выше 2 имеет вид ax^2+bx+c и т. д.

201 Известно, что $P(x)$ — многочлен степени не выше 1, $P(1)=7$, $P(2)=5$. Найти $P(x)$.

Решение. По условию $P(x)=ax+b$, где a и b — некоторые числа. Подставим $x=1$ и $x=2$.

$$P(1)=a+b=7,$$
$$P(2)=2a+b=5.$$

Сравнивая эти равенства, видим, что от добавления лишнего a число 7 превратилось в 5, поэтому $a=-2$, $b=9$. *Ответ*: $P(x)=-2x+9$.

Тем же способом можно найти любой многочлен степени не выше 1, если заданы его значения для двух различных значений x. Те из вас, кто знает, что график $y=ax+b$ — прямая, легко объяснят это геометрически: через две различные точки проходит прямая, причём только одна.

202 Многочлен $P(x)$ степени не выше 1 удовлетворяет двум условиям $P(1)=0$ и $P(2)=0$. Докажите, что $P(x)=0$ при всех x.

Перейдём теперь к многочленам степени не выше 2. Сколько значений нужно знать, чтобы восстановить многочлен? Убедимся, что двух недостаточно.

203 Многочлен $P(x)=0$ степени не выше 2 таков, что $P(1)=0$ и $P(2)=0$. Можно ли утверждать, что $P(x)=0$?

Решение. Нет: рассмотрим многочлен

$$P(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

Мы уже знаем, что многочлен $P(x)$, для которого $P(1)=P(2)=0$, имеет вид $P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Если к тому же степень $P(x)$ не выше 2, то $Q(x)$ может быть только числом.

204 Многочлен $P(x)$ степени не выше 2 таков, что $P(1)=0$, $P(2)=0$, $P(3)=4$. Найдите $P(x)$.

Первое решение. Как мы только что видели, $P(x)=a(x-1)(x-2)$ где a — некоторое число. Чтобы его найти, подставим $x=3$:

$$P(3)=a(3-1)(3-2)=2a=4,$$

откуда $a=2$. *Ответ*: $P(x)=2(x-1)(x-2)=2x^2-6x+4$.

Второе решение. Многочлен степени не выше 2 имеет вид ax^2+bx+c. Подставив $x=1,\ 2,\ 3$, получаем:

$$P(1)=\ \ a+\ \ b+c=0,$$
$$P(2)=4a+2b+c=0,$$
$$P(3)=9a+3b+c=0.$$

Отсюда

$$3a+b=0,$$
$$5a+b=4.$$

Добавление $2a$ превращает 0 в 4, поэтому $a=2$. Отсюда $b=-6$, $c=4$. *Ответ*: $2x^2-6x+4$.

205 Докажите, что многочлен степени не выше 2 однозначно определяется тремя своими значениями. Это значит, что если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени не выше 2 и $P(x_1)=Q(x_1)$, $P(x_2)=Q(x_2)$, $P(x_3)=Q(x_3)$ для трёх различных чисел x_1, x_2, x_3, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Решение. Рассмотрим разность многочленов P и Q, многочлен $R(x)=$ $=P(x)-Q(x)$. По условию $R(x_1)=R(x_2)=R(x_3)=0$.

Другими словами, числа x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $R(x)$. Но многочлен степени не выше 2, как мы видели, не может иметь трёх корней (если только он не равен нулю).

206 Известно, что

$$16a+4b+c=0,$$
$$49a+7b+c=0,$$
$$100a+10b+c=0.$$

Докажите, что $a=b=c=0$.

207 Докажите, что многочлен степени не выше n однозначно задаётся своими $n+1$ значениями. (Для $n=2$ эта задача уже была.)

208 Найдите многочлен $P(x)$ степени не выше 2, для которого:
(а) $P(1)=0$, $P(2)=0$, $P(3)=4$;
(б) $P(1)=0$, $P(2)=2$, $P(3)=0$;
(в) $P(1)=6$, $P(2)=0$, $P(3)=0$;
(г) $P(1)=6$, $P(2)=2$, $P(3)=4$.

Первое решение. Задача (а) уже была: ответ $2(x-1)(x-2)$. Аналогично решаются (б) и (в). *Ответы*: (б) $-2(x-1)(x-3)$, (в) $3(x-2)(x-3)$. Теперь можно решить (г), сложив три полученных многочлена.

Ответ:

$$2(x-1)(x-2)-2(x-1)(x-3)+3(x-2)(x-3)=$$
$$=2x^2-6x+4-2x^2+8x-6+3x^2-15x+18=3x^2-13x+16.$$

Второе решение (для пункта (г)). Найдём сначала какой-нибудь многочлен Q степени не выше 2, для которого $Q(1)=6$, $Q(2)=2$. Например, годится многочлен $Q(x)=10-4x$ (степени 1). У многочлена Q два значения $Q(1)$ и $Q(2)$ какие нужно, а третье $Q(3)=-2$ — не такое. Это можно исправить, рассмотрев многочлен

$$P(x) = Q(x) + a(x-1)(x-2).$$

Каково бы ни было число a, значения $P(1)$ и $P(2)$ не изменятся. А подбором a можно сделать значение $P(3)$ равным требуемому:

$$P(3) = Q(3) + 2a = -2 + 2a.$$

Чтобы $P(3)$ было равно 4, положим $a = 3$.

Ответ:
$P(x) = 10 - 4x + 3(x-1)(x-2) = 10 - 4x + 3x^2 - 9x + 6 = 3x^2 - 13x + 16.$

209 Найдите многочлен $P(x)$ степени не выше 3, зная четыре его значения: $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 7$.

210 Пусть $x_1, \ldots, x_{10}$ — попарно различные числа, $y_1, \ldots, y_{10}$ — любые числа. Докажите, что существует ровно один многочлен степени не выше 9, для которого $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $\ldots$, $P(x_{10}) = y_{10}$.

211 Не производя вычислений, убедитесь, что существуют такие числа a, b и c, что

$$100a + 10b + c = 18{,}37$$
$$36a + 6b + c = 0{,}05$$
$$4a + 2b + c = -3$$

(Искать a, b и c не нужно, достаточно убедиться в их существовании.)

212 Старший коэффициент многочлена P равен 1, $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$, $\ldots$, $P(9) = 0$, $P(10) = 0$. Какова наименьшая возможная степень многочлена P? Чему равно в этом случае $P(11)$?

Ответ. Степень равна 10; $P(11) = 3628800$.

38. Арифметические прогрессии

В последовательности чисел

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

каждый член на 2 больше предыдущего; в последовательности

$$10, 9, 8, 7, 6, \ldots$$

каждый член на 1 меньше предыдущего. Такие последовательности называют арифметическими прогрессиями.

Определение. Последовательность, в которой каждый член получается из предыдущего добавлением одного и того же числа, называется *арифметической прогрессией*, а упомянутое число называется её *разностью*.

213 Каковы разности прогрессий в приведённых выше примерах?
Ответ. 2 и -1.

214 Найдите третий член арифметической прогрессии

$$5,\ -2,\ \ldots$$

Ответ. -9.

215 Найдите 1000-й член прогрессии

$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Решение. В прогрессии

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

первый член равен 1, второй член равен 2, …, 1000-й член равен 1000. В нашей прогрессии члены на единицу больше.
Ответ. 1001.

216 Найдите 1000-й член прогрессии

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

217 Найдите 1000-й член прогрессии

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

218 Первый член прогрессии равен a, разность равна d. Чему равен 1000-й член? Чему равен n-й член?
Решение.

1-й член	a
2-й член	$a+d$
3-й член	$a+2d$
4-й член	$a+3d$
5-й член	$a+4d$
…	…
1000-й член	$a+999d$
…	…
n-й член	$a+(n-1)d$

219 Члены арифметической прогрессии с разностью d переписали в обратном порядке. Получится ли арифметическая прогрессия? Если да, какова будет её разность?

220 Из арифметической прогрессии с разностью d вычеркнули каждый второй член. Получится ли арифметическая прогрессия? Какова будет её разность?

221 Тот же вопрос, если вычеркнули каждый третий член.

222 Первый член арифметической прогрессии равен 5, а третий член равен 8. Чему равен второй?

Ответ. 6,5.

223 Первый член прогрессии равен a, а третий член равен b. Чему равен второй?

Ответ. $(a+b)/2$.

224 Первый член прогрессии равен a, а четвёртый член равен b. Чему равны её второй и третий члены?

225 Найдите число членов в прогрессии

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 993, 995, 997, 999.$$

Указание. В этой прогрессии n-й член равен $2n-1$. (Другой способ — сравнить её с прогрессией 2, 4, 6, ..., 1000.)

39. Сумма арифметической прогрессии

226 Найдите сумму

$$1+3+5+7+\ldots+999.$$

Решение. Прежде всего найдём число членов (см. выше). Член с номером n равен $1+(n-1)\cdot 2 = 2n-2+1 = 2n-1$. Он равен 999 при $n=500$. Поэтому в прогрессии 500 членов. Сгруппируем их в 250 пар

$$(1+999)+(3+997)+\ldots+(499+501).$$

Каждая пара в сумме даёт 1000.

Ответ. 250000.

227 Первый член прогрессии из n членов равен a, последний (n-й) равен b. Найдите сумму её членов.

Решение. Соединив члены в пары, как в предыдущей задаче, получим $n/2$ пар, сумма каждой равна $a+b$.

Ответ. $\dfrac{n(a+b)}{2}$.

228 Решение предыдущей задачи содержит пробел. Найдите и исправьте его.

Решение. Всё сказанное в нём относится к случаю чётного n. Если n нечётно, то остаётся непарный (средний) член в прогрессии. Чтобы не рассматривать случаи чётного и нечётного n отдельно, можно применить трюк, который мы покажем на примере суммы

$$S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$$

Напишем её в обратном порядке:

$$S = 11 + 9 + 7 + 5 + 3$$

и сложим эти равенства

$$S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11+$$
$$+11 + 9 + 7 + 5 + 3.$$

В каждом столбце стоят 2 числа, в сумме дающие 14:

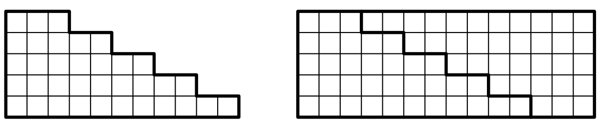
$$3 + 11 = 5 + 9 = 7 + 7 = 9 + 5 = 11 + 3 = 14.$$

Поэтому $2S = 5 \cdot 14 = 70$, $S = \frac{5 \cdot 14}{2} = 35$.

В общем случае будет n столбцов с одинаковой суммой, равной сумме первого и последнего членов, т. е. $a + b$. Поэтому

$$S = \frac{n(a+b)}{2}.$$

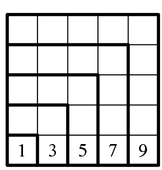
Это рассуждение можно пояснить картинкой: две фигурки, изображающие сумму $3 + 5 + 7 + 9 + 11$, вместе составляют прямоугольник 5×14.



$\boxed{\textbf{229}}$ Докажите, что сумма первых n нечётных чисел есть полный квадрат:

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 3 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2 \text{ и т. д.}$$

Указание. Можно использовать предыдущую задачу или такой рисунок:



40. Геометрические прогрессии

В последовательности

$$3, 6, 12, 24, \ldots$$

каждый член больше предыдущего в 2 раза. В последовательности

$$6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$$

каждый член меньше предыдущего в 3 раза. Такие последовательности называют геометрическими прогрессиями.

Определение. Последовательность, в которой каждый член получается умножением предыдущего на одно и то же число, называется *геометрической прогрессией*, а это число — знаменателем прогрессии.

230 Каковы знаменатели прогрессий в приведённых выше примерах?
Ответ. 2 и 1/3.

231 Найдите третий член геометрической прогрессии

$$2, 3, \ldots$$

Ответ. 9/2.

232 Найдите 1000-й член прогрессии 3, 6, 12, …
Решение.

$$\begin{array}{lr}
\text{1-й член} & 3 = 3\cdot 2^0 \\
\text{2-й член} & 6 = 3\cdot 2^1 \\
\text{3-й член} & 12 = 3\cdot 2^2 \\
\ldots & \ldots \\
\text{1000-й член} & = 3\cdot 2^{999}
\end{array}$$

233 Чему равен n-й член прогрессии, первый член которой равен a, а знаменатель равен q?
Решение.

$$\begin{array}{ll}
\text{1-й член} & a = a\cdot q^0 \\
\text{2-й член} & a\cdot q = a\cdot q^1 \\
\text{3-й член} & a\cdot q^2 \\
\text{4-й член} & a\cdot q^3 \\
\ldots & \ldots \\
n\text{-й член} & a\cdot q^{n-1}
\end{array}$$

234 Первый член геометрической прогрессии равен 1, а третий член равен 4. Чему равен второй член? (Укажите все варианты.)
Ответ. Второй член может быть равен не только 2, но и -2.

235 За 30 минут бактерия заполняет банку, делясь на две каждую минуту. За сколько минут заполнят банку 2 бактерии?

Будет ли последовательность

$$1, 0, 0, 0, \ldots$$

геометрической прогрессией согласно нашему определению? Формально говоря, да: каждый следующий член получается из предыдущего умножением на нуль, а мы не запретили знаменателю быть равным нулю. Хотя такая прогрессия и может показаться странной, мы не будем её запрещать (зато иногда придётся оговаривать, что знаменатель не равен 0).

236 Геометрическую прогрессию со знаменателем $q \neq 0$ написали задом наперёд. Каков знаменатель у получившейся прогрессии?

Ответ. $1/q$.

237 Из геометрической прогрессии со знаменателем q вычеркнули каждый второй член. Получится ли геометрическая прогрессия? Каков будет её знаменатель?

238 Тот же вопрос, если вычеркнули каждый третий член.

239 Первый член геометрической прогрессии равен a, а третий член равен b. Чему равен второй член?

Решение. Если второй член равен x, то знаменатель равен x/a и одновременно b/x. Отсюда $x/a = b/x$, умножая на ax, имеем $x^2 = ab$. Поэтому если $ab < 0$, задача не имеет решения (такой прогрессии не бывает); если $ab = 0$, то $x = 0$; если $ab > 0$, то $x = \pm\sqrt{ab}$ (см. ниже раздел о квадратных уравнениях).

Замечание. Наше решение не годится, если $x = 0$ или $a = 0$. Но наша формула оказывается более удачной, чем можно было бы ожидать — она верна всегда. Если, например, $a = 1$ и $b = 0$, наша формула даёт правильный ответ: $x = \sqrt{1 \cdot 0} = 0$.

240 Первый член геометрической прогрессии равен 1, а 4-й равен $a > 0$. Чему равны её 2-й и 3-й члены?

Указание. См. ниже раздел о корнях n-й степени.

Ответ. $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{a^2}$.

41. Сумма геометрической прогрессии

241 Вычислить сумму $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 + 1024$ (каждый член вдвое больше предыдущего).

Первое решение. Добавим 1:

$$
\begin{aligned}
1+1+2+4+8+\ldots+1024 &= \\
=2+2+4+8+\ldots+1024 &= \\
=4+4+8+\ldots+1024 &= \\
=8+8+\ldots+1024 &= \\
=16+\ldots+1024 &= \\
\ldots \\
=256+256+512+1024 &= \\
=512+512+1024 &= \\
=1024+1024 &= \\
&=2048
\end{aligned}
$$

Ответ. $2048-1=2047$.

Второе решение. Обозначим сумму через S:

$$S=1+2+4+8+\ldots+512+1024.$$

Тогда

$$2S=2+4+8+16+\ldots+1024+2048.$$

В последней сумме (по сравнению с предыдущей) есть лишний член 2048 и недостаёт 1. Отсюда имеем:

$$2S-S=2048-1, \quad S=2048-1=2047.$$

242 Вычислите суммы $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, $\ldots$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1024}$.

243 Первый член геометрической прогрессии равен a, а знаменатель равен q. Найдите сумму её первых n членов.

Первое решение. Искомая сумма равна

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}).$$

Вспомнив разложение на множители

$$q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1),$$

находим, что

$$1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Отсюда получаем, что искомая сумма равна

$$a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Второе решение. Обозначим искомую сумму через S:

$$S=a+aq+\ldots+aq^{n-2}+aq^{n-1}.$$

Умножим её на q:

$$qS=aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+aq^n.$$

Появился член aq^n, а член a пропал, так что

$$qS-S=aq^n-a,$$
$$(q-1)S=a(q^n-1),$$
$$S=a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

244 В решении и ответе к предыдущей задаче есть неточность. Что это за неточность?

Решение. При $q=1$ ответ не имеет смысла: выражение

$$\frac{1^n-1}{1-1}$$

не определено. В этом случае все члены прогрессии равны a и сумма равна na. Так что можно было бы сказать, что

$$\frac{q^n-1}{q-1}=n, \quad \text{если } q=1.$$

(Это шутка, но в ней есть и доля правды; вспомните о ней, когда будете изучать дифференцирование функции $f(x)=x^n$ в курсе математического анализа!)

42. Разные задачи о прогрессиях

245 Могут ли числа $1/2$, $1/3$, $1/5$ быть членами (не обязательно соседними) одной арифметической прогрессии?

Указание. Могут; в одном из вариантов её разность равна $1/30$.

246 Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

Решение. Докажем, что не могут. Предположим, что знаменатель этой прогрессии равен q. Тогда

$$3=2q^n, \quad 5=3q^m$$

для некоторых m и n. Тогда

$$q^n = \frac{3}{2}, \quad q^m = \frac{5}{3}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = q^{mn} = \left(\frac{5}{3}\right)^n,$$

откуда $3^{m+n} = 2^m \cdot 5^n$. Слева стоит нечётное число, а справа — чётное, если только $m \neq 0$. Значит $m = 0$. Но это тоже невозможно, так как в этом случае было бы

$$5 = 3q^m = 3 \cdot 1 = 3.$$

Полученное противоречие показывает, что требования $3 = 2q^n$ и $5 = 3q^m$ несовместимы. Следовательно, 2, 3 и 5 не могут быть членами одной и той же геометрической прогрессии.

247 В решении предыдущей задачи мы предполагали, что в прогрессии число 3 стоит после 2, а число 5 стоит после 3 (считая положительными числа m и n). А что будет в других случаях?

248 Могут ли первые 2 числа в арифметической прогрессии быть целыми, а все следующие числа — не целыми?

Решение. Не могут: если два соседних члена целые, то разность прогрессии — целое число, и потому все прочие члены — целые.

249 Могут ли первые 10 чисел в геометрической прогрессии быть целыми, а все остальные — не целыми?

Решение. Могут:

$$512,\ 256,\ 128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

250 Может ли второй член арифметической прогрессии быть меньше первого и третьего?

Решение. Нет: в этом случае разность прогрессии была бы одновременно положительным и отрицательным числом.

251 Тот же вопрос для геометрической прогрессии.

Решение. Да: $1,\ -1,\ 1$.

252 Может ли в бесконечной арифметической прогрессии первый член быть целым, а все следующие — не целыми?

Указание. Рассмотреть прогрессию с разностью $\sqrt{2}$ и использовать иррациональность $\sqrt{2}$ (см. ниже).

253 Может ли бесконечная арифметическая прогрессия содержать в точности 2 целых члена?

Ответ. Нет.

254 В последовательности

$$1, 3, 7, 15, 31, \ldots$$

каждый член получается из предыдущего умножением на 2 и прибавлением 1. Чему равен 1000-й член последовательности?

Ответ. $2^{1000} - 1$.

255 Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член равен сумме двух предыдущих.

Указание. См. раздел о квадратных уравнениях.

Ответ.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

256 Последовательность Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

определяется так: два первых члена равны 1, а каждый следующий есть сумма двух предыдущих. Подберите такие числа A и B, чтобы n-й член последовательности Фибоначчи равнялся

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

43. Хорошо темперированный клавир

Все знают, что одну и ту же мелодию можно играть в разных тональностях. Но что означают слова «одну и ту же»? Чтобы ответить на этот вопрос, начнём с другого: что такое мелодия? Формально говоря, мелодия — это сыгранные друг за другом звуки разной высоты. А что такое высота звука?

С точки зрения физики, звук — это колебания воздуха. Высота звука определяется частотой колебаний, т. е. количеством колебаний в секунду. Камертон, колеблющийся 440 раз в секунду (физики говорят «440 герц»; название единицы частоты дано в честь немецкого физика Генриха Герца), даёт ноту *ля* первой октавы.

На слух бóльшая частота соответствует более высоким нотам. Очень низкие и очень высокие звуки становятся уже неслышимыми. Считается, что человек может услышать звуки в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц (хотя на самом деле у разных людей эти границы могут быть разными; к старости диапазон слышимых частот уменьшается).

Низкие звуки, которые мы не слышим, иногда называют «инфразвуком», высокие — «ультразвуком». С помощью ультразвуков разговаривают друг с другом дельфины.

Частота тока в электросети — 50 герц, т. е. 50 колебаний в секунду (это относится к Европе, в Америке — 60 герц). Если из-за неисправности сетевой фон проникает в звуковой тракт магнитофона, слышно низкое гудение.

257 Натягивая струну сильнее, мы изменяем частоту колебаний. Как вы думаете, увеличивается частота или уменьшается? Попробуйте сделать это с натянутой ниткой.

258 Зажимая струну (например, гитары) пальцем, мы как бы уменьшаем её длину, почти не меняя натяжения. Как вы думаете, что происходит с высотой звука?

259 Пластинку на 33 оборота поставили на 45; как изменится частота всех записанных на ней звуков?

260 Где в рояле более низкие ноты — слева или справа? Как это связано с формой рояля?

261 Комар зудит почти как камертон. Сколько взмахов в секунду делают его крылья?

262 Как вы думаете, кто издаёт более высокий звук — комар или большая муха?

Оказывается, что на слух в первую очередь воспринимаются отношения частот соседних звуков мелодии, а не сами частоты. Лишь немногие люди с «абсолютным слухом» (далеко не у всех музыкантов он есть) могут отличить взятую на рояле ноту *ля* от ноты *соль*. Однако почти каждый человек после небольшой практики легко отличит интервал *ре* – *ля* (квинта, отношение частот *ре* : *ля* = 2 : 3) от *ре* – *соль* (кварта, отношение частот *ре* : *соль* = 3 : 4).

263 Найдите отношение частот соседних нот *соль* и *ля*, используя эти данные.

Теперь мы можем сказать, какие мелодии звучат одинаково (отличаясь лишь «тональностью») — это те, в которых одинаковы *отношения частот.*

264 Мелодия *ля* – *ми* – *ля* (нисходящая) состоит из трёх нот с частотами 440, 330 и 220. Какими будут частоты, если сыграть такую же (с теми же отношениями частот) мелодию, начиная с ноты *ми* (её частота 330)?

Решение. Согласно сказанному, нужно, чтобы

$$440 : 330 : 220 = 330 : x : y.$$

Поскольку

$$440 : 330 : 220 = 4 : 3 : 2,$$

получаем $y = 330 \cdot (1/2) = 165$, $x = 330 \cdot (3/4) = 247{,}5$. Соответствующие ноты называются *ми* – *си* – *ми*.

Посмотрев на клавиатуру рояля, легко заметить, что она «периодична»:

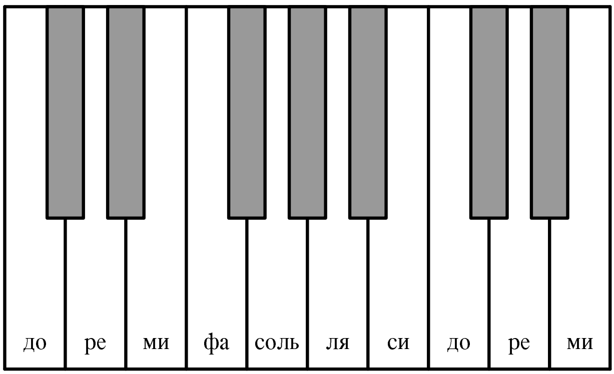
одни и те же комбинации белых и чёрных клавиш повторяются — как говорят, в «разных октавах». Отстоящие на период (на октаву) ноты называются одинаково и отличаются по частоте ровно в 2 раза. Таким образом, ноты *ля* в разных октавах имеют частоты

$$\ldots, 55, 110, 220, 440, 880, 1760, \ldots$$

образующие геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

265 Как много октав может быть у рояля, если все ноты должны быть слышны? (Считайте, что слышны звуки в диапазоне от 20 до 20000 герц.)

Геометрическую прогрессию образуют не только ноты *ля*, но и другие одноимённые ноты: ноты *соль* образуют ещё одну геометрическую прогрессию (также со знаменателем 2), ноты *фа* — третью, и так далее.



266 Глядя на клавиатуру рояля на рисунке, подсчитайте, сколько всего прогрессий получается (сколько нот в одной октаве).

Ответ. 12 (7 белых клавиш и 5 чёрных).

Названия нот: чёрная клавиша между *до* и *ре* называется *до диез* или *ре бемоль*, между *ре* и *ми* — *ре диез* или *ми бемоль*, и так далее. (Тем самым *диез* обозначает повышение звука, а *бемоль* — понижение.) Музыканты используют значок $\sharp$ для диеза и $\flat$ для бемоля. Используя их, можно записать: $\textit{до}\,\sharp = \textit{ре}\,\flat$.

267 Что должен сделать пианист, чтобы сыграть мелодию с удвоенными частотами всех нот?

Решение. Сдвинуть руку вправо на октаву и играть как обычно.

Теперь сыграем на рояле *хроматическую гамму*, нажимая все клавиши (белые и чёрные) подряд слева направо:

$$\textit{до} \to \textit{до}\,\sharp = \textit{ре}\,\flat \to \textit{ре} \to \textit{ре}\,\sharp = \textit{ми}\,\flat \to \textit{ми} \to \textit{фа} \to \textit{фа}\,\sharp =$$
$$= \textit{соль}\,\flat \to \textit{соль} \to \textit{соль}\,\sharp = \textit{ля}\,\flat \to \textit{ля} \to \textit{ля}\,\sharp = \textit{си}\,\flat \to \textit{си} \to \textit{до} \to \ldots$$

Оказывается,

> частоты нот хроматической гаммы — геометрическая прогрессия.

Мы увидим, почему так получается, чуть позже.

268 Считая, что частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию, найти знаменатель прогрессии.

Решение. Обозначим частоту ноты *до* за c, а искомый знаменатель — за q. Тогда *до*$\sharp$ = *ре*$\flat$ имеет частоту $c \cdot q$, *ре* имеет частоту $c \cdot q^2$ и так далее:

до	*до* $\sharp$	*ре*	*ре* $\sharp$	*ми*	*фа*	*фа* $\sharp$	*соль*	*соль* $\sharp$	*ля*	*ля* $\sharp$	*си*	*до*
c	cq	cq^2	cq^3	cq^4	cq^5	cq^6	cq^7	cq^8	cq^9	cq^{10}	cq^{11}	cq^{12}

Нота *до* следующей октавы имеет вдвое большую частоту, так что $cq^{12} = 2c$. Отсюда $q^{12} = 2$, $q = \sqrt[12]{2}$.

Музыканты называют интервал между соседними нотами *полутоном.* Октава состоит, таким образом, из 12 полутонов, и на каждый полутон приходится увеличение частоты в $\sqrt[12]{2}$ раз.

269 Между нотами *до* и *ре* два полутона (или один тон, как говорят музыканты). Найти отношение частот этих нот.

Решение. $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$.

Теперь объясним, почему хроматическая гамма даёт геометрическую прогрессию. Это необходимо для того, чтобы любую мелодию можно было сыграть, начиная с любой ноты. Поясним это на примере простейшей мелодии из двух нот: *до* и до диез. Сыграем её, начиная с *до диеза*: *до диез – ре*. Чтобы эти мелодии звучали одинаково, нужно, чтобы отношения частот были равны:

$$\frac{\textit{ре}}{\textit{до}\,\sharp} = \frac{\textit{до}\,\sharp}{\textit{до}}$$

А это и есть определение геометрической прогрессии.

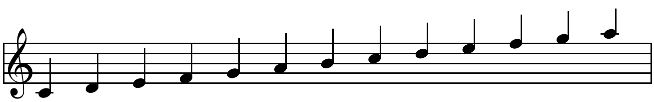
270 Для какой ноты x мелодии *до* $\to x$ и $x \to$ *до* следующей октавы (удвоенной частоты) будут звучать одинаково?

Такой интервал музыканты называют «тритоном». Он как бы делит октаву пополам, на два равных интервала.

271 Фуга до минор из первого тома «Хорошо темперированного клавира» Баха открывается темой в до миноре; затем та же тема проходит в верхнем голосе в соль миноре, но с одним изменением.

FUGA II.

Найдите изменённое место. Знаки ♯ или ♭ перед нотой означают повышение и понижение на полтона; три бемоля в начале относятся ко всем нотам *си*, *ми* и *ля*. Обозначения и названия нот:



Вероятно, внимательный читатель уже заметил несогласованность в наших объяснениях.

272 Зная, что хроматическая гамма есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, найдите отношение частот нот *ре* и *ля* (восходящая квинта).

Решение. Между *ре* и *ля* семь полутонов, поэтому отношение частот равно $(\sqrt[12]{2})^7$. С помощью калькулятора его легко найти: $(\sqrt[12]{2})^7 = 1{,}498\ldots$

Это близко к отношению $3:2$, которое мы называли раньше, но всё же не точно совпадает с ним.

273 Найдите отношение частот в восходящей кварте *ре – соль* и сравните его с отношением $4:3$, которое мы называли раньше.

Решение. $(\sqrt[12]{2})^5 = 1{,}3348\ldots$; $4/3 = 1{,}3333\ldots$

Так что же такое квинта — отношение частот $(\sqrt[12]{2})^7$ или $3:2$? В некотором смысле оба ответа правильны. Сейчас мы попробуем объяснить, что имеется в виду.

Если вы услышите одну ноту, а через минуту другую, то не почувствуете гармонии или дисгармонии. Но если сыграть ноты одну за другой, или даже обе сразу, то станет слышно, хорошо ли они звучат вместе. Скрипач, настроив одну из струн по камертону (на практике обычно по роялю аккомпаниатора или гобою в оркестре), затем настраивает вторую так: ведя смычком по обеим струнам, он регулирует натяжение второй струны, пока они не будут хорошо («чисто») звучать вместе.

В каком случае две ноты образуют гармоничный интервал? Оказывается, это бывает, когда *их частоты относятся друг к другу как небольшие целые числа*. Почему так получается, мы говорить не будем — для этого нужно знать немного тригонометрии. Вместо этого перечислим некоторые интервалы и их названия:

$2:1$	октава
$3:2$	квинта
$4:3$	кварта
$5:4$	большая терция

274 Вторая нота восходящей мелодии образует с первой октаву, а третья со второй — квинту. Как относятся друг к другу частоты третьей и первой нот?

Ответ. $3:1$.

275 Тот же вопрос, если третья нота образует со второй большую терцию.

Такие «чистые» интервалы получаются при игре на скрипке или других инструментах, где можно непрерывно менять высоту звука. На рояле чистых интервалов не получается, поскольку все отношения частот являются степенями числа $q = \sqrt[12]{2}$. Вот эти степени и близкие к ним дроби:

Название	чистые	на рояле	
малая терция	$6:5=1{,}2$	$1{,}1892\ldots$	q^3
большая терция	$5:4=1{,}25$	$1{,}2599\ldots$	q^4
кварта	$4:3=1{,}333\ldots$	$1{,}3348\ldots$	q^5
квинта	$3:2=1{,}5$	$1{,}4983\ldots$	q^7
малая секста	$8:5=1{,}6$	$1{,}5874\ldots$	q^8
большая секста	$5:3=1{,}666\ldots$	$1{,}6817\ldots$	q^9
октава	$2:1=2$	2	q^{12}

Конечно, можно попросить настройщика настраивать рояль иначе — так, чтобы некоторые интервалы были чистыми. Тогда другие интервалы станут ещё более далёкими от чистых и красивая мелодия, начатая с другой ноты, может звучать ужасно.

До 18-го столетия рояли (точнее, клавесины и органы — современный рояль появился позже) настраивали, стараясь сделать некоторые интервалы чистыми. При этом одни тональности звучали красиво, а другие (как правило, с большим числом чёрных клавиш) — ужасно, и композиторы старались их избегать, считая, что всё равно нормальный органист в них играть не сможет.

Традиция делить тональности на «хорошие» и «плохие» и писать музыку только в хороших была поколеблена великим Бахом, который написал «Хорошо темперированный клавир» — сборник прелюдий и фуг. Он состоит из двух частей. В каждой части — 24 прелюдии и фуги, по одной в каждой мажорной и минорной тональности. Неизвестно, как в точности Бах настраивал свой клавесин — была ли это равномерная темперация, когда хроматическая гамма образует геометрическую прогрессию, или какая-то не вполне равномерная. Но современные исполнители играют его на равномерно темперированных роялях, на которых все интервалы (за исключением октавы) звучат не совсем чисто — но зато одинаково во всех тональностях.

276 Достаньте запись «Хорошо темперированного клавира» и послушайте.

В заключение обсудим вот какой вопрос: а почему, собственно, в октаве именно 12 нот (полутонов)? Что мешает изготовить рояль с 13 или 7 клавишами в каждой октаве? В этом случае отношение частот соседних нот было бы $\sqrt[13]{2}$ или $\sqrt[7]{2}$. Оказывается, что тогда основные интервалы ($3:2$, $4:3$ и так далее) будут значительно менее чистыми.

277 Найдите отношения частот, если в октаве 7 (равноотстоящих) нот. Если ли среди отношений сколько-нибудь близкие к $3/2$ или $4/3$? Сравните с приведённой выше таблицей для 12 нот.

Если вы проделаете аналогичные вычисления для других чисел нот в октаве, то убедитесь, что 12 является исключительно удачным выбором — при других (не слишком больших) числах приближения заметно хуже.

Замечательно, что музыканты использовали 12-тоновую систему, ничего не зная о геометрических прогрессиях и не делая никаких вычислений — подобно тому, как пчёлы делали аккуратные шестигранные соты задолго до того, как люди установили, что именно такая форма оптимальна.

44. Сумма бесконечной прогрессии

Один из «парадоксов Зенона» (древнегреческого философа) состоит в следующем (в изложении Льва Толстого в «Войне и мире», т. 3, ч. 3):

> …Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идёт в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдёт пространство, отделяющее его от

черепахи, черепаха пройдёт впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдёт эту десятую, черепаха пройдёт одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимою.

Мы включили эту задачу в раздел о прогрессиях, поскольку отрезки, последовательно пробегаемые Ахиллесом, составляют геометрическую прогрессию

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

со знаменателем $1/10$ (за единицу мы принимаем начальное расстояние между Ахиллесом и черепахой). Общее расстояние, пройденное Ахиллесом до встречи с черепахой, есть «сумма бесконечного числа членов»

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

Педант заметил бы нам, что говорить о сумме бесконечного числа членов (не определяя этого понятия специально) не имеет смысла: прибавляя очередные члены, мы никогда не закончим. И он прав. Но мы всё же не будем оправдываться, а вместо этого найдём эту сумму разными способами.

Способ 1. Обозначим сумму через S:

$$S=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

Тогда

$$10S=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=10+S$$

откуда

$$9S=10, \qquad S=\frac{10}{9}.$$

Способ 2. Будем добавлять слагаемые по одному:

$$1+\frac{1}{10}=1{,}1$$
$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}=1{,}11$$
$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=1{,}111$$
$$\ldots$$

В итоге получится

$$1{,}111\ldots$$

что, как известно, равно $1\frac{1}{9}$ (так как $1/9=0{,}111\ldots$).

Способ 3. По формуле суммы геометрической прогрессии

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

В нашем случае $q=1/10$, а n бесконечно (если можно так выразиться). Тогда q^n бесконечно мало (ведь с ростом n число $(1/10)^n$ быстро убывает) и им можно пренебречь. Получаем формулу

$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

(мы изменили знаки в числителе и знаменателе). Вспомнив, что $q=1/10$, получим ответ $\frac{1}{0{,}9}=\frac{10}{9}$.

Способ 4. Вспомним, наконец, про Ахиллеса и черепаху. Здравый смысл подсказывает, что Ахиллес догонит черепаху, пробежав некоторое расстояние S. За это время черепаха, скорость которой в 10 раз меньше, проползёт расстояние $S/10$, и расстояние между ними уменьшится на $S-\frac{S}{10}=\frac{9}{10}S$. В начале оно равнялось 1, а в момент встречи стало нулевым, так что $(9/10)S=1$ и $S=10/9$.

Пусть теперь Ахиллес стал бегать в 10 раз медленнее черепахи. Пока он пробегает расстояние до точки старта черепахи, черепаха уползает на вдесятеро большее расстояние. Когда Ахиллес добежит до этой точки, черепаха уползёт на расстояние, в сто раз большее начального, и т. д. Получаем сумму

$$1+10+100+\ldots$$

Разумеется, Ахиллес никогда не догонит черепаху. Но тем не менее в формулу

$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

можно подставить $q=10$ и получить «равенство»

$$1+10+100+1000+\ldots=\frac{1}{1-10}=-\frac{1}{9}.$$

278 Можно ли придать в этой ситуации явно нелепому утверждению «Ахиллес догонит черепаху, пробежав $-1/9$ метра» какой-то смысл?

Указание. Можно.

45. Уравнения

Когда мы писали, к примеру, что

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

то подразумевалось, что левая и правая части равны при любых a и b. Такие равенства называют *тождествами*. Тождество можно доказать (преобразовав левую и правую части так, что они станут одинаковыми) или опровергнуть (найдя значения букв, при которых левая и правая часть не равны).

Уравнение, как и тождество, состоит из левой и правой части, соединённых знаком равенства, но задача другая: его надо *решить*, т. е. выяснить, при каких значениях букв левая и правая части равны. Эти значения называют *решениям* уравнения.

Например, уравнение

$$5x+3=2x+7$$

можно решить так: вычтя $2x+3$ из обеих частей, получим равносильное уравнение

$$3x=4$$

(*равносильность* означает, что если одно из уравнений верно для какого-то значения x, то верно и другое). Разделив обе части на 3, получим

$$x=\frac{4}{3}.$$

Ответ: уравнение $5x+3=2x+7$ имеет единственное решение: $x=4/3$.

Замечание. Уравнение

$$\frac{x+1}{x+2}=1$$

не имеет решения. (Доказательство: если $\frac{x+1}{x+2}=1$, то $x+1=x+2$, что невозможно.) Однако математики не говорят, что это уравнение «неразрешимо». Напротив, они говорят, что уравнение решено, после того как докажут, что оно не имеет решений. Таким образом, «решить уравнение» — значит найти все его решения или доказать, что решений у него нет.

Терминология здесь такова:

неизвестные	буквы, входящие в уравнение
решение уравнения	значения неизвестных, при которых левая часть равна правой
решить уравнение	найти все решения уравнения или доказать, что их нет
равносильные уравнения	уравнения, имеющие одни и те же решения

Решения уравнения с одной неизвестной называют также его *корнями*.

46. Квадратное уравнение

Квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где a, b, c — некоторые числа, а x — неизвестное.

279 Решите уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Решение. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Таким образом, уравнение имеет вид $(x-1)(x-2) = 0$; это равенство выполнено в двух случаях: если $x - 1 = 0$ (т. е. $x = 1$) или $x - 2 = 0$ (т. е. $x = 2$). *Ответ*: уравнение имеет два решения $x = 1$ и $x = 2$.

280 Решите уравнение $x^2 - 4 = 0$.

281 Решите уравнение $x^2 + 2 = 0$.

282 Решите уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$.

283 Решите уравнение $x^2 - 2x + 1 = 9$.

284 Решите уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$.

285 Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

286 Решите уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$.

287 Решите уравнение $x^2 - x - 2 = 0$.

Если в уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

коэффициент a равен 0, то оно имеет вид

$$bx + c = 0$$

и имеет единственное решение

$$x = -\frac{c}{b}.$$

288 Строго говоря, это не так: при $b = 0$ выражение c/b не имеет смысла. Как исправить эту ошибку?

Если же $a \neq 0$, то можно разделить на a и получить равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Поэтому достаточно научиться решать *приведённые* квадратные уравнения, в которых коэффициент при x^2 равен 1. Обычно такое уравнение записывают

в виде
$$x^2 + px + q = 0.$$

47. Случай $p = 0$. Квадратный корень

Начнём с уравнения
$$x^2 + q = 0.$$
Тут есть три варианта

(а) $q = 0$: уравнение $x^2 = 0$ имеет единственное решение $x = 0$.

(б) $q > 0$: решений нет, так как неотрицательное число x^2 в сумме с положительным числом q не даёт 0.

(в) $q < 0$: уравнение можно записать как $x^2 = -q$ и надо искать числа, квадрат которых равен (положительному) числу $-q$.

Факт. Для любого положительного числа c существует положительное число, квадрат которого равен c.

Определение. Положительное число, квадрат которого равен данному числу $c > 0$, называется *квадратным корнем* из c и обозначается $\sqrt{c}$.

Кроме того, $\sqrt{0}$ считают равным 0.

Мы уже встречали $\sqrt{2}$ в разложении на множители:
$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$
Теперь мы в тех же целях используем $\sqrt{c}$ вместо $\sqrt{2}$.

Как решить уравнение $x^2 = c$:
$$x^2 - c = 0;$$
$$x^2 - (\sqrt{c})^2 = 0;$$
$$(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0;$$
последнее уравнение имеет два решения $x = \sqrt{c}$ и $x = -\sqrt{c}$, и других решений нет.

Вы спросите: к чему всё это? Если $x = \sqrt{c}$, то $x^2 = c$ по определению (и если $x = -\sqrt{c}$ — тоже). Да, это так. Но наше разложение на множители доказывает также, что *других решений нет* (в самом деле, если $x \neq \pm\sqrt{c}$, то оба сомножителя не равны нулю).

Существование квадратного корня из положительного числа c можно объяснить так. Посмотрим, как меняется x^2, если x возрастает, начав с нулевого значения. Чем больше x, тем больше x^2, поэтому x^2 также возрастает. Вначале $x^2 = 0$, т. е. x^2 было меньше c. Когда x очень велико, то x^2 ещё больше, поэтому $x^2>c$ при больших x. Итак, x^2 было меньше c, а стало больше c. Следовательно, в какой-то момент оно должно было сравняться с числом c.

На самом деле в предыдущей фразе слово «следовательно» заменяет несколько глав учебника высшей математики, где это обосновывается с помощью специальной «теоремы о промежуточных значениях».

Современному человеку, привыкшему к калькулятору с клавишей извлечения корня, трудно представить себе, каким потрясением было появление квадратных корней для древних греков, которые первыми обнаружили, что квадратный корень из двух не записывается в виде дроби, числитель и знаменатель которой — целые числа. (А никаких других способов записывать числа у них не было).

289 Докажите, что

$$\sqrt{2}\neq\frac{m}{n}$$

при любых целых m и n. (Как говорят, $\sqrt{2}$ иррационален; *рациональными* числами называют дроби с целым числителем и знаменателем, *иррациональными* — числа, не представимые в виде таких дробей.)

Решение. Пусть $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$. Возможны три случая:

(а) m и n нечётны;

(б) m чётно, n нечётно;

(в) m нечётно, n чётно.

(Четвёртый случай — m и n чётны — можно не рассматривать, так как в этом случае можно сокращать m и n на 2, пока мы не придём к одному из случаев (а) – (в).)

Разберём все случаи по очереди. При этом мы используем такое свойство чётных и нечётных чисел:

- чётное число записывается в виде $2k$, где k — целое;
- нечётное число записывается в виде $2k+1$.

(а) $\sqrt{2}=\dfrac{2k+1}{2l+1}$,

$$\left(\frac{2k+1}{2l+1}\right)^2=2,$$

$$\frac{(2k+1)^2}{(2l+1)^2}=2,$$

$$(2k+1)^2=2\cdot(2l+1)^2,$$

$$4k^2+4k+1=2\cdot(2l+1)^2.$$

Противоречие: (чётное число) $+\,1=$ (чётное число).

(б) $\sqrt{2} = \dfrac{2k}{2l+1}$,

$$\left(\frac{2k}{2l+1}\right)^2 = 2,$$
$$(2k)^2 = 2\cdot(2l+1)^2,$$
$$4k^2 = 2\cdot(4l^2+4l+1),$$
$$2k^2 = 4l^2+4l+1.$$

Противоречие: (чётное число) $=$ (чётное число) $+1$.

(в) $\sqrt{2} = \dfrac{2k+1}{2l}$,

$$(2k+1)^2 = 2\cdot(2l)^2,$$
$$4k^2+4k+1 = 2\cdot(2l)^2.$$

Противоречие: (чётное число) $+1 =$ (чётное число).

Итак, все три случая невозможны.

290 Докажите, что число $\sqrt{3}$ иррационально.

Указание. Всякое целое число имеет вид $3k$, $3k+1$ или $3k+2$.

Заявляя, что мы решили уравнение $x^2-2=0$ и получили ответ «$x=\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}$», мы, в сущности, хвастаемся понапрасну. На самом деле мы не решили это уравнение, введя обозначение $\sqrt{2}$, а расписались в своём неумении его решать — ведь $\sqrt{2}$ и означает «положительное число, квадрат которого равен 2», т. е. «положительное решение уравнения $x^2-2=0$».

48. Свойства квадратных корней

291 Докажите, что

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

при $a,\ b\geqslant 0$.

Решение. Чтобы убедиться, что $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ является квадратным корнем из ab, надо — согласно определению — проверить, что его квадрат равен ab:

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2 = a\cdot b.$$

292 Докажите, что

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

при $a\geqslant 0,\ b>0$.

Следующий вопрос является традиционной ловушкой для зазевавшихся абитуриентов:

293 Верно ли, что $\sqrt{a^2}=a$?

Решение. Нет, неверно: при отрицательном a выражение $\sqrt{a^2}$ равно $-a$. Верное равенство будет таким: $\sqrt{a^2}=|a|$, где

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a<0. \end{cases}$$

294 Докажите, что (а) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$; (б) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$.

295 Что больше: $\sqrt{1001}-\sqrt{1000}$ или $1/10$?

296 Упростите выражение $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Решение. $3+2\sqrt{2}=1+2+2\sqrt{2}=1+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$.

Ответ. $1+\sqrt{2}$.

297 Ваня упростил выражение:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}}=$$
$$=\sqrt{1+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}.$$

Верно ли это?

Ответ. Так как $1-\sqrt{2}<0$, то правильный ответ $\sqrt{2}-1$.

49. Уравнение $x^2+px+q=0$

298 Решите уравнение

$$x^2+2x-6=0.$$

Решение.

$$x^2+2x-6=0;$$
$$(x^2+2x+1)-7=0;$$
$$(x+1)^2-7=0;$$
$$(x+1)^2=7;$$
$$x+1=\sqrt{7} \quad \text{или} \quad x+1=-\sqrt{7};$$
$$x=-1+\sqrt{7} \quad \text{или} \quad x=-1-\sqrt{7}.$$

Тот же приём применим к другим уравнениям.

299 Решите уравнение

$$x^2+2x-8=0.$$

300 Решите уравнение

$$x^2+3x+1=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть

$$x^2+3x+1=x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=$$
$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

Уравнение приобретает вид:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4},$$

поэтому

$$\text{либо } x+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}},\quad \text{либо } x+\frac{3}{2}=-\sqrt{\frac{5}{4}},$$

откуда

$$x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\quad\text{или}\quad x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Замечание. Ответ предыдущей задачи часто записывают как

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

301 Решите уравнение $x^2-2x+2=0$.

Решение. $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$. Теперь видно, что уравнение $(x-1)^2+1=0$ решений не имеет, так как левая часть всегда больше или равна 1.

Описанный метод называется «выделением полного квадрата». В общем виде он выглядит так:

$$x^2+px+q=0,$$
$$\left(x+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0,$$
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{p^2}{4}-q.$$

Теперь возможны три случая в зависимости от того, будет ли $\dfrac{p^2}{4}-q$ положительным, равным нулю или отрицательным.

- Если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то уравнение имеет два решения

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

- Если $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то уравнение имеет одно решение

$$x = -\frac{p}{2}.$$

- Если $\frac{p^2}{4} - q < 0$, решений нет.

Часто все три случая объединяют в формулу

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

считая, что при $\frac{p^2}{4} - q = 0$ решения x_1 и x_2 совпадают (так как под корнем стоит 0), а при $\frac{p^2}{4} - q < 0$ эта формула не даёт решений. (Впоследствии математики договорились считать, что квадратный корень из отрицательного числа существует, но мнимый.)

Число $D = \frac{p^2}{4} - q$, от знака которого зависит, есть ли корни и сколько их, называют *дискриминантом.*

50. Теорема Виета

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два (различных) корня α и β, то

$$\alpha + \beta = -p,$$
$$\alpha \cdot \beta = q.$$

Другая формулировка: если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных корня α и β, то

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Это — действительно другая запись того же утверждения, поскольку

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta,$$

а равенство многочленов $x^2 + px + q$ и $(x-\alpha)(x-\beta)$ означает, что равны их коэффициенты.

Доказательство. (Первый вариант) По формуле для корней квадратного уравнения

$$\alpha = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}, \quad \beta = -\frac{p}{2} + \sqrt{D},$$

где $D = \dfrac{p^2}{4} - q$. Или наоборот:

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{D},$$

но это не важно. Тогда

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} - \frac{p}{2} + \sqrt{D} = -p$$

и

$$\alpha\beta = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - (\sqrt{D})^2 = \\ = \frac{p^2}{4} - D = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Что и требовалось.

(Второй вариант) Будем доказывать теорему Виета во второй из приведённых формулировок. Мы знаем, что если многочлен $P(x)$ имеет корни α и β, то его можно разложить на множители:

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)R(x)$$

В нашем случае, когда многочлен P имеет степень 2, многочлен R может быть только числом (иначе правая часть имеет слишком большую степень), и число это равно 1, ведь коэффициенты при x^2 у многочленов $x^2 + px + q$ и $(x-\alpha)(x-\beta)$ одинаковы. Значит,

$$x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta),$$

что и требовалось.

302 Как обобщить теорему Виета на случай уравнения, имеющего ровно один корень? Остаются ли в силе предложенные способы доказательства?

303 (Теорема Виета для кубического уравнения) Уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

имеет три (различных) корня α, β, γ. Доказать, что

$$\alpha + \beta + \gamma = -p,$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = q,$$
$$\alpha\beta\gamma = -r.$$

304 Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите $x_1^2+x_2^2$ через p и q.

Решение. $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$.

305 Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите $(x_1-x_2)^2$ через p и q.

Первое решение. $(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2=$ $=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q$.

Второе решение. x_1-x_2 — разность между корнями; глядя на формулу, видим, что она равна $2\sqrt{D}$, так что $(x_1-x_2)^2=4D=4\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=p^2-4q$.

306 Уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$ имеет корни α, β, γ. Выразите

$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$$

через p, q, r. (Этот многочлен от p, q, r называется *дискриминантом* кубического уравнения. Как и в случае квадратного уравнения, он мал, если два корня близки друг к другу.)

307 Пусть уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2, а уравнение $y^2+ry+s=0$ имеет корни y_1 и y_2. Выразите

$$(y_1-x_1)(y_2-x_1)(y_1-x_2)(y_2-x_2)$$

через p, q, r, s. (Этот многочлен называется *результантом* двух квадратных трёхчленов; он равен нулю, если у них есть общий корень.)

Теорема Виета позволяет составить квадратное уравнение с заданными корнями. Точнее, не теорема Виета, а обратная к ней: вот её формулировка.

Теорема, обратная к теореме Виета. Если α и β — любые числа, а $p=-(\alpha+\beta)$, $q=\alpha\beta$, то уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни α и β.

Доказательство. Уравнение $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, очевидно, имеет корни α и β. Раскрыв скобки, убеждаемся, что это и есть уравнение $x^2+px+q=0$.

308 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, имеющее число $4-\sqrt{7}$ своим корнем.

Указание. Второй корень равен $4+\sqrt{7}$.

309 Коэффициенты p, q квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, имеющего два корня, целые. Докажите, что

(а) сумма квадратов его корней — целое число;

(б) сумма кубов его корней — целое число;

(в) сумма n-х степеней его корней при любом натуральном n — целое число.

310 Докажите, что квадрат числа $a+b\sqrt{2}$ (a, b — целые) также имеет вид $k+l\sqrt{2}$ для некоторых целых k, l.

311 Докажите аналогичное утверждение для $(a+b\sqrt{2})^n$ при любом целом $n>1$.

312 Число $(a+b\sqrt{2})^n$ имеет вид $k+l\sqrt{2}$. Какой вид имеет число $(a-b\sqrt{2})^n$?

313 Докажите, что существует бесконечно много целых чисел a, b, для которых $a^2-2b^2=1$.

Решение. Равенство $a^2-2b^2=1$ выполнено при $a=3$, $b=2$, поскольку $3^2-2\cdot2^2=1$. Перепишем это равенство так: $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$. Возведём обе части в n-ую степень: $(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n=1$. Число $(3+2\sqrt{2})^n$ равно $k+l\sqrt{2}$ при некоторых k и l, в этом случае $(3-2\sqrt{2})^n$ равно $k-l\sqrt{2}$. Итак,

$$(k+l\sqrt{2})(k-l\sqrt{2})=k^2-2l^2=1,$$

т. е. k, l — решение уравнения.

Например, $(3+2\sqrt{2})^2=9+8+12\sqrt{2}=17+12\sqrt{2}$. Проверим:

$$17^2-2\cdot12^2=289-2\cdot144=289-288=1.$$

314 Докажите, что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два корня разных знаков в том и только в том случае, когда $q<0$.

Решение. Если уравнение имеет корни разных знаков, то по теореме Виета коэффициент q, равный их произведению, меньше 0. Напротив, если произведение двух корней меньше 0, то корни будут разных знаков — если только корни есть. Убедиться в том, что корни есть, можно, вычислив дискриминант $D=\frac{p^2}{4}-q$: если $q<0$, то $D>0$.

Другое объяснение: если $q<0$, то значение выражения x^2+px+q при $x=0$ отрицательно. При больших x выражение становится положительным (x^2 «перевешивает» $px+q$) — значит, где-то в промежуточной точке оно обращается в нуль, и уравнение имеет положительный корень. (Аналогично и для отрицательного корня.)

51. Разложение квадратного трёхчлена на множители

315 Разложите на множители $2x^2+5x-3$.

Решение.

$$2x^2+5x-3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right).$$

Решим уравнение $x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$:

$$x_{1,2}=-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}}=-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}}=-\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4};$$

корни: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$. Поэтому (теорема Виета, стр. 94)

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=(x-(-3))\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

и

$$2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1).$$

316 Разложите на множители $2x^2+2x+\frac{1}{2}$.

317 Разложите на множители $2a^2+5ab-3b^2$.
Решение.

$$2a^2+5ab-3b^2=b^2\left(2\frac{a^2}{b^2}+5\frac{a}{b}-3\right).$$

Если обозначить $\frac{a}{b}$ через x и воспользоваться разложением $2x^2+5x-3=$ $=(x+3)(2x-1)$, это равенство можно продолжить и внести b обратно внутрь скобок, получив

$$\ldots=b^2\left(\frac{a}{b}+3\right)\left(2\frac{a}{b}-1\right)=(a+3b)(2a-b).$$

318 Докажите, что если $a^2+ab+b^2=0$, то $a=b=0$.
Решение. Пусть $a^2+ab+b^2=0$, но $a\neq 0$. (Случай $b\neq 0$ аналогичен.) Поделив уравнение на a^2, получим $1+(b/a)+(b/a)^2=0$. Видно, что число $x=\frac{b}{a}$ является корнем уравнения $1+x+x^2$, но это уравнение корней не имеет (дискриминант равен $1-4=-3<0$).

52. Формула для корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

Делим уравнение $ax^2+bx+c=0$ на a, получаем уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Таким образом, в формулу для уравнения

$$x^2+px+q=0$$

надо подставить $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$. Получаем

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Выражение

$$D = b^2 - 4ac$$

называется *дискриминантом* уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Если оно положительно, уравнение имеет два корня. Если $D = 0$, уравнение имеет один корень. Если $D < 0$, уравнение не имеет корней.

319 Мы заменили

$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

на

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

но, как мы видели, $\sqrt{4a^2}$ равно не $2a$, а $|2a|$. Почему в данном случае это не имеет значения?

320 Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Какие корни имеет уравнение $cx^2 + bx + a = 0$?

Решение. Делим $ax^2 + bx + c = 0$ на x^2; получаем

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0 \quad \text{или} \quad c \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + a = 0,$$

т. е. $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ будут корнями уравнения $cx^2 + bx + a = 0$.

Замечание. Сказанное верно, если $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Если один из корней x_1 и x_2 равен нулю, то (по теореме Виета) c равно нулю и уравнение $cx^2 + bx + a$ имеет не больше одного корня.

53. Ещё одна формула корней квадратного уравнения

Формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

зубрят миллионы школьников всех континентов. Между тем есть другая формула, ничем не хуже этой, но мало кому известная: если $c \neq 0$,

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Докажем её: если x — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $c \neq 0$, то $x \neq 0$ и $y = 1/x$ будет корнем уравнения $cy^2 + by + a = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

отсюда

$$x_{1,2} = \frac{1}{y_{1,2}} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

321 Проверьте прямым вычислением, что

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

(мы написали $\mp$ в знак того, что плюсу в левой части соответствует минус в правой и наоборот).

54. Квадратное уравнение становится линейным

Посмотрим на квадратное уравнение $ax^2 - x + 1 = 0$. По общему правилу оно имеет два корня, если его дискриминант $D = 1 - 4a > 0$, т. е. если $a < 1/4$.

322 Верно ли это?

Ответ. Неверно, так как при $a = 0$ получается уравнение $-x + 1 = 0$, имеющее единственный корень $x = 1$.

Формалист сказал бы, что при $a = 0$ наше общее правило неприменимо, так как уравнение не является квадратным. И он прав. Но всё-таки как же это так: жило-было квадратное уравнение $ax^2 - x + 1 = 0$, имело оно себе два корня, но мы начали менять a, и вдруг один корень пропал, когда a стало равно нулю. Куда же он делся?

Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим на формулу для корней из предыдущего пункта:

$$x_{1,2} = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}.$$

Если a близко к нулю, то $\sqrt{1 - 4a} \approx 1$, так что

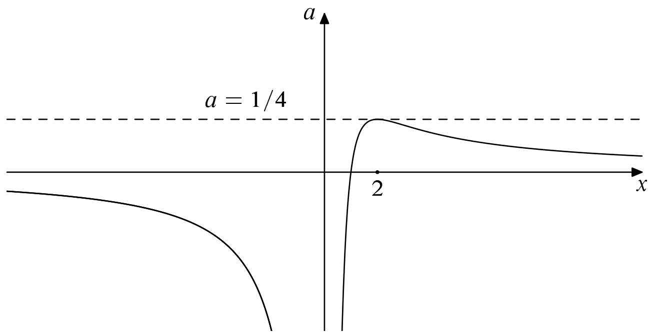
$$x_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4a}} \approx \frac{2}{1 + 1} = 1,$$

но

$$x_2 = \frac{2}{1-\sqrt{1-4a}} = \frac{2}{\text{число, близкое к нулю}},$$

т. е. очень велико. Видно, что при приближении a к нулю корень x_1 приближается к 1, а x_2 «уходит в бесконечность» — и «возвращается с другой стороны».

Как это происходит, видно на рисунке.



Здесь показаны точки $\langle x, a\rangle$, для которых $ax^2 - x + 1 = 0$, или, другими словами, график функции $a = (x-1)/x^2$. (Этот график нарисован компьютером по точкам; для наглядности выбран разный масштаб на осях.) Чтобы найти решения уравнения $ax^2 - x + 1 = 0$ при данном a, надо пересечь горизонтальную прямую, проходящую на высоте a, с данным графиком. Представим себе, что горизонтальная прямая движется сверху вниз, оставаясь горизонтальной. Вначале (при $a > 1/4$) она не пересекает графика — решений нет. Затем (при $a = 1/4$) появляется одна точка пересечения ($x = 2$), которая сразу же раздваивается (как только a становится меньше $1/4$). Один из корней уходит в положительную бесконечность, когда a приближается к 0, а затем возвращается из отрицательной бесконечности, после чего оба корня приближаются к нулю с разных сторон.

323 Что происходит с корнями уравнения $x^2 - x - a = 0$ при изменении a?

324 Что происходит с корнями уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$ при изменении a?

55. График квадратного трёхчлена

Сначала мы нарисуем график $y = x^2$, а затем получим из него графики других квадратных трёхчленов с помощью сдвигов, отражений и растяжений.

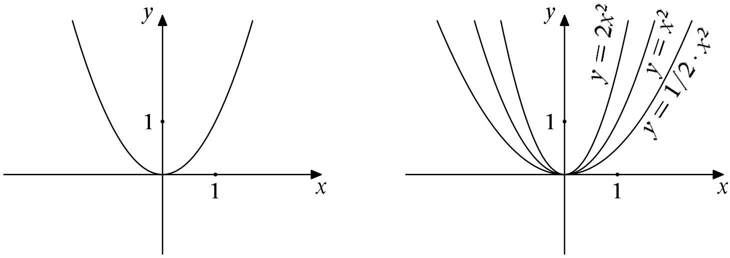
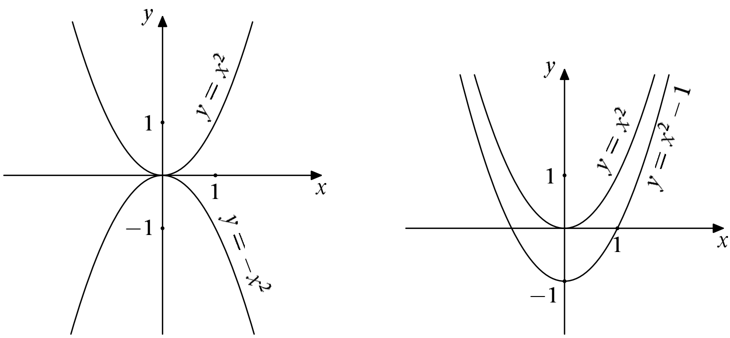


График $y=x^2$ (левый из двух) нарисован по точкам. График $y=ax^2$ (где a — постоянное число) получается из $y=x^2$ растяжением (если $a>1$) или сжатием (если $0<a<1$) вдоль вертикальной оси: чем больше a, тем больше он вытянут; чем ближе a к нулю, тем больше он сжат. На рисунке справа показаны графики $y=2x^2$ (растянутый вдвое по вертикали по сравнению с $y=x^2$) и $y=(1/2)x^2$ (вдвое сжатый).



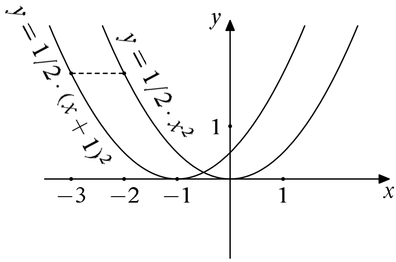
При $a<0$ график к тому же и перевёрнут (на левом рисунке показан график $y=-x^2$, симметричный графику $y=x^2$ относительно оси абсцисс).

График $y=x^2+c$ получается из $y=x^2$ сдвигом на c (вверх, если $c>0$, вниз на $|c|$, если $c<0$). На правом рисунке показан сдвиг вниз на единицу (при $c=-1$).

Аналогичным образом $y=ax^2+c$ получается из $y=ax^2$.

Сложнее понять, что соответствует сдвигу графика влево-вправо. Для примера рассмотрим график $y=\frac{1}{2}x^2$ и сравним его с графиком $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ (см. рисунок на следующей странице). Положим $x=-3$. При этом выражение $\frac{1}{2}(x+1)^2$ равно $\frac{1}{2}(-2)^2$, т. е. имеет то же значение, что $\frac{1}{2}x^2$ при $x=-2$. Вообще значение выражения $\frac{1}{2}(x+1)^2$ совпадает со значением выражения

$\frac{1}{2}x^2$, но при увеличенном на единицу значении x.



На графике это выглядит так: точки графика $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ переходят в точки графика $y = \frac{1}{2}x^2$ при сдвиге вправо на 1. Таким образом, график $y = \frac{1}{2}x^2$ получится, если график $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ сдвинуть вправо на 1. Обращая сказанное: график $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ получится, если график $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвинуть влево на 1.

Вообще, график $y = a(x+m)^2$ получается из графика $y = ax^2$ сдвигом влево на m единиц (если $m > 0$; при $m < 0$ будет сдвиг вправо на $|m|$).

Теперь мы видим, что любой график вида

$$y = a(x+m)^2 + n$$

можно получить из графика $y = x^2$ в три приёма:

(а) растянуть по вертикали в a раз — получится $y = ax^2$;

(б) сдвинуть на m влево — получится $y = a(x+m)^2$;

(в) сдвинуть на n вверх — получится $y = a(x+m)^2 + n$.

325 Найдите координаты вершины (нижней или верхней точки) графика $y = a(x+m)^2 + n$.

Ответ. Вершина находится в точке $(-m, n)$.

326 Важен ли порядок операций (а), (б) и (в)? Получим ли мы тот же самый график, если к исходному графику $y = x^2$ применить эти же операции, но, например, в обратном порядке (сначала (в), потом (б), потом (а))?

Ответ. Порядок операций важен. Мы получим $x^2 + n$ после (в), затем $(x+m)^2 + n$ после (б) и, наконец, $a(x+m)^2 + an$ после (а). Так что получится an вместо n.

327 Операции (а), (б) и (в) можно упорядочить шестью способами. Получим ли мы при этом шесть различных графиков, или некоторые из графиков совпадут?

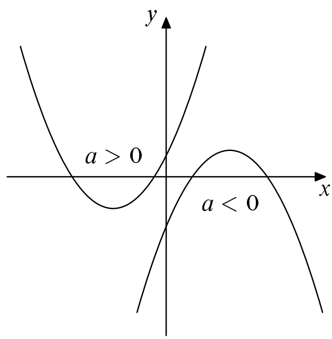
Так можно построить график любого квадратного трёхчлена, так как любой трёхчлен может быть записан как $a(x+m)^2+n$ с помощью выделения полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=$$
$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

Обозначив $\frac{b}{2a}$ за m, а $-\frac{b^2}{4a}+c$ за n, получаем требуемое.

328 Как узнать знаки чисел a, b и c, глядя на график трёхчлена $y=ax^2+bx+c$?

Ответ. При $a>0$ «рожки» направлены вверх, при $a<0$ — вниз (см. рисунок).



Знак b/a определяется положением вершины графика (слева или справа от нуля). Тем самым можно определить знак b, так как знак a уже известен. Знак c можно найти, посмотрев на место пересечения графика с осью ординат (так как ax^2+bx+c равно c при $x=0$).

Замечание. Другой способ определения знака b: если в точке пересечения с осью ординат график идёт вправо-вверх, то b положительно; если же в этой точке график идёт вправо-вниз, то b отрицательно. Это правило может быть объяснено средствами математического анализа: если функция $f(x)=ax^2+bx+c$ возрастает при значениях x, близких к 0, то её производная $f'(x)=2ax+b$ (равная b при $x=0$) положительна.

56. Квадратные неравенства

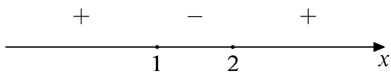
329 Решите неравенство $x^2-3x+2<0$.

«Решить неравенство» на школьном жаргоне означает: «выяснить, при каких значениях букв оно выполнено».

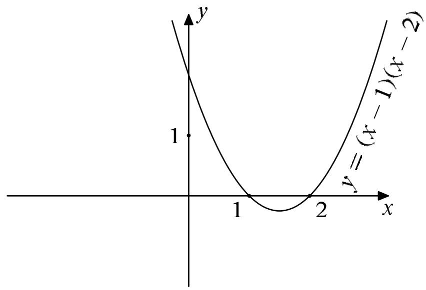
Решение. Разложим левую часть на множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Она обращается в 0 в точках $x=1$ и $x=2$; при $x>2$ оба сомножителя положительны; при переходе через точку 2 в интервал $(1,\ 2)$ один сомножитель становится отрицательным, и произведение отрицательно; при переходе через точку 1 оба сомножителя становятся отрицательными:



Ответ. Неравенство выполнено при $1<x<2$.



Этот же ответ можно получить, нарисовав график квадратного трёхчлена $y=(x-1)(x-2)$. В точках $x=1$ и $x=2$ этот график пересекает ось абсцисс; рожки параболы направлены вверх.

57. Максимум и минимум квадратного трёхчлена

$\boxed{330}$ Сумма двух чисел равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их произведение?

Первое решение. Если одно число обозначить через x, то второе будет равно $1-x$, а их произведение равно $x(1-x)=x-x^2$. Трёхчлен $-x^2+x$ направлен рогами вниз (при x^2 стоит минус), а корни его $x=0$ и $x=1$, так что вершина, находясь посередине между корнями, имеет абсциссу $x=\frac{1}{2}$, а максимальное значение равно $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Ответ. Максимальное значение равно $\frac{1}{4}$.

Второе решение. Обозначим одно число за $\frac{1}{2} + x$, тогда второе будет равно $\frac{1}{2} - x$, а их произведение равно

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{4} - x^2,$$

так что максимальное значение достигается, когда $x = 0$ (оба числа равны $\frac{1}{2}$).

$\boxed{\mathbf{331}}$ Докажите, что квадрат имеет максимальную площадь среди всех прямоугольников данного периметра.

$\boxed{\mathbf{332}}$ Докажите, что квадрат имеет минимальный периметр среди всех прямоугольников данной площади.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

$\boxed{\mathbf{333}}$ Какое наименьшее значение может принимать выражение $x + \frac{2}{x}$ при положительных x?

Первое решение. Посмотрим, при каких $c > 0$ число c может быть значением выражения $x + \frac{2}{x}$. Другими словами, мы хотим узнать, при каких с уравнение

$$x + \frac{2}{x} = c$$

имеет решение. Это уравнение можно умножить на x и интересоваться, при каких c уравнение

$$x^2 + 2 = cx$$

имеет решение. (Это решение не может быть нулём, так как $0^2 + 2 \neq c \cdot 0$, поэтому на x можно будет поделить).

Уравнение $x^2 + 2 = cx$ или, что то же, $x^2 - cx + 2 = 0$ имеет решение, когда его дискриминант

$$D = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2$$

неотрицателен, т. е. когда $\left(\frac{c}{2}\right)^2 \geqslant 2$, т. е.

$$\frac{c}{2} \geqslant \sqrt{2} \quad \text{или} \quad \frac{c}{2} \leqslant -\sqrt{2}.$$

Итак, уравнение $x + \frac{2}{x} = c$ имеет решение при $c \geqslant 2\sqrt{2}$ и $c \leqslant -2\sqrt{2}$. Наименьшее значение выражения $x + \frac{2}{x}$ при положительных x равно $2\sqrt{2}$.

Второе решение. x и $\frac{2}{x}$ — стороны прямоугольника площади 2, его полупериметр равен $x + \frac{2}{x}$. Он будет минимален, когда прямоугольник —

квадрат (см. предыдущую задачу), т. е. когда $x = \dfrac{2}{x}$, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$. При таком x значение выражения $x + \dfrac{2}{x}$ равно $2\sqrt{2}$.

58. Биквадратные уравнения

334 Решите уравнение $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Решение. Если x — решение этого уравнения, то $y = x^2$ является решением уравнения $y^2 - 3y + 2 = 0$ — и наоборот. Это квадратное (относительно y) уравнение имеет корни

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

т. е. $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

Поэтому решениями исходного уравнения будут те x, для которых $x^2 = 1$ или $x^2 = 2$, так что оно имеет 4 решения:

$$x = 1, \quad x = -1, \quad x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}.$$

Подобным образом можно решить любое *биквадратное* уравнение (так называют уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$).

335 Укажите примеры биквадратных уравнений (если они существуют): (а) не имеющих решения; (б) имеющих ровно 1 решение; (в) имеющих 2 решения; (г) имеющих 3 решения; (д) имеющих 4 решения; (е) имеющих 5 решений.

(*Указание.* В одном из случаев такого примера нет.)

336 Сколько решений может иметь уравнение

$$ax^6 + bx^3 + c = 0?$$

Указание. Не забудьте, что a, b или c могут равняться нулю.

Ответ. 0, 1, 2 или бесконечно много.

337 Тот же вопрос для уравнения

$$ax^8 + bx^4 + c = 0.$$

59. Возвратные уравнения

338 Решите уравнение

$$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Решение. Заметим, что $x=0$ не является корнем. Поэтому мы ничего не потеряем, если разделим это уравнение на x^2:

$$2x^2+7x+4+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

Теперь сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами и противоположными степенями x:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

После этого заметим, что $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ можно выразить через $x+\dfrac{1}{x}$:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

откуда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

Таким образом, если x является решением исходного уравнения, то $y=x+\dfrac{1}{x}$ является решением уравнения

$$2(y^2-2)+7y+4=0,$$

которое можно переписать так:

$$2y^2-4+7y+4=0,$$
$$2y^2+7y=0,$$
$$y(2y+7)=0,$$

откуда $y=0$ или $y=-7/2$. Поэтому решениями исходного уравнения будут те x, для которых

$$x+\frac{1}{x}=0 \quad \text{или} \quad x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2}.$$

Решим эти два уравнения:

$$x+\frac{1}{x}=0\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1 \quad (\text{решений нет});$$
$$x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2} \text{ означает (мы знаем, что } x\neq 0)$$
$$x^2+1=-\frac{7}{2}x, \quad \text{или} \quad x^2+\frac{7}{2}x+1=0;$$

корни:

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-4}}{2}=\frac{-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}}{2}.$$

Ответ. Уравнение имеет два решения

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{33}}{4}, \quad x_2 = \frac{-7+\sqrt{33}}{4}.$$

60. Как завалить на экзамене. Советы экзаменатору

Посвящается приёмной комиссии мехмата МГУ

Есть много разных приёмов. Вот один из них.

1. Возьмём квадратное уравнение — желательно с нецелыми корнями, например,

$$3x^2 + 2x - 10 = 0$$

(корни $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+120}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{124}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{31}}{3}$).

2. Подставим вместо x какой-нибудь многочлен второй степени, например, $x = y^2 + y - 1$:

$$x^2 = (y^2+y-1)(y^2+y-1) = y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y + 1,$$
$$3x^2 + 2x - 10 = (3y^4 + 6y^3 - 3y^2 - 6y + 3) + (2y^2 + 2y - 2) - 10 = \\ = 3y^4 + 6y^3 - y^2 - 4y - 9.$$

3. Предложим экзаменуемому решить уравнение

$$3y^4 + 6y^3 - y^2 - 4y - 9 = 0.$$

4. Подождём $10-15$ мин.

5. Скажем ему, что его время истекло, и поставим двойку.

6. Когда экзаменуемый скажет, что задача сложная или что уравнения четвёртой степени не входят в школьную программу, разъясним ему, что он ошибается и что это уравнение легко сводится к квадратному:

$$3y^4 + 6y^3 - y^2 - 4y - 9 = \\ = (3y^4 + 3y^3 - 3y^2) + (3y^3 + 3y^2 - 3y) - (y^2 + y - 1) - 10 = \\ = 3y^2(y^2+y-1) + 3y(y^2+y-1) - (y^2+y-1) - 10 = \\ = 3(y^2+y)(y^2+y-1) - (y^2+y-1) - 10.$$

Если теперь $y^2 + y - 1$ обозначить за x, то получим

$$3(x+1)x - x - 10 = 0,$$
$$3x^2 + 3x - x - 10 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{31}}{3}$$

и осталось решить два квадратных уравнения

$$y^2+y-1=\frac{-1+\sqrt{31}}{3} \quad \text{и} \quad y^2+y-1=\frac{-1-\sqrt{31}}{3}.$$

Вот, дескать, и всё!

Другой — не менее эффективный — рецепт таков: возьмите два квадратных уравнения с нецелыми корнями, например,

$$x^2+x-3=0 \quad \text{и} \quad x^2+2x-1=0$$

и перемножьте их:

$$(x^2+x-3)(x^2+2x-1)=x^4+3x^3-2x^2-7x+3=0.$$

Получившееся уравнение ($x^4+3x^3-2x^2-7x+3=0$) можно смело давать абитуриенту. Не забудьте только бумажку с исходными уравнениями, иначе на апелляции вы попадёте в неловкое положение.

61. Корни

Квадратный корень из числа a — это число, квадрат которого равен a. (Поправка педанта: число a должно быть неотрицательно и квадратный корень — тоже.) Аналогично, кубический корень из числа $a>0$ — это неотрицательное число x, для которого $x^3=a$. Так же определяются и корни более высоких степеней. Корень n-й степени из a обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Определение. Корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число x, для которого $x^n=a$. (Мы предполагаем, что n — положительное целое число).

В связи с этим определением могут возникнуть некоторые вопросы.

Вопрос. А что, если таких чисел несколько?

Ответ. Это невозможно. Чем больше положительное число x, тем больше его n-ая степень x^n (если в произведении n положительных сомножителей увеличить все сомножители, то произведение увеличится). Поэтому два разных числа не могут иметь одинаковую n-ю степень.

Вопрос. А вдруг числа x, для которого $x^n=a$, вообще нет?

Ответ. Подобный вопрос уже возникал при обсуждении квадратных корней. Здесь ситуация совершенно аналогична.

Вопрос. Если n чётно, то число $-\sqrt[n]{a}$ также в n-ой степени равно a. Почему мы выбрали именно положительное из двух чисел?

Ответ. Так принято.

Вопрос. Если n нечётно, то и при отрицательных a можно найти такое x, что $x^n = a$. Например, $(-2)^3 = -8$. Почему же мы не говорим, что кубический корень из -8 равен -2?

Ответ. Можно было бы так и считать, но для простоты мы этот случай исключаем.

339 Что больше: $\sqrt[10]{2}$ или $1{,}2$?

340 Вычислите $\sqrt[7]{0{,}999}$ с точностью до трёх знаков после запятой.

341 Что больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?

342 Что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[4]{4}$?

343 Что больше: $\sqrt{\sqrt{2}}$ или $\sqrt[4]{2}$?

344 Что такое $\sqrt[1]{a}$ по нашему определению?
Ответ. $\sqrt[1]{a} = a$ (для $a > 0$).

Теперь мы докажем некоторые свойства корней.

345 Докажите, что

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

при $a > 0$, $b > 0$.

Решение. Согласно определению, нужно доказать, что

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab.$$

По правилу

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n$$

получаем (положив $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$)

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

346 Докажите, что

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

при $a > 0$, $b > 0$.

Указание. Можно использовать равенство

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

или предыдущую задачу.

347 Докажите, что

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

при $a>0$.

348 Докажите, что

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$$

при a, b, $c>0$.

Решение.

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{(ab)c}=\sqrt[n]{ab}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Замечание. Аналогичное утверждение верно не только для трёх чисел, но и для четырёх, пяти и т. д.

349 Докажите, что

$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

при $a>0$.

Решение.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{раз}}}=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m\ \text{раз}}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

Здесь использовано утверждение предыдущей задачи.

350 В решении задачи 349 рассмотрены не все возможности. Восполните пробел.

Решение. Мы предполагали, что $m>2$. При $m=0$ и 1 утверждение задачи почти очевидно. Проверим его для отрицательных m. Пусть, например, $m=-3$. Тогда

$$\sqrt[n]{a^{-3}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^3}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^3}}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^3}=(\sqrt[n]{a})^{-3}.$$

351 Докажите, что

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

для любых положительных целых m и n и для любого неотрицательного a.

Решение. Согласно определению, надо проверить, что

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=a.$$

В самом деле,

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n} = (\sqrt[n]{a})^{n} = a.$$

352 Докажите, что

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$$

$(m,\ n \geqslant 1,\ a \geqslant 0)$.

353 Докажите, что

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

(n — положительное целое, $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$).

62. Степень с дробным показателем

Следующее мнемоническое правило может помочь запомнить свойства корней: *эти свойства* (задачи 345 – 353) *получаются из свойств степеней, если считать, что*

$$\sqrt{a} = a^{1/2}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{1/3}, \quad \sqrt[4]{a} = a^{1/4}$$

и т. д.

Например, основное свойство корня (его определение)

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

теперь переписывается в виде

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a$$

и становится частным случаем правила

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

при $p = 1/n,\ q = n$. Свойство

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

теперь запишется в виде

$$\left(a^{1/m}\right)^{1/n} = a^{1/mn}$$

и получается при $p = 1/m,\ q = 1/n$.

354 Получите этим способом все указанные в задачах 345 – 353 свойства корней (используя свойства степеней).

Иметь дело с мнемоническими правилами всегда несколько унизительно, поэтому давайте поднимем ранг этого правила и будем считать его *определением* степени с показателем $1/n$ (раньше мы рассматривали степени только с целым показателем).

Определение. При целом $n \geqslant 1$ и $a \geqslant 0$ полагаем

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Сразу же видно, что этого определения мало. Например, хотелось бы написать, что

$$a^{1/3} \cdot a^{1/3} = a^{1/3+1/3} = a^{2/3}$$

(частный случай правила $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ при $m = n = 1/3$). Но мы не знаем, что такое $a^{2/3}$. Чтобы восполнить этот пробел, определим $a^{2/3}$ как $(a^{1/3})^2$ и вообще $a^{m/n}$ как $(a^{1/n})^m$ или, другими словами, как $(\sqrt[n]{a})^m$.

Определение. Для целого m и целого положительного n определим $a^{m/n}$ так:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Внимательный читатель сразу же отметит подвох в этом определении. Например,

$$a^{10/15} \quad \text{определено как} \quad (\sqrt[15]{a})^{10}$$

в то время как

$$a^{2/3} \quad \text{определено как} \quad (\sqrt[3]{a})^2$$

Между тем $10/15 = 2/3$ и тем самым $a^{10/15}$ обязано равняться $a^{2/3}$. Чтобы наше определение было корректным, необходимо, чтобы

$$(\sqrt[15]{a})^{10} = (\sqrt[3]{a})^2.$$

355 Проверьте это.

Решение.

$$(\sqrt[3\cdot 5]{a})^{2\cdot 5} = \left(\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}\right)^5\right)^2 = (\sqrt[3]{a})^2.$$

356 Проверьте, что при сокращении общих множителей в дроби m/n значение выражения $a^{m/n}$ согласно нашему определению не меняется.

Указание. См. предыдущую задачу, где в дроби $10/15$ сократился общий множитель 5.

Теперь свойства степеней, которые мы знали для целых показателей, надо проверить для показателей, равных отношению двух целых чисел (рациональных показателей).

357 Докажите, что
$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$
для любых дробей p и q.

Решение. Пусть, например, $p = 2/5$, $q = 3/7$ (в общем случае рассуждения аналогичны). Надо проверить, что
$$a^{2/5} \cdot a^{3/7} = a^{2/5+3/7}.$$
Приведём дроби $2/5$ и $3/7$ к общему знаменателю:
$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}, \qquad \frac{3}{7} = \frac{15}{35}.$$
Мы уже знаем, что
$$a^{2/5} = a^{14/35}, \qquad a^{3/7} = a^{15/35},$$
поэтому
$$a^{2/5} \cdot a^{3/7} = a^{14/35} \cdot a^{15/35} = (\sqrt[35]{a})^{14} \cdot (\sqrt[35]{a})^{15} =$$
$$= (\sqrt[35]{a})^{14+15} = a^{(14+15)/35} = a^{14/35+15/35} = a^{2/5+3/7}.$$

358 Докажите, что
$$(ab)^{m/n} = a^{m/n} \cdot b^{m/n}.$$

359 Докажите, что
$$(a^p)^q = a^{pq}$$
для любых рациональных показателей p и q.

Решение. Сначала пусть q — целое, а $p = m/n$.
$$(a^p)^q = (a^{m/n})^q = ((\sqrt[n]{a})^m)^q = (\sqrt[n]{a})^{mq} = a^{mq/n} = a^{pq}.$$
Пусть теперь $q = 1/k$ при некотором целом k, а $p = m/n$. Тогда
$$(a^p)^q = (a^{m/n})^{1/k} = \sqrt[k]{a^{m/n}} = \sqrt[k]{(\sqrt[n]{a})^m}.$$
Обозначив $\sqrt[n]{a}$ через b, продолжим:
$$\ldots = \sqrt[k]{b^m} = (\sqrt[k]{b})^m = \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = (\sqrt[kn]{a})^m = a^{m/kn} = a^{(m/n)\cdot(1/k)} = a^{pq}.$$
Наконец, для произвольного $q = l/k$ имеем
$$(a^p)^q = (a^p)^{l/k} = (\sqrt[k]{a^p})^l = ((a^p)^{1/k})^l = (a^{p/k})^l = a^{pl/k} = a^{pq}.$$
Сначала мы воспользовались тем, что
$$(a^p)^{1/k} = a^{p\cdot 1/k},$$

и затем использовали, что

$$(a^{p/k})^l = a^{p/k\cdot l}.$$

(Эти два частных случая интересующего нас равенства мы разобрали заранее.)

360 Докажите, что при $a > 1$ значение a^p увеличивается с ростом p, а при $0 < a < 1$ значение a^p уменьшается с ростом p.

Указание. Приведите сравниваемые значения показателя к общему знаменателю. Не забудьте, что p может быть и отрицательным (и в этом случае утверждение задачи остаётся верным).

Эта задача открывает возможность определения a^x и для чисел x, не являющихся отношениями двух целых. Например, число

$$2^{\sqrt{2}}$$

можно пытаться определить как число, большее всех чисел вида $2^{p/q}$ при $p/q < \sqrt{2}$ и меньшее всех чисел вида $2^{p/q}$ при $p/q > \sqrt{2}$. (То, что такое число существует и единственно, доказывается в курсе математического анализа.)

361 Как бы вы определили $\sqrt[1/2]{a}$ или $\sqrt[-1/2]{a}$?

Ответ. Естественно считать, что $\sqrt[1/2]{a} = a^2$, $\sqrt[-1/2]{a} = a^{-2}$.

63. Доказательства числовых неравенств

Все приводимые в этом разделе неравенства можно в принципе было бы доказать, вычислив левую и правую части. Однако это, как правило, не наилучший способ.

362 Докажите, что

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200} < 1.$$

Решение. Каждый из 100 членов суммы находится между $\frac{1}{200}$ и $\frac{1}{100}$. Если бы все они равнялись $\frac{1}{200}$, то сумма равнялась бы $\frac{1}{2}$; если бы все они равнялись $\frac{1}{100}$, то в сумме они дали бы 1.

363 Докажите, что

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} < 1.$$

Решение. Левое неравенство получится, если сгруппировать

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right)$$

(первая скобка равна $1/2$, а все следующие положительны).

Правое получится, если записать

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{198}-\frac{1}{199}\right)-\frac{1}{200}.$$

Замечание. На самом деле две предыдущие задачи говорят об одном и том же, так как

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$$

$\boxed{\textbf{364}}$ Убедитесь в этом.

Решение.

$$\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{200}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{200}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{200}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{200}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}.$$

$\boxed{\textbf{365}}$ Докажите, что $(1{,}01)^{100}\geqslant 2$.

Первое решение.

$$(1{,}01)^{100}=\underbrace{(1+0{,}01)(1+0{,}01)\ldots(1+0{,}01)}_{\text{100 сомножителей}}$$

Что получится, если раскрыть скобки? Один член будет равен 1 (произведение всех единиц). Ещё будут члены, которые получатся, если в одной скобке взять $0{,}01$, а во всех остальных — по единице. Таких членов будет 100, а каждый из них равен $0{,}01$. Будут и другие члены (равные $0{,}01^2$, $0{,}01^3$ и т. п.), но уже эти в сумме дают

$$1+100\cdot 0{,}01=2.$$

Второе решение.

$$\begin{aligned}
1{,}01^2 &= 1{,}0201 > 1{,}02;\\
1{,}01^3 &= 1{,}01^2 \cdot 1{,}01 > 1{,}02 \cdot 1{,}01 = (1+0{,}02)(1+0{,}01) =\\
&= 1 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}02 \cdot 0{,}01 > 1{,}03;\\
1{,}01^4 &= 1{,}01^3 \cdot 1{,}01 > 1{,}03 \cdot 1{,}01 = (1+0{,}03)(1+0{,}01) =\\
&= 1 + 0{,}03 + 0{,}01 + 0{,}03 \cdot 0{,}01 > 1{,}04;\\
1{,}01^5 &> 1{,}05;\\
1{,}01^6 &> 1{,}06;\\
&\ldots\\
1{,}01^{99} &> 1{,}99;\\
1{,}01^{100} &> 2.
\end{aligned}$$

366 Докажите, что

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 2.$$

Решение.

$$\begin{gathered}
\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},\\
\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\\
\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\\
\ldots\\
\frac{1}{100^2} < \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.
\end{gathered}$$

Отсюда (складываем все неравенства)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{100^2} <$$
$$< 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right).$$

Пары противоположных членов ($-1/2$ и $1/2$, $-1/3$ и $1/3$) сокращаются, и остаётся $1 + 1 - \frac{1}{100}$, что меньше 2.

367 Что больше: 1000^{2000} или 2000^{1000}?

368 Докажите, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1\,000\,000} < 20.$$

Докажите, что при некотором n

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>20.$$

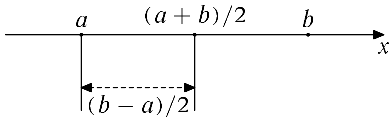
Указание. В выражении

$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

каждая скобка не меньше $1/2$ и не больше 1 (см. выше).

64. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Средним арифметическим чисел a и b называется их полусумма $\frac{a+b}{2}$. Название объясняется тем, что точка числовой прямой находится посередине между точками a и b:



369 Проверьте это.

Решение. Пусть, например, $a<b$, т. е. точка a левее точки b. Расстояние между ними равно $b-a$; прибавив к a половину этого расстояния, получим

$$a+\frac{b-a}{2}=\frac{2a+b-a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

370 Среднее арифметическое чисел 1 и a равно 7. Чему равно a?

Средним геометрическим неотрицательных чисел a и b называют квадратный корень из их произведения: $\sqrt{ab}$. (Ограничение случаем неотрицательных a и b связано с тем, что при разных знаках a и b произведение ab отрицательно и квадратный корень не извлекается. Если же оба числа отрицательны, то $\sqrt{ab}$ определён, но было бы странно называть положительное число $\sqrt{ab}$ средним между отрицательными числами a и b.)

371 Среднее геометрическое чисел 1 и a равно 7. Чему равно a?

372 Чему равна сторона квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника со сторонами a и b? Чему равна сторона квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами a и b?

$\boxed{373}$ Бывают арифметические и геометрические прогрессии, а также арифметическое и геометрическое средние. Случайно ли совпадение терминов?

Решение. Три числа

$$a,\ [\text{среднее арифметическое } a \text{ и } b],\ b$$

составляют арифметическую прогрессию, а три числа

$$a,\ [\text{среднее геометрическое } a \text{ и } b],\ b$$

составляют геометрическую прогрессию.

Ещё один способ определить среднее арифметическое и геометрическое: среднее арифметическое на столько же больше a, насколько меньше b; среднее геометрическое во столько же раз больше a, во сколько раз меньше b.

65. Среднее геометрическое не больше среднего арифметического

$\boxed{374}$ Докажите, что для неотрицательных чисел a и b всегда выполнено неравенство:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Решение. Чтобы сравнить неотрицательные числа $\sqrt{ab}$ и $\frac{a+b}{2}$, сравним их квадраты и докажем, что

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Другими словами, надо проверить, что $4ab \leqslant (a+b)^2$, или

$$4ab \leqslant a^2 + 2ab + b^2,$$
$$0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2.$$

В правой части последнего неравенства читатель легко узнает квадрат разности $(a-b)^2$, что и завершает доказательство (квадрат всегда неотрицателен).

$\boxed{375}$ В каких случаях среднее арифметическое равно среднему геометрическому?

Решение. Как видно из решения предыдущей задачи, среднее арифметическое чисел a и b равно их среднему геометрическому в том и только том случае, если $(a-b)^2 = 0$, т. е. $a = b$.

66. Задачи на максимум и минимум

376 (а) Каково максимально возможное значение произведения двух неотрицательных чисел, сумма которых равна c? (б) Каково минимально возможное его значение?

Решение. (а) Среднее арифметическое их равно $c/2$, так что их среднее геометрическое не превосходит $c/2$, а его квадрат (т. е. произведение чисел) не превосходит $c^2/4$. Это максимально возможное значение достигается, когда числа равны.

(б) Минимально возможное значение равно 0. Так будет, если одно из чисел равно 0, а другое равно c.

377 Каковы максимально и минимально возможные значения суммы двух неотрицательных чисел, произведение которых равно $c > 0$?

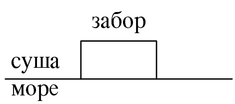
Решение. Среднее геометрическое этих чисел равно $\sqrt{c}$, поэтому их полусумма не меньше $\sqrt{c}$, а сумма не меньше $2\sqrt{c}$. Это значение достигается, если числа равны.

Максимального значения не существует — сумма может быть сколь угодно велика, если одно число близко к нулю, а другое велико.

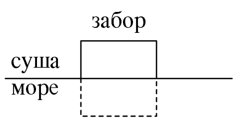
Замечание. Как вы помните, мы уже встречали две последние задачи, когда говорили о минимальном и максимальном значениях квадратичного многочлена.

378 Какова максимальная возможная площадь прямоугольного участка, если длина забора 120 м?

379 Какова максимальная возможная площадь прямоугольного участка пляжа, изображённого на рисунке, если длина забора 120 м? (От моря пляж не отгорожен!)



Решение. Мысленно возведём симметричный забор в море:



Периметр полученного прямоугольника будет 240, а площадь его будет максимальной, когда это квадрат со стороной 60, и равна 3600. Реальная площадь на берегу вдвое меньше и равна 1800, когда забор состоит из кусков длиной 30, 60 и 30.

380 Каково максимально возможное значение произведения ab, если a и b — неотрицательные числа, для которых $a+2b=3$?

Решение. Произведение чисел a и b максимально, когда максимально произведение чисел a и $2b$ — а оно максимально, когда эти числа равны, т. е. $a=2b=3/2$. Итак, максимальное значение произведения ab равно

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}.$$

67. Геометрические иллюстрации

Некоторые из доказанных неравенств можно пояснить рисунками. Приведём два примера.

Первый пример. Неравенство

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$$

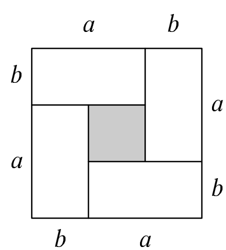
перепишем в виде

$$2\sqrt{ab}\leqslant a+b$$

и, возведя в квадрат, получим

$$4ab\leqslant(a+b)^2.$$

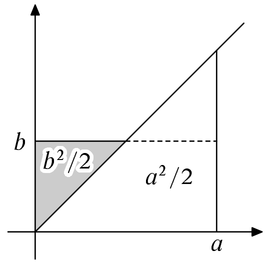
Это подтверждается тем, что четыре прямоугольника $a\times b$ можно поместить в квадрат со стороной $a+b$ и при этом ещё останется свободное место в середине, если $a\neq b$ (см. рисунок).



381 Сколько останется места?

Поучительно сравнить результат этой задачи с алгебраическим доказательством неравенства о средних.

Второй пример. Проведём биссектрису прямого угла и построим два равнобедренных прямоугольных треугольника с катетами a и b.



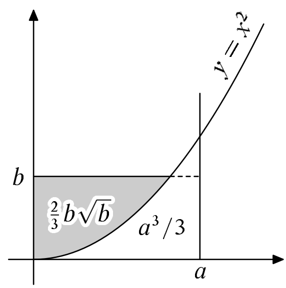
Их площади равны $a^2/2$ и $b^2/2$. Вместе эти треугольники покрывают прямоугольник $a \times b$, поэтому

$$ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Чтобы увидеть в этом неравенстве неравенство о средних, подставим $\sqrt{c}$ и $\sqrt{d}$ вместо a и b:

$$\sqrt{c} \cdot \sqrt{d} \leqslant \frac{c + d}{2}.$$

Замечание. Вместо биссектрисы можно было бы провести другие линии, что-нибудь такое:



Так можно доказать другие неравенства — надо только уметь вычислять площади «криволинейных треугольников». Например, для кривой $y = x^2$ получаем (как подтвердят знатоки математического анализа) «треугольники» площадей $a^3/3$ и $\frac{3}{2}b\sqrt{b}$, и неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3}b\sqrt{b},$$

которое выполняется для любых неотрицательных a и b.

68. Средние многих чисел

Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c определяется как $\frac{a+b+c}{3}$; среднее геометрическое — как $\sqrt[3]{abc}$ (в определении среднего геометрического мы вновь предполагаем, что a, b, $c \geqslant 0$). Аналогичные определения даются и для любого количества чисел: *среднее арифметическое n* чисел $a_1, \ldots, a_n$ определяется как

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

среднее геометрическое неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ как

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом верно для любого количества чисел:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Как и в разобранном ранее случае двух чисел, равенство возможно, только если все числа равны.

Прежде чем доказывать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, извлечём из него некоторые следствия.

382 Используя это неравенство, докажите, что если $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, для которых

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n,$$

то

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant 1.$$

Решение.

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant n \Rightarrow \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant 1 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant 1.$$

В двух следующих задачах также предлагается использовать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (без доказательства).

383 Докажите, что произведение n неотрицательных чисел с заданной суммой максимально, когда эти числа равны.

384 Докажите, что сумма n неотрицательных чисел с заданным произведением минимальна, когда эти числа равны.

Существуют разные доказательства неравенства о средних арифметическом и геометрическом, но наиболее естественное использует математический анализ (понятие производной). Мы обойдёмся без него — но поневоле это будет выглядеть как трюк.

385 Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для $n = 4$.

Решение. Нам даны 4 неотрицательных числа a, b, c, d. Будем менять их, сохраняя неизменной их сумму (и, следовательно, среднее арифметическое). При этом их произведение будет меняться — и мы будем следить за тем, как именно. Наше доказательство проходит в несколько этапов.

1. Заменим a и b на два числа, каждое из которых равно $\dfrac{a+b}{2}$:

$$a,\, b,\, c,\, d \Rightarrow \frac{a+b}{2},\, \frac{a+b}{2},\, c,\, d.$$

Сумма не изменится. Произведение возрастёт (или останется прежним, если $a = b$): сомножители c и d не меняются, а произведение двух чисел с заданной суммой $(a + b)$ максимально, когда числа равны.

2. То же самое сделаем с c и d:

$$\frac{a+b}{2},\, \frac{a+b}{2},\, c,\, d \Rightarrow \frac{a+b}{2},\, \frac{a+b}{2},\, \frac{c+d}{2},\, \frac{c+d}{2}.$$

Сумма не изменится, произведение снова увеличится (или останется прежним, если $c = d$).

3. Мы выравняли числа в первой паре и во второй паре, теперь будем выравнивать между парами:

$$\frac{a+b}{2},\, \frac{a+b}{2},\, \frac{c+d}{2},\, \frac{c+d}{2} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{a+b}{2},\, \frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{c+d}{2}.$$

4. Теперь осталось выравнять второе и четвёртое числа:

$$\frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{a+b}{2},\, \frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{c+d}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{a+b+c+d}{4},\, \frac{a+b+c+d}{4}.$$

В конечном итоге мы заменили числа

$$a,\, b,\, c,\, d$$

на числа

$$S,\, S,\, S,\, S,$$

где $S = (a + b + c + d)/4$ — среднее арифметическое, и их произведение возросло (или осталось прежним):

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant S \cdot S \cdot S \cdot S$$

или

$$\sqrt[4]{abcd} \leqslant S.$$

Что и требовалось доказать.

386 Докажите, что неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим четырёх чисел превращается в равенство, только если все числа равны.

Указание. Из решения предыдущей задачи видно, что равенство возможно, лишь если на всех стадиях описанного там процесса наши числа фактически не изменялись.

387 Как доказать неравенство о среднем арифметическом и геометрическом для $n = 8$?

Решение. Точно так же: сначала выравниваем числа в четырёх парах, затем между парами — и получается две четвёрки, затем выравниваем все восемь.

388 Докажите неравенство о среднем арифметическом и геометрическом для $n = 3$.

Решение. Из трёх чисел a, b, c сделаем четыре, добавив среднее геометрическое: получатся числа

$$a,\ b,\ c,\ \sqrt[3]{abc},$$

к которым применим неравенство для четырёх чисел:

$$\sqrt[4]{abc\,\sqrt[3]{abc}} \leqslant \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4}.$$

Корень, стоящий в левой части неравенства, представляет собой не что иное, как $\sqrt[3]{abc}$. Чтобы убедиться в этом, возведём оба (неотрицательных) числа $\sqrt[4]{abc\,\sqrt[3]{abc}}$ и $\sqrt[3]{abc}$ в четвёртую степень и проверим, что получается одно и то же:

$$\left(\sqrt[4]{abc\,\sqrt[3]{abc}}\right)^4 = abc\,\sqrt[3]{abc}$$

и

$$(\sqrt[3]{abc})^4 = (\sqrt[3]{abc})^3 \cdot \sqrt[3]{abc} = abc\,\sqrt[3]{abc}.$$

Итак,

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4},$$

$$4\,\sqrt[3]{abc} \leqslant a+b+c+\sqrt[3]{abc},$$

$$3\,\sqrt[3]{abc} \leqslant a+b+c,$$

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

389 Используя неравенство о средних для $n=8$, докажите это же неравенство для $n=7$.

390 Докажите неравенство о средних для $n=6$.
Указание. Воспользоваться предыдущими задачами.

391 Докажите неравенство о средних для всех целых $n>2$.
Указание. Сначала доказываем для $n=2$, 4, 8, 16, 32, …, а затем спускаемся вниз.

392 Докажите, что неравенство между арифметическим и геометрическим средними обращается в равенство, только если все числа равны.

Неравенство о среднем арифметическом и геометрическом можно доказывать и по-другому.

Заметим прежде всего, что если все числа $a_1, \ldots, a_n$ увеличить в одно и то же число раз — например, в три раза — то и среднее арифметическое, и среднее геометрическое увеличатся в то же самое число раз. При этом их соотношение сохранится. Поэтому, желая доказать неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, можно изменить все числа во столько раз, чтобы среднее арифметическое стало равно 1. Тем самым достаточно доказать:

$$a_1, \ldots, a_n \geqslant 0, \quad a_1+\ldots+a_n=n \quad \Rightarrow \quad a_1\ldots a_n \leqslant 1.$$

Будем доказывать это для различных значений n.

1. Для $n=2$ мы это уже знаем: если сумма двух чисел равна 2, то их можно записать как $(1+h)$ и $(1-h)$ и их произведение равно $(1+h)(1-h)= =1-h^2 \leqslant 1$.

2. Докажем это для $n=3$. Пусть сумма трёх положительных чисел a, b, c равна 3. Если не все они равны 1, то среди них есть как числа, большие 1, так и числа, меньшие 1. Пусть например, $a<1$, $b>1$. Тогда $a-1<0$, $b-1>0$ и произведение

$$(a-1)(b-1)=ab-a-b+1$$

будет отрицательным, т. е.

$$ab+1<a+b.$$

Так как

$$(a+b)+c=3,$$

то

$$ab+1+c<(a+b)+c=3$$

или
$$ab + c < 2.$$
Глядите-ка: мы имеем два числа ab и c, их сумма меньше 2, а доказать надо, что их произведение не больше 1. А для двух чисел мы это уже знаем.

Внимательный читатель остановит нас: для двух чисел мы доказали, что если сумма равна 2, то произведение не больше 1. А здесь сумма *меньше* 2. Но эта разница несущественна: увеличим одно из чисел, сделав сумму равной 2 — от этого произведение только возрастёт.

3. Пусть теперь $n = 4$: мы должны доказать, что
$$a,\ b,\ c,\ d \geqslant 0, \quad a + b + c + d = 4, \quad \Rightarrow \quad abcd \leqslant 1.$$
Опять же одно из чисел (например, a) должно быть меньше 1, а другое (например, b) должно быть больше 1. Тогда
$$ab + 1 < a + b, \quad (a + b) + c + d = 4,$$
поэтому
$$ab + 1 + c + d < 4, \quad ab + c + d < 3.$$
И вновь осталось доказать, что если сумма трёх (неотрицательных) чисел меньше 3, то их произведение не больше 1 — мы свели дело к доказанному ранее. И так далее.

Следующее доказательство неравенства о среднем арифметическом и геометрическом для трёх чисел является, вероятно, самым коротким — но и самым загадочным.

Из тождества
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2),$$
которое легко проверить, раскрыв скобки, следует, что при неотрицательных a, b, c его левая часть неотрицательна, то есть
$$abc \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$
Остаётся подставить вместо a, b и c кубические корни $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$:
$$\sqrt[3]{pqr} \leqslant \frac{p + q + r}{3}.$$
А вот ещё одно обоснование неравенства о среднем арифметическом и геометрическом.

Нам нужно доказать, что произведение n неотрицательных чисел с заданной суммой максимально, когда числа равны. Пусть это не так и числа

a_1, a_2, ..., a_n, для которых произведение максимально, не все равны между собой. Предположим, для примера, что $a_1 \neq a_2$. Будем менять a_1 и a_2, оставляя a_3, ..., a_n неизменными, причём так, чтобы сумма $a_1 + a_2$ оставалась постоянной. Произведение $a_1 a_2$, а с ним и произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ будет меняться. Сделав a_1 и a_2 равными, мы увеличим их произведение, поскольку произведение двух неотрицательных чисел с постоянной суммой максимально, когда числа равны. Тем самым увеличится и произведение $a_1 \ldots a_n$ — значит, оно не было максимально возможным!

393 Найти недостаток в этом рассуждении.

Ответ. Мы доказали, что максимум произведения $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ (при постоянной сумме) не может достигаться, если числа a_1, ..., a_n не равны. Но не доказали, что этот максимум вообще достигается. На самом деле этот факт следует из общих теорем математического анализа, так что пробел может быть восполнен. Кроме того, можно усложнить наше рассуждение, сближая a_1 и a_2 не до полного совпадения, а до тех пор, пока одно из них не станет равным среднему арифметическому чисел a_1, ..., a_n. (Надо только взять a_1 и a_2 по разные стороны от среднего арифметического — такое всегда возможно, так как все числа не могут быть одновременно меньше или одновременно больше своего среднего.) Тогда в конце концов все числа станут равными среднему арифметическому.

394 Числа a_1, ..., a_n положительны; докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

395 Докажите, что

$$\sqrt[3]{ab^2} \leqslant \frac{a+2b}{3}$$

при любых $a,\ b > 0$.

396 Каково минимальное значение $a + b$, если $ab^2 = 1$ и $a,\ b \geqslant 0$?

397 Докажите неравенство

$$\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt{c} \leqslant \frac{a+2b+3c}{6}$$

для любых неотрицательных a, b и c.

398 Докажите неравенство

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+2b+3c}{3\sqrt[3]{6}}.$$

399 Докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} < \left(1+\frac{1}{11}\right)^{11}.$$

Решение. Число $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$ можно представить как произведение 11 сомножителей, из которых один равен 1, а все остальные равны $\left(1+\frac{1}{10}\right)$. Сравнивая это произведение с $\left(1+\frac{1}{11}\right)^{11}$, видим, что сумма сомножителей осталась неизменной, а все они стали равными. Следовательно, произведение выросло.

400 Докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{11} > \left(1+\frac{1}{11}\right)^{12}.$$

Указание. Правую часть можно представить в виде произведения 11 сомножителей, один из которых равен

$$\left(1+\frac{1}{11}\right)^{2} = \left(1+\frac{2}{11}+\frac{1}{11^2}\right),$$

а остальные равны $\left(1+\frac{1}{11}\right)$. Левая часть есть произведение 11 одинаковых сомножителей. Достаточно убедиться, что сумма сомножителей левой части больше суммы сомножителей правой части и воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

401 Расположите четыре числа из двух предыдущих задач в порядке возрастания.

69. Среднее квадратическое

Средним квадратическим двух неотрицательных чисел a, b называется неотрицательное число, квадрат которого есть среднее арифметическое квадратов чисел a и b, т. е. число

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

402 В определении речь идёт о среднем арифметическом. Что получится, если заменить его на среднее геометрическое?

403 Докажите, что среднее квадратическое двух чисел a, $b > 0$ больше или равно их среднего арифметического:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

(Например, среднее квадратическое чисел 0 и a равно $a/\sqrt{2}$, а среднее арифметическое равно $a/2$.)

Решение. Сравним квадраты и докажем, что

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Умножим на 4 и раскроем скобки

$$2(a^2+b^2) \geqslant a^2+b^2+2ab,$$

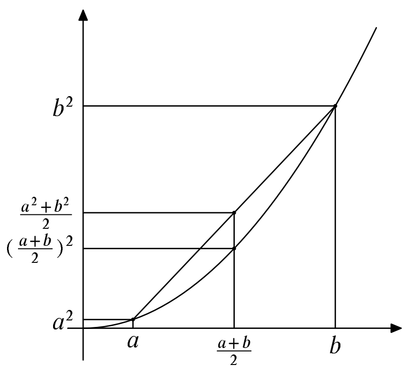
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, \quad a^2+b^2-2ab \geqslant 0.$$

Снова левая часть есть квадрат $(a-b)^2$ и, следовательно, неотрицательна.

404 При каких a и b среднее квадратическое равно среднему арифметическому?

405 Докажите, что среднее геометрическое не превосходит среднего квадратического.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом можно изобразить на рисунке.



Нарисуем график $y=x^2$. Соединим точки с координатами $\langle a, a^2\rangle$ и $\langle b, b^2\rangle$, лежащие на нем, отрезком. Середина этого отрезка будет иметь координаты, являющиеся средними арифметическими координат концов, т. е.

$$\left\langle \frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2} \right\rangle.$$

Под ней на графике лежит точка

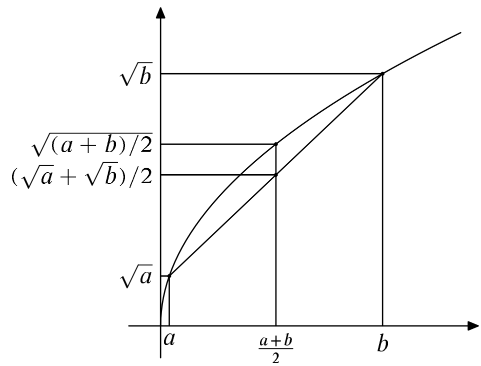
$$\left\langle \frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right\rangle.$$

так что

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}.$$

Таким образом, неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом означает, что что график $y = x^2$ выпукл вниз (кривая лежит ниже «хорды»).



406 Поменяв местами оси x и y, из графика $y = x^2$ мы получим график функции $y = \sqrt{x}$, который находится выше любой своей хорды. Какому неравенству это соответствует?

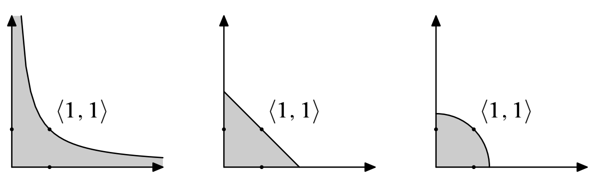
Ответ.

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$$

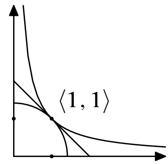
Мы знаем теперь, что для любых неотрицательных a и b

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Для каждого из этих трёх видов среднего нарисуем точки $\langle a,\ b\rangle$, для которых среднее не превосходит 1:



Совместив их на одном рисунке, видим, что чем больше среднее, тем меньше соответствующая область:



407 Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом для трёх чисел:

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

408 (а) Сумма двух положительных чисел равна 2. Каково минимальное значение суммы их квадратов?

(б) Тот же вопрос для суммы квадратов трёх положительных чисел, сумма которых равна 3.

70. Среднее гармоническое

Средним гармоническим положительных чисел a, b называется число, обратное к которому является средним арифметическим между $1/a$ и $1/b$, т. е. число

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)/2}.$$

409 Докажите, что среднее гармоническое не превосходит среднего геометрического.

Решение. Обратная к среднему гармоническому величина есть среднее арифметическое чисел $1/a$ и $1/b$; обратная к среднему геометрическому величина есть среднее геометрическое чисел $1/a$ и $1/b$ — так что остаётся сослаться на неравенство о среднем арифметическом и геометрическом.

410 Числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны. Докажите, что

$$(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Решение. Искомое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)/n},$$

т. е. надо доказать, что среднее арифметическое n чисел больше или равно их среднего гармонического. Это становится ясным, если вставить между ними среднее геометрическое:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\ldots\frac{1}{a_n}}} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)/n};$$

последнее неравенство сводится к неравенству о среднем арифметическом и геометрическом чисел $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.

Другое решение использует следующий трюк. Будем доказывать более общее неравенство (называемое неравенством Коши – Буняковского)

$$(p_1q_1+\ldots+p_nq_n)^2 \leqslant (p_1^2+\ldots+p_n^2)(q_1^2+\ldots+q_n^2)$$

(если подставить в него $p_i=\sqrt{a_i}$, $q_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}}$, получим требуемое).

Чтобы доказать неравенство Коши – Буняковского, рассмотрим выражение

$$(p_1+q_1x)^2+(p_2+q_2x)^2+\ldots+(p_n+q_nx)^2.$$

Раскрыв в нём скобки и сгруппировав члены по степеням x получим квадратный трёхчлен Ax^2+Bx+C, где

$$\begin{aligned} A &= q_1^2+q_2^2+\ldots+q_n^2,\\ B &= 2(p_1q_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n),\\ C &= p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2. \end{aligned}$$

При любых x этот трёхчлен неотрицателен — ведь наше выражение было суммой квадратов. Значит, дискриминант B^2-4AC не больше нуля, т. е.

$$B^2 \leqslant 4AC, \quad \left(\frac{B}{2}\right)^2 \leqslant AC,$$

и

$$(p_1q_1+\ldots+p_nq_n)^2 \leqslant (p_1^2+\ldots+p_n^2)(q_1^2+\ldots+q_n^2).$$

Как вам понравился этот трюк?

71. Не только числа: чёт и нечет

До сих пор мы говорили о сложении и умножении чисел или числовых выражений (скажем, многочленов — если вместо переменной подставить число, многочлен принимает числовое значение). Но складывать и умножать можно не только числа — важно лишь, чтобы свойства операций сложения и умножения оставались похожими на обычные. Мы приведём несколько примеров.

Целые числа бывают чётные и нечётные. Чётные числа делятся на 2 без остатка, то есть имеют вид $2k$ (где k — целое число). Нечётные числа на 2 не делятся. Если нечётное число яблок делить на пары, то останется одно непарное: нечётное число имеет вид $2k+1$ (где k — число пар).

Для сложения и умножения чётных и нечётных чисел есть простые правила (мы уже говорили об этом, когда доказывали иррациональность корня из двух). Вот правила для сложения:

$$\begin{aligned} \text{чётное} + \text{чётное} &= \text{чётное} \\ \text{чётное} + \text{нечётное} &= \text{нечётное} \\ \text{нечётное} + \text{чётное} &= \text{нечётное} \\ \text{нечётное} + \text{нечётное} &= \text{чётное} \end{aligned}$$

Для умножения правила такие:

$$\begin{aligned} \text{чётное} \times \text{чётное} &= \text{чётное} \\ \text{чётное} \times \text{нечётное} &= \text{чётное} \\ \text{нечётное} \times \text{чётное} &= \text{чётное} \\ \text{нечётное} \times \text{нечётное} &= \text{нечётное} \end{aligned}$$

Скажем, сумма чётного и нечётного числа нечётна, поскольку

$$2k + (2l+1) = 2k + 2l + 1 = 2(k+l) + 1;$$

произведение двух нечётных чисел нечётно, поскольку

$$(2k+1)(2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1,$$

и так далее.

411 Не вычисляя суммы

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 998 + 999 + 1000,$$

определите, будет ли она чётной или нечётной.

На правила сложения и умножения чётных и нечётных чисел можно посмотреть иначе: есть некие предметы Ч и Н, и они складываются и умножаются по указанным правилам:

+	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

×	Ч	Н
Ч	Ч	Ч
Н	Ч	Н

Можно вместо Ч и Н писать 0 и 1 (считая нуль и единицу представителями чётных и нечётных чисел) и записать «таблицы сложения и умножения» для остатков по модулю 2:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

(Отличие от обычного сложения и умножения в том, что $1+1=0$.)

72. Арифметика остатков

Можно ли в предыдущем примере вместо чётных и нечётных чисел взять числа, которые делятся и не делятся, скажем, на 3? Буквально так сделать нельзя: складывая два числа, не делящихся на 3, можно получить как число, кратное 3 (например, $5+7=12$), так и число, не кратное трём (например, $5+8=13$). Лучше взять не два класса (делящиеся и не делящиеся), а три: делящиеся на 3 (дающие остаток 0), дающие остаток 1 и дающие остаток 2. Тогда можно сформулировать правила сложения и умножения:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

В самом деле, складывая (например) числа типа 1 и 2, то есть числа вида $3k+1$ и $3l+2$, мы получаем число $3k+3l+3=3(k+l+1)$, что в таблице символически записано как $1+2=0$. Ещё пример: перемножая числа $3k+2$ и $3l+2$, получаем $(3k+2)(3l+2)=9kl+6k+6l+4=3(3kl+2k+2l+1)+1$, что соответствует символической записи $2\times 2=1$.

412 Какой остаток даёт число 8^{999} при делении на 3?

Вместо числа 3 можно взять и другое, скажем, 10. Остаток при делении на 10 — это последняя цифра, поэтому таблицу умножения остатков по модулю 10 можно получить из обычной таблицы умножения, если оставить в каждом произведении только последнюю цифру: пятью пять — [двадцать] пять, семью девять — [шестьдесят] три и так далее.

413 Какая цифра стоит последней в десятичной записи числа 37^{589}?

414 Составьте таблицу сложения и умножения остатков при делении на 5. Сколько раз встречается каждое из чисел 0, 1, 2, 3, 4 среди сумм и произведений?

415 Пользуясь этой таблицей, решите уравнения $3+x=2$ и $3x=2$ в остатках по модулю 5.

Другими словами: какой остаток может давать при делении на 5 число

x, если число $3+x$ даёт остаток 2? какой остаток может давать число x, если число $3x$ даёт остаток 2?

416 Решите уравнения $x^2=2$ и $x^2=3$ в остатках по модулю 7.

417 Решите уравнение $x^2=x$ в остатках по модулю 100.

Другими словами: квадрат числа оканчивается на те же две цифры, что и само число. Что это за цифры? (Укажите все варианты.)

418 Верны ли обычные законы сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность) для арифметики остатков?

Как и для обычных чисел, можно строить арифметическую прогрессию, начав с любого остатка a и прибавляя к нему одно и то же d:

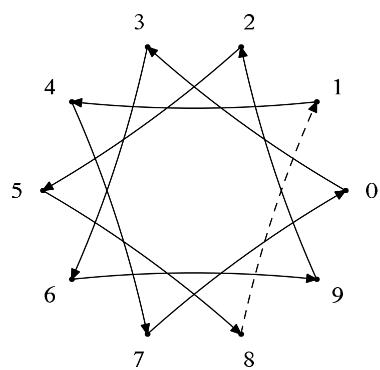
$$a,\ a+d,\ a+d+d,\ a+d+d+d,\ \ldots$$

Например, возьмём остатки по модулю 10, начнём с числа 1 и будем прибавлять каждый раз по 3:

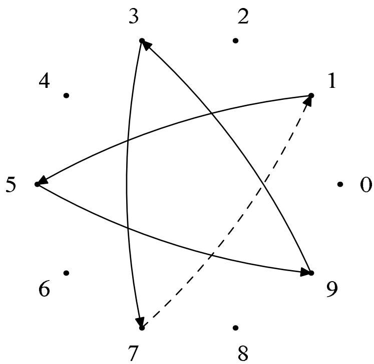
$$1,\ 4,\ 7,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 2,\ 5,\ \ldots$$

(Раньше мы, прибавляя 3 к 7, получали 10, а теперь от 10 осталась только последняя цифра, то есть 0.) Разумеется, рано или поздно мы «зациклимся», то есть получим остаток, который уже был — и с этого момента наша арифметическая прогрессия начнёт повторяться.

Это можно изобразить так. Напишем остатки $0, 1, 2, \ldots, 9$ по кругу, в вершинах правильного 10-угольника. Затем сыграем в считалочку, начав с 1 и отмечая числа через два на третье (отмеченные не выбывают). Рано или поздно наш путь замкнётся:



В этом примере цикл замкнулся, пройдя все вершины. Но это не всегда так. Например, если прибавлять не по 3, а по 4, то цикл замкнётся раньше:



Это и не удивительно, поскольку мы прибавляем чётное число 4 по чётному модулю 10 и чётность сохраняется (отмечаются только нечётные числа). В более общем виде это говорит следующая задача.

419 Пусть n человек стоят по кругу (в вершинах правильного n-угольника) и мы начинаем отсчитывать по k человек, начиная с кого-то. Докажите, что если n и k имеют общий делитель, то мы зациклимся раньше, чем пройдём всех.

В примере $n = 10$ и $k = 4$ имели общий делитель 2.

Решение. Пусть k и n имеют общий делитель d. Мы прибавляем k на каждом шаге и отнимаем n, когда сделаем полный цикл — и в обоих случаях мы сдвигаемся на кратное d. Поэтому попасть в соседнюю вершину (сдвинуться на единицу, не кратную d), мы не можем.

420 Докажите, что если в ситуации предыдущей задачи числа n и k *взаимно просты* (не имеют общих делителей, бо́льших единицы), то мы зациклимся, обойдя все вершины.

Решение. Будем идти, пока не зациклимся. Может ли случиться так, что мы обойдём не все вершины, а только некоторые? Мы должны доказать, что нет (если n и k взаимно просты). Отметим на окружности те вершины, которые мы обошли. Эта картинка симметрична (поскольку цикл можно начинать с любого места), так что пройденные вершины образуют правильный многоугольник. Пусть d — расстояние между соседними его вершинами (если мы прошли все, то $d = 1$, если каждую вторую, то $d = 2$ и так далее).

Заметим, что n должно делиться на d (частное равно числу вершин многоугольника). С другой стороны, шаг арифметической прогрессии не выводит нас из многоугольника, поэтому k тоже делится на d. Значит, d должно быть общим делителем чисел n и k, и потому $d = 1$ для взаимно простых n и k.

421 Покажите, что если p — простое число, то во всех строках таблицы умножения остатков по модулю p (кроме нулевой) встречаются все остатки.

Указание. Чтобы решить уравнение $ax = b$ в остатках по модулю p, надо двигаться шагами по a, пока не попадёшь в b.

422 Покажите, что любая арифметическая прогрессия в остатках по модулю n имеет период, делящий n.

423 Покажите, что любая геометрическая прогрессия в остатках по простому модулю p имеет период, делящий $p - 1$.

73. Степенные ряды

Наш следующий пример — сложение и умножение степенных рядов. Вспомним, как мы складывали и умножали многочлены, перемножая одночлены и приводя подобные. Вместо многочленов можно рассматривать и бесконечные *степенные ряды*, в которых могут быть члены всех (неотрицательных) степеней. Например, умножив ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots + x^n + \ldots$$

на себя, мы получим в произведении

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

В самом деле, при формальном раскрытии скобок получатся, скажем, три члена второй степени: $x^2 \cdot 1$, $x \cdot x$ и $1 \cdot x^2$, поэтому в «произведении» стоит $3x^2$.

Заметим, что подставить вместо x какое-то число в степенной ряд не так просто: получится бесконечная сумма, и нужно объяснять, что это значит. Если при $x = 0{,}1$ сумму $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$ ещё можно истолковать как бесконечную десятичную дробь $1{,}111\ldots = 1\frac{1}{9}$, то, скажем, при $x = 2$ получится сумма $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$, придать смысл которой не так просто. Но формально степенные ряды перемножать можно, так как слагаемых одинаковой степени будет конечное число и привести подобные можно.

Многочлены можно рассматривать как частные случаи степенных рядов, в которых все коэффициенты, начиная с некоторого, равны нулю. Например, многочлен $1 - x$ как степенной ряд равен

$$1 - x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots + 0x^n + \ldots$$

424 Умножьте $1 - x$ на степенной ряд $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

Решение.

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)=$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)-x(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)=$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots)=1$$

(все члены, кроме единицы, удивительным образом сокращаются).

Если произведение двух чисел равняется единице, то одно число называется обратным к другому. Так и теперь можно сказать, что обратным к многочлену $1-x$ является степенной ряд $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$, и записать

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

Эта формула уже появлялась у нас как формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, но теперь она приобрела формальный смысл.

425 Найдите степенной ряд, обратный к многочлену $1+x$.

426 Найдите степенной ряд, обратный к многочлену $1-2x$.

427 Найдите степенной ряд, обратный к многочлену $2-x$.

428 Найдите обратный к степенному ряду $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

429 Умножьте степенной ряд $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ на $1-x$ и сравните ответ с предыдущей задачей.

430 Вычислите произведение рядов

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots)$$

и произведение обратных к ним.

74. *p*-адические числа

От многочленов мы перешли к степенным рядам, разрешив продолжать их неограниченно. Аналогично можно поступить с десятичными записями чисел, разрешив продолжать их неограниченно влево.

Такие записи можно, как и обычные числа, складывать и умножать столбиком (при этом, как и для степенных рядов, не потребуется складывать бесконечно много цифр). Вот, например, как можно сложить и перемножить две такие записи $\ldots 2731$ и $\ldots 5184$ (показано, как получаются четыре последние цифры):

$$\begin{array}{r} \ldots 2731 \\ \ldots 5184 \\ \hline \ldots 7915 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \ldots 2731 \\ \ldots 5184 \\ \hline \ldots 0924 \\ \ldots 1848 \\ \ldots 2731 \\ \ldots 3655 \\ \ldots \\ \hline \ldots 7504 \end{array}$$

В этих примерах видно, что для нахождения четырёх последних цифр суммы (слева) или произведения (справа) достаточно знать четыре последних цифры каждого из чисел и выполнить конечное число операций. Другими словами: чтобы найти остаток от деления суммы (произведения) на 10000, достаточно знать остатки для слагаемых (сомножителей).

Таким образом, можно складывать и умножать числа справа налево, не беспокоясь о том, что они бесконечны. Такие бесконечные влево числа называют 10-*адическими* (если пользоваться обычной десятичной системой счисления). Аналогично можно определить и p-адические числа для любого целого положительного p.

Обычные числа можно рассматривать как частный случай 10-адических, в которых слева (до некоторого места) стоят нули. Сложение и умножение таких чисел превращается в обычное сложение и умножение в столбик.

431 Решите уравнение $x+1=0$ в 10-адических числах.

(Другими словами, надо найти 10-адическое число x, которое при сложении с числом $\ldots 000001$ давало бы число $\ldots 000000$.)

Решение. Определяя цифры справа налево, находим, что $x=\ldots 9999999$ (и это единственно возможный вариант).

Если вспомнить, что через $-a$ обозначают число, противоположное числу a, то есть решение уравнения $x+a=0$, то можно записать:

$$-1=\ldots 9999999.$$

432 Решите уравнение $3x=1$ в 10-адических числах.

433 Докажите, что квадратное уравнение $x^2=x$ имеет в 10-адических числах четыре решения (помимо очевидных решений $x=0$ и $x=1$, есть ещё два других).

Указание. Они имеют вид $\ldots 25$ и $\ldots 76$.

75. Книги для дальнейшего чтения

Для тех, кому понравилось решать задачи из этой книжки, и кто хочет продолжить знакомство с алгеброй, мы приводим список книг для дальнейшего чтения. Некоторые из них можно найти в электронном виде в Интернете (например, в библиотечном разделе сайта www.math.ru).

Книги, рассчитанные на школьников без специальной подготовки:

Р. Курант, Г. Роббинс. *Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов.* 2-е изд. М.: Просвещение, 1967. Одно из недавних переизданий: М.: МЦНМО, 2001.

Г. Радемахер, О. Теплиц. *Числа и фигуры.* М.: Физматгиз, 1962. Недавнее переиздание: ЛКИ, 2007.

Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский. *Математические беседы.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. Одно из недавних переизданий: М.: Физматлит, 2004.

Более трудные книги для школьников:

П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин (сост.) *Энциклопедия элементарной математики.* Книга 2. Алгебра. М. – Л.: ГТТИ, 1961. 424 с.

В. Б. Алексеев. *Теорема Абеля в задачах и решениях.* М.: Наука, 1976. Переиздание: М.: МЦНМО, 2001. 192 с.

М. М. Постников. *Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел.* М.: Наука, 1978.

В. В. Прасолов. *Задачи по алгебре, арифметике и анализу.* М.:МЦНМО, 2005. 545 с.

Университетские учебники (для студентов младших курсов):

Б. Л. ван дер Варден. *Алгебра.* М.: Наука, 1976.

И. М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре.* М.: Наука, 1966. Переиздание: М.: МЦНМО, 1999.

А. И. Кострикин. *Введение в алгебру.* М.: Наука, 1994.

Оглавление