

## Beaux ordres et graphes

Jean-Florent Raymond

► **To cite this version:**

Jean-Florent Raymond. Beaux ordres et graphes. Journées du GDR-IM 2016, 2016, Paris, France. 2016. <lirmm-01488486>

**HAL Id: lirmm-01488486**

**<https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-01488486>**

Submitted on 13 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# BEAUX ORDRES ET GRAPHEs

Jean-Florent Raymond

Université de Montpellier (LIRMM) et Université de Varsovie

## Introduction

Dans un **bel ordre**, il n'y a ni chaîne infinie décroissante, ni chaîne infinie d'éléments incomparables.

C'est la définition.

Ah ?

Par exemple,  $(\mathbb{N}, \leq)$  est un bel ordre, mais pas  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ .

Quel intérêt ?

Dans un bel ordre, beaucoup de classes sont **facilement caractérisables**.

Oui, les classes **inférieurement closes** (i.e.  $x \in \mathcal{C}$  et  $y \leq x \Rightarrow y \in \mathcal{C}$ ) ont un nombre **fini** d'obstructions (=éléments min. du complémentaire)

Donc on peut les reconnaître facilement (algorithmiquement) ?

Oui ! Dans certains cas.

C'est courant, les classes inférieurement closes ?

Oui ! Les forêts, les graphes planaires, les graphes de treewidth bornée (et bien d'autres) sont des classes de graphes inférieurement closes (pour la relation de mineur).

Quelles question se pose-t-on en théorie des beaux ordres ?

Savoir si un ordre donné est un bel ordre.

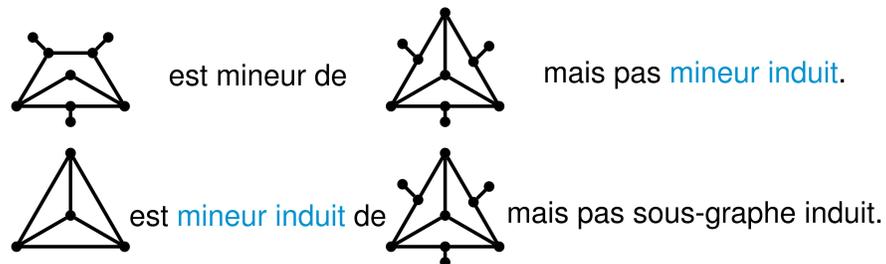
Ou bien caractériser les classes où un ordre donné est un bel ordre.

Par exemple ?

Regarde dans la colonne de droite !

## Résultats

La **contraction** d'une arête revient à identifier ses extrémités. On dit que  $H$  est **mineur induit** de  $G$  si on peut l'obtenir en contractant les arêtes d'un sous-graphe induit de  $G$ . Par exemple :



### Théorème (Błasiok, Kamiński, R., Trunck, 2015)

La classe des graphes ne contenant pas  $H$  comme **mineur induit** est bellement ordonnée par la relation de mineur induit ssi  $H$  est mineur induit de  $\mathcal{K}_4$  ou de  $\mathcal{K}_5$ .

### Théorème (Błasiok, Kamiński, R., Trunck, 2015)

La classe des graphes ne contenant pas  $H$  comme **contraction** est bellement ordonnée par la relation de contraction ssi  $H$  est contraction de  $\mathcal{K}_4$ .

### Théorème (Kamiński, R., Trunck, 2014)

Une classe de multigraphes  $\mathcal{G}$  est bellement ordonnée par la relation de **contraction** ssi tous ses éléments ont

- ▶ au plus  $p$  composantes connexes ; et
- ▶ pas de coupe minimale de plus de  $k$  arêtes, pour deux entiers  $p$  et  $k$  fixés.

### Technique de preuve

On veut montrer que  $(\mathcal{G}, \leq)$  est un bel ordre :

1. on choisit une bijection  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$  où  $\mathcal{S}$  est une classe qu'on connaît bien ( $n$ -uplets, mots, arbres, etc.);
2. on choisit un ordre  $\preceq$  sur  $\mathcal{S}$  tel que  $f(x) \preceq f(y) \iff x \leq y$ ;
3. on prouve que  $(\mathcal{S}, \preceq)$  est un bel ordre en utilisant les résultats classiques, ce qu'on peut faire si on a bien choisi  $\mathcal{S}$ .

Ces trois étapes suffisent, car si on trouvait dans  $(\mathcal{G}, \leq)$  une séquence infinie décroissante (ou d'éléments incomparables), on pourrait en déduire une dans  $(\mathcal{S}, \preceq)$  grâce à la deuxième étape.

La première étape est facilitée si on connaît la **structure** des éléments de  $\mathcal{G}$  (théorèmes de décomposition).

## Ordres et graphes

Quels ordres sur les graphes sont de beaux ordres, en général ?

**beaux** : mineurs et immersions (Robertson & Seymour) ;

**pas beaux** : sous-graphes (induits ou non), contractions, mineurs induits, mineurs topologiques (induits ou non) ;

**problèmes ouverts** : immersions induites et immersions fortes.

Quand un ordre n'est pas beau en général, on peut s'intéresser aux **classes où il est beau**.

## Bibliographie

- ▶ J. Błasiok, M. Kamiński, J.-F. Raymond et T. Trunck. Induced minors and well-quasi-ordering. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 49:197 – 201, 2015. The Eight European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2015 et *arXiv:1510.07135*.
- ▶ M. Kamiński, J.-F. Raymond et T. Trunck. Multigraphs without large bonds are well-quasi-ordered by contraction. *arXiv:1412.2407*, Décembre 2014.