Généralisation du problème de recherche d'arbre de recouvrement ayant un minimum de sommets de branchement

Massinissa Merabet, Miklos Molnar

Généralisation du problème de recherche d'arbre de recouvrement ayant un minimum de sommets de branchement

Massinissa Merabet[1], Miklos Molnar[2]

[1] Université Technologique de Singapour, ERIAN, Singapour.
{mmerabet}@ntu.edu.sg
[2] Université de Montpellier, LIRMM, Montpellier, France
{molnar}@lirmm.fr

Mots-clés : *arbres, sommets de branchement, k-MBVST, PLNE, réseaux optiques.*

1 Introduction

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sommet de G est dit sommet de branchement s'il a un degré strictement supérieur à 2. Le problème NP-difficile et no-APX MBVST consiste à trouver un arbre de recouvrement de G ayant un minimum de sommets de branchement. Il a été introduit par L.Gargano et al. dans [2] et a été largement étudié dans la littérature au court de ces quinze dernières années, tant sur le volet résolution exacte [1] que sur celui de la résolution approchée [3]. Il trouve son intérêt pratique principalement dans le routage Broadcast/Multicast dans les réseaux optiques. En effet, étant la structure connexe permettant de couvrir les sommets en utilisant un minimum de liens, l'arbre est le plus utilisé pour ce type de routage. Dans les réseaux tout optique, les fonctions de commutation et de routage sont fournies par les brasseurs optiques OXC (optical cross-connect) et permettent la mise en oeuvre de communications de bout en bout entre les noeuds d'accès. Grâce au démultiplexage du signal optique entrant, un brasseur optique OXC peut commuter chacune des longueurs d'onde d'un port d'entrée vers un port de sortie quelconque. Certains OXC particuliers, appelés OXC-MC, peuvent également diviser une longueur d'onde entrante vers plusieurs ports de sortie grâce à un coupleur optique, afin d'offrir un service Broadcast/Multicast. Un sommet de branchement dans l'arbre de recouvrement correspond a un noeud équipé de coupleur optique dans le réseau. Or, ce type de matériel est onéreux. Il convient donc de minimiser leur nombre tout en garantissant la faisabilité du routage. Cet aspect binaire d'absence ou bien de présence de coupleur optique est insuffisant pour garantir une bonne performance du routage. En effet, les sommets munis de coupleurs optiques sont certes capables de diviser le spectre lumineux arrivant, mais cette capacité est limitée. De plus, la division du spectre lumineux entraîne une perte de puissance. Dans ce papier, nous introduisons le problème paramétré k-MBVST, où le paramètre k représente cette limite.

2 Définition et NP-complétude

Définition 1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et soit k un entier positif. Le problème k-MBVST consiste en la recherche d'un arbre de recouvrement T de G tel que le nombre de sommets k-branches (sommets de degré strictement supérieur à $k + 2$) dans T est minimum. On note par $s_k(G)$ le nombre de sommets k-branches d'un tel arbre.*

Théorème 1 *Soit r un entier positif. Il est NP-complet de décider si un graphe connexe G satisfait $s_k(G) \leq r$, quelle que soit la valeur de k.*

Preuve :

— Pour $r = 0$: Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Nous construisons un nouveau graphe G' en reliant k feuilles à chaque sommet $v \in V$. Décider si G' contient un arbre de recouvrement sans sommet k-branches est équivalent à décider si G est graphe Hamiltonien.

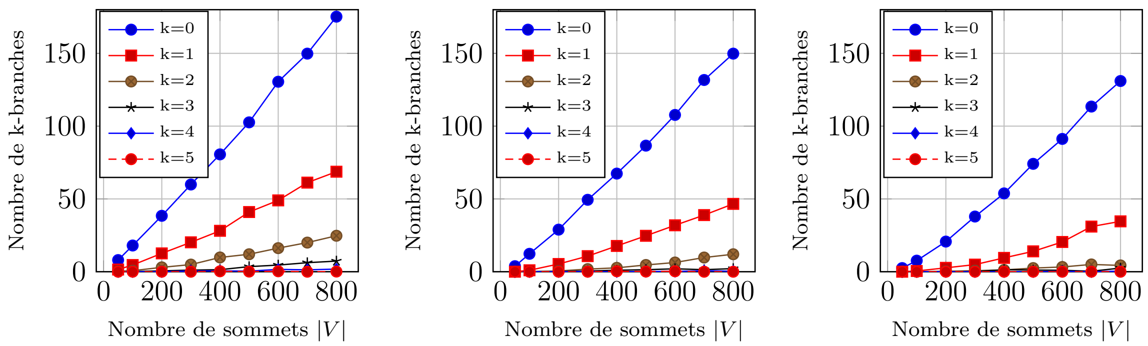
— Pour $r \geq 1$: Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Nous construisons un nouveau graphe G' en dupliquant $r \cdot k$ fois le graphe G et en ajoutant le graphe complet K_r. Nous choisissons un sommet arbitraire $v \in V$ et nous relions chaque sommet du graphe K_r

à r duplications distinctes de G à partir de leur sommet v. Nous relions k feuilles à chaque sommet de chaque duplication de G. Dans tout arbre de recouvrement de G', les k sommets du graphe complet sont des sommets k-branches. Par conséquent, le graphe G' contient un arbre de recouvrement tel que $s_k(G') = r$ si et seulement si G admet un chemin Hamiltonien ayant v comme extrémité.

□

3 Formulation PLNE et expérimentations

Nous formulons le problème k-MBVST en programme linaire en nombres entiers. La connexité de l'arbre est garantie grâce à une formulation de flot. Une unité de flot est envoyée d'une source arbitraire à chacun des $|V|-1$ sommets du graphe. Seules les arêtes transportant au moins une unité de flot sont sélectionnées pour appartenir à la solution optimale (plus de détails dans [4]). Nous avons appliqué notre formulation à des graphes aléatoires générés suivant les paramètres de [1]. La densité respecte la formule : $\lfloor (|V| - 1) + i \times 1.5 \times \lceil \sqrt{|V|} \rceil \rfloor$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ et $|V| = \{50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800\}$. Pour chaque valeur de $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 30 instances sont générées pour chaque choix de $|V|$ et de i. La résolution est faite par le solveur IBM ILOG CPLEX. La figure 1 montre le nombre de sommets k-branches en fonction de k et de $|V|$ pour chaque valeur de i. Ce nombre augmente mécaniquement avec l'augmentation de $|V|$ mais diminue quand k et i augmentent. Pour $k \geq 4$, le nombre de sommets k-branches est proche de zero quelles que soient les valeurs de $|V|$ et de i.



(a) $i = 1$ (b) $i = 2$ (c) $i = 3$

FIG. 1 – Variation de $s_k(G)$ en fonction de $|V|$, de k, et de i.

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons introduit le problème k-MBVST qui est une généralisation du problème MBVST. Il permet de prendre en compte plus finement les contraintes du routage Broadcast/Multicast dans les réseaux optiques. Nous avons prouvé que ce problème est NP-difficile et nous l'avons formulé en PLNE. Des tests sur des graphes aléatoires ont permis d'évaluer l'évolution de la solution optimale en fonction du paramètre k, de la taille de l'instance, et de sa densité.

Références

[1] C. Cerrone, R. Cerulli, and A. Raiconi. Relations, models and a memetic approach for three degree-dependent spanning tree problems. *European Journal of Operational Research*, 232(3) :442 – 453, 2014.

[2] L. Gargano, P. Hell, L. Stacho, and U. Vaccaro. Spanning Trees with Bounded Number of Branch Vertices. ICALP '02, pages 355–365, London, UK, 2002. Springer-Verlag.

[3] A. Marin. Exact and heuristic solutions for the minimum number of branch vertices spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, 245(3) :680 – 689, 2015.

[4] M. Merabet and M. Molnár. Generalization of the Minimum Branch Vertices Spanning Tree Problem. Research report, Nanyang Technological University, Singapore, November 2016.