



**HAL**  
open science

# Etude des classes de graphes et de matroïdes closes par mineur : densité de triangles, coloration, rigidité et orientations

Boris Albar

## ► To cite this version:

Boris Albar. Etude des classes de graphes et de matroïdes closes par mineur : densité de triangles, coloration, rigidité et orientations. Mathématique discrète [cs.DM]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2014. Français. NNT : 2014MON20209 . tel-02588079

**HAL Id: tel-02588079**

**<https://theses.hal.science/tel-02588079>**

Submitted on 15 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
**Docteur**

Délivré par l'**Université Montpellier 2**

Préparée au sein de l'école doctorale **I2S**  
Et des unités de recherche **I3M & LIRMM**

Spécialité: **MATHÉMATIQUES**

Présentée par **Boris Albar**

**Etude des classes de graphes et de  
matroïdes closes par mineur :  
densité de triangles, coloration,  
rigidité et orientations**

Soutenue le 17 Novembre 2014 devant le jury composé de

M. Laurent Imbert, Directeur de Recherche, LIRMM, CNRS  
M. Jorge Ramírez-Alfonsín, Professeur, I3M, Université Montpellier 2  
M. Daniel Gonçalves, Chargé de Recherche, LIRMM, CNRS  
M. Patrice Ossona de Mendez, Chargé de Recherche, EHESS, CNRS  
M. András Sebő, Directeur de Recherche, G-SCOP, CNRS  
M. Victor Chepoi, Professeur, LIF, Université Aix-Marseille

Président du jury  
Directeur de thèse  
Co-Encadrant  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur



**Titre :** Etude des classes de graphes et de matroïdes closes par mineur : densité de triangles, coloration, rigidité et orientations

**Résumé :**

La théorie des mineurs de graphes est apparue dans la première partie du XXème siècle avec la caractérisation des graphes planaires par Kuratowski et Wagner. L'étude des classes de graphes closes par mineurs intervient dans de nombreux domaines en théorie des graphes (graphes plongés dans les surfaces, coloration, théorie extrémale des graphes, théorie de la rigidité, ...). Dans la première partie de cette thèse, nous prouverons l'existence de mineurs de graphes complets dans des graphes dont toutes les arêtes appartiennent à un certain nombre de triangles. Cette propriété trouve des applications dans la théorie de la rigidité des graphes ainsi qu'à la coloration de certaines classes de graphes closes par mineurs. Une seconde partie est consacrée à la généralisation de cette propriété des graphes vers les matroïdes. Les matroïdes sont des objets combinatoires introduits en 1935 par Whitney qui ont pour but d'axiomatiser le concept d'indépendance linéaire. En particulier, les notions de triangle et de mineur de graphe peuvent se généraliser à ces objets. Nous étudierons donc les matroïdes dont tous les éléments appartiennent à un certain nombre de triangles et montrerons que l'on peut trouver certains mineurs particuliers dans ces matroïdes. Enfin, une dernière partie de cette thèse sera consacrée à l'étude de certaines orientations des graphes plongés dans les surfaces.

**Mots-clés :** Graphes, Matroïdes, Mineurs, Triangles, Coloration, Rigidité, Orientations, Surfaces

I3M - Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, 2 Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5

LIRMM - Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, 161 Rue Ada, 34090 Montpellier

**Title :** A study of minor-closed classes of graphs and matroids : triangle density, coloring , rigidity and orientations

**Abstract :**

The theory of graph minors appeared in the first part of the twentieth century with the characterization of planar graphs by Kuratowski and Wagner. The study of classes of graphs closed under minors has applications to many areas of graph theory (graphs embedded in surfaces, coloring, extremal graph theory, theory of rigidity, ...). The first part of this thesis is devoted to prove the existence of minors of complete graphs in graphs where each edge belongs to a certain number of triangles. This property has applications to the theory of rigidity and to the coloration of some minor-closed classes. A second part is devoted to the generalization this property from graphs to matroids. Matroids are combinatorial objects introduced in 1935 by Whitney to axiomatize the concept of linear independence. In particular, the notions of triangle and minor can be generalized to these objects. We will study matroids in which every element belongs to a certain number of triangles and show that we can find some particular minors in these matroids. Finally, the last part of this thesis is devoted to the study of certain orientations of graphs embedded in surfaces.

**Keywords :** Graph, Matroids, Minors, Triangles, Coloring, Rigidity, Orientations, Surfaces



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>13</b>
1.1 Graphes . . . . .	13
1.1.1 Connexité et séparations . . . . .	14
1.1.2 Quelques classes de graphes . . . . .	15
1.1.3 Clique-sum . . . . .	17
1.2 Matroïdes . . . . .	17
1.2.1 Quelques classes de matroïdes . . . . .	20
1.2.2 Quelques matroïdes particuliers . . . . .	21
1.2.3 $k$ -somme de matroïdes . . . . .	25
<b>2 Mineurs de graphes et de matroïdes</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Classes de graphes et de matroïdes closes par mineur . . . . .	27
2.3 Classes de graphes et de matroïdes excluant un certain mineur . . . . .	31
2.4 Mineurs enracinés . . . . .	39
2.5 Théorie extrémale et dégénérescence des classes de graphes closes par mineur . . . . .	40
2.6 Invariant de Colin de Verdière . . . . .	43
<b>3 Triangles et mineurs de graphes</b>	<b>47</b>
3.1 Introduction . . . . .	47
3.2 Preuve du Théorème 3.4 . . . . .	50
3.2.1 Preuve des cas $r = 3, 4, 5, 6$ . . . . .	50
3.2.2 Preuve du cas $r = 7$ : le cas à 5 triangles . . . . .	53
3.3 Preuve des Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7 . . . . .	55
3.3.0.1 Preuve du Théorème 3.5 . . . . .	55

3.3.0.2	Preuve du Théorème 3.7 . . . . .	58
3.3.0.3	Preuve du Théorème 3.6 . . . . .	66
3.4	Preuve des généralisations aux matroïdes . . . . .	66
3.4.1	Preuve du Théorème 3.8 . . . . .	66
3.4.2	Preuve du Théorème 3.9 . . . . .	70
3.4.3	Preuve du Théorème 3.10 . . . . .	71
3.5	Conclusion . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>75</b>
4.1	Densité globale de triangles . . . . .	75
4.2	Rigidité et contraintes dans les graphes . . . . .	76
4.3	Coloration des graphes . . . . .	80
4.3.1	Preuve du Théorème 4.14 . . . . .	81
4.3.2	Preuve du Théorème 4.15 . . . . .	83
4.4	Conjecture d'Hadwiger doublement-critique . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Sur une conjecture de Barát et Thomassen</b>	<b>95</b>
5.1	Introduction . . . . .	95
5.2	Préliminaires . . . . .	96
5.3	Preuve de la Conjecture 5.1 . . . . .	98
5.3.1	Aperçu . . . . .	98
5.3.2	L'existence de I . . . . .	99
5.3.3	L'existence de B, G et R . . . . .	101
5.3.4	Réorienter B . . . . .	107
5.3.5	Orienter G et I . . . . .	108
	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>119</b>
A.1	Génération de graphes avec Sage . . . . .	120
A.1.1	Recherche d'un mineur de graphe complet . . . . .	120
A.1.2	Génération des graphes excluant un certain mineur . . . . .	122
A.1.3	Recherche de la taille maximale d'une séparation . . . . .	123
A.1.4	Recherche du nombre de triangles par arêtes . . . . .	124
A.2	Liste de graphes . . . . .	124
A.2.1	Graphes de taille 8 et 9 de degré minimum 4 sans mineur $K_6$ . . . . .	125
A.2.1.1	Graphes de taille 8 . . . . .	125
A.2.1.2	Graphes de taille 9 . . . . .	125
A.3	Mineurs 3-connexe de $S(5, 6, 12)$ . . . . .	127



---

## Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement András Sebő et Patrice Ossona de Mendez pour avoir passé du temps à relire ce manuscrit et pour leurs remarques. Je remercie aussi Victor Chepoi et Laurent Imbert pour avoir bien voulu prendre part à mon jury. Je veux remercier Jorge et Daniel pour m'avoir patiemment encadré tout au long de ces trois dernières années (voir plus pour Jorge!) ainsi que pour votre disponibilité et vos précieux conseils. Enfin, je remercie tous ceux qui ont assisté à ma soutenance.

Je voudrais aussi remercier tous les membres des équipes GTA et AIGCo (Alex, Mickael, Stéphane, Pascal, Ignasi, Christophe, Benjamin, Jonathan et tous les autres) ainsi que le personnel administratif pour leur aide.

À tous les doctorants/postdoctorants que j'ai pu croiser au long de ces trois dernières années avec une pensée spéciale à ceux qui ont dû me supporter comme cobureau.

À Guillaume et Solène pour toutes les aventures cinématographiques. À Kevin (pour toutes ces discussions endiablées au bureau), Sarah et Mala. À Nico (pour avoir un jour eu la patience de me suivre en train de chercher désespérément une papaye) et Sandrine. À Marthe pour les séances de psy (tu l'auras mérité, ton diplôme) (et aussi pour la nourriture même si des fois c'était un peu bizarre mais chut ça faut pas le dire!). À l'autre Guillaume pour les références littéraires. À Valentin pour m'avoir appris les rudiments de l'épée médiévale (j'ai pas fait de progrès depuis). Enfin à Mathias, Kolja, Manel, Jean-Florent, Julien, Rémi, Damien, Jean et à tous ceux que j'ai oubliés dans cette liste.

À mon cheval Frimeur pour son soutien constant ces dix dernières années.

À ma soeur Rachel pour m'avoir rendu mon cheval.

À mes parents pour leur aide (surtout avec l'orthographe et la grammaire!) et à toute ma famille.

Last but not least, à Maryna, pour tous ces moments magiques passés ensemble.





---

# Introduction

La théorie des mineurs de graphe est apparue dans la première partie du XX<sup>ème</sup> siècle avec la caractérisation des graphes planaires par Kuratowski puis Wagner. Cela a conduit aux monumentaux travaux de Robertson et Seymour publiés entre 1980 et 2012 dans lesquels ils généralisent le théorème de Wagner à l'ensemble des graphes plongeables dans une surface donnée. Pour ce faire, ils ont introduit de nombreuses notions maintenant fondamentales en théorie des graphes et en algorithmique telle que celle de décomposition arborescente ou encore les problèmes de *linkage* dans les graphes. Dès lors les classes de graphes closes par mineur ont reçu un intérêt considérable et ont été étudiées sous des angles différents (théorie extrémale, coloration, théorèmes de décomposition, ...). Un second problème ayant joué un rôle prépondérant dans le développement de la théorie des mineurs de graphe est la conjecture d'Hadwiger, affirmant que tout graphe ne contenant pas de mineur  $K_t$  est  $(t - 1)$ -coloriable. Cette conjecture reste largement ouverte à l'heure actuelle et reste l'un des problèmes ouverts les plus importants en théorie des graphes. Le cas où  $t = 5$  est équivalent au théorème des quatre couleurs, prouvé par Appel et Haken et le cas où  $t = 6$  a été prouvé par Robertson, Seymour et Thomas en 1993. Plusieurs avancées ont été effectuées en direction du cas où  $t = 7$ , notamment par Kawarabayashi et Toft, qui ont montré en 2006 que tout graphe sans mineur  $K_7$  ni  $K_{4,4}$  était 6-coloriable.

La théorie des mineurs trouve aussi des développements importants dans le cadre de la théorie des matroïdes. Les matroïdes sont des objets combinatoires introduits en 1935 par Whitney qui ont pour but d'axiomatiser le concept d'indépendance linéaire. De ce fait, l'étude de la théorie des matroïdes recouvre de nombreux domaines des mathématiques principalement celui de l'algèbre linéaire dont elle en reprend la terminologie. La théorie des matroïdes est aussi étroitement liée à la théorie des graphes dont elle généralise certains aspects. Par exemple la notion de mineurs de graphes s'étend naturellement aux matroïdes. La théorie des mineurs de matroïdes, contrairement à la théorie des mineurs de graphe, ne possède pas d'équivalents, dans le cas général, aux travaux de Robertson et Seymour pour les graphes. Néanmoins, très récemment (2013), Geelen, Gerards et Whittle ont annoncé pouvoir étendre ces travaux à une classe très impor-

tante des matroïdes, les matroïdes représentables sur un corps fini. La preuve actuelle n'est toujours pas entièrement publiée mais certains travaux préliminaires permettent d'entrevoir une généralisation aux matroïdes des outils utilisés par Robertson et Seymour pour les graphes notamment la notion de décomposition arborescente. En effet, à la manière des graphes, de nombreuses propriétés structurelles émergent lorsque l'on considère des matroïdes dont la largeur de la décomposition arborescente est bornée ou lorsque la connexité verticale des matroïdes est grande. Il est alors logique d'essayer de généraliser les problèmes de mineur de graphes aux matroïdes même si certaines propriétés ne se généralisent pas si aisément. Par exemple, la caractérisation des graphes sans mineur  $K_4$  est un problème relativement simple tandis que caractériser les matroïdes sans mineur  $M(K_4)$  reste un problème ouvert très difficile.

Durant ma thèse, je me suis intéressé aux problèmes touchant à l'existence de mineurs de graphes complets dans les graphes et les matroïdes ayant une forte densité de triangles par arête. Un résultat classique dû à Kostochka et Thomason [73] affirme que tout graphe ayant une densité en nombre d'arêtes supérieure à  $cd\sqrt{\log d}$  arêtes, où  $c$  est une constante et  $d > 0$ , contient un mineur  $K_d$ . Pour le cas où  $d \leq 7$ , Mader a prouvé que le nombre maximal d'arêtes qu'un graphe sans mineur  $K_d$  peut avoir est de  $(d-2)n - \binom{d-1}{2}$ . Différents résultats étendent ce théorème pour des valeurs de  $d$  supérieures. Notons que la borne obtenue par Kostochka et Thomason est optimale et que la borne de Mader est aussi optimale et ne peut être améliorée qu'en considérant des hypothèses supplémentaires.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons à une notion différente de densité et considérerons des graphes dont toutes les arêtes appartiennent à  $t$  triangles. Nous verrons qu'une telle condition permet de justifier, lorsque  $t$  est petit, l'existence d'un mineur  $K_{t+2}$ . Les résultats qui en découlent trouvent de nombreuses applications en théorie des graphes, notamment dans l'étude de certains plongements de graphes ainsi que dans l'étude de la coloration de certaines classes de graphes closes par mineur.

Les Chapitres 1 et 2 sont consacrés à la mise en place des définitions et théorèmes autour de la théorie des mineurs de graphes et des matroïdes et ne contiennent aucun de mes résultats.

Le Chapitre 1 est consacré aux définitions de base sur les graphes et matroïdes. On rappelle aussi quelques théorèmes sur la connexité et les séparations dans les graphes ainsi que leurs généralisations aux matroïdes. On introduira aussi la notion de  $k$ -somme qui sera importante dès le Chapitre 2.

Le Chapitre 2 est une introduction rapide à la théorie des mineurs de graphes et de matroïdes, en se concentrant sur les propriétés des classes mineurs-closes ainsi qu'aux propriétés structurelles des graphes ne contenant pas de petit graphe complet comme mineur. Du côté des matroïdes, on s'intéressera principalement aux théorèmes de décomposition des matroïdes réguliers ou des matroïdes binaires ne contenant pas certains mineurs. Enfin, on introduira des outils qui seront fondamentaux pour prouver les résultats qui seront donnés dans les Chapitres 3 et 4, notamment certains résultats de théorie extrémales dans les classes de graphes closes par mineur ainsi que des résultats sur les mineurs enracinés.

Le Chapitre 3 contient les principaux résultats obtenus lors de ma thèse. En particulier, on y prouvera que les graphes dont toutes les arêtes appartiennent à un certains nombres de triangles contiennent un graphe complet comme mineur dont la taille dépend du nombre de triangles. Ces résultats répondent à un problème dû à Nevo et généralisent ses travaux aux cas supérieurs. Plus précisément, on montre que tout graphe sans mineur  $K_{t+2}$ , pour  $1 \leq t \leq 5$ , contient une arête appartenant à moins de  $t$  triangles et adjacente à un sommet de petit degré. Enfin on montrera que ce type de résultat s'étend aux matroïdes au prix d'un énoncé plus compliqué.

Dans le Chapitre 4, nous verrons les applications des théorèmes introduits au Chapitre 3 à divers domaines de la théorie des graphes. Nous nous intéresserons dans un premier temps à étudier le nombre maximal de triangles que peut contenir un graphe sans mineur  $K_k$  en fonction du nombre d'arêtes. Nous donnerons une borne serrée pour les petites valeurs de  $k$ . Dans un second temps, nous nous intéresserons aux graphes génériquement sans  $d$ -stress, une notion introduite dans l'étude de la rigidité des graphes. Cette notion se retrouve aussi chez Maxwell, motivée par certains problèmes de physique. La relation entre cette notion et les graphes est apparue plus explicitement dans les travaux de Nevo en 2007. Dans ces travaux, Nevo conjecture aussi un lien entre cette notion et certains invariants de graphes de nature topologique. Nous prouverons alors un cas particulier de l'une de ces conjectures. Nous nous intéresserons ensuite, motivés par la conjecture d'Hadwiger, à la coloration des graphes nous montrerons que les graphes sans mineur  $K_7$  sont 8-coloriables et que les graphes sans mineur  $K_8$  sont 10-coloriables. Nous montrerons aussi dans cette partie que les graphes sans mineur  $K_7^-$  sont 7-coloriables. Enfin nous considérerons une version affaiblie de la conjecture d'Hadwiger introduite par Kawarabayashi, Pedersen et Toft dont nous prouverons un cas particulier.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous étudierons un problème sur les graphes topologiques. Plus précisément, nous montrerons que toute triangulation d'une surface compacte sans bord de genre d'Euler au moins 2 admet une orientation telle que le degré sortant de chaque sommet est au moins 3 et est divisible par 3. Cela répond à une conjecture de Barát et Thomassen et trouve aussi un intérêt dans l'étude des bois de Schnyder pour les surfaces de genre supérieur à 2.



# Préliminaires

*Dans ce chapitre, nous introduisons les principales définitions et notations utilisées dans ce manuscrit. On se référera à [22] pour plus de détails sur les notions introduites dans ce chapitre.*

## 1.1 Graphes

Un **graphe**  $G$  est une paire  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini de sommets et  $E$  est un ensemble d'arêtes (i.e. paires d'éléments de  $V$ ). Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , on notera  $V(G) = V$ ,  $E(G) = E$  et  $n = |V(G)|$ .

Par souci de simplicité, on notera  $uv$  l'arête  $(u, v) \in E(G)$ . Les sommets  $u$  et  $v$  sont dits **incidents** à l'arête  $e = uv$ . Enfin, étant donné  $u, v \in V(G)$ , on dira que  $u$  et  $v$  sont **adjacents** si  $uv \in E(G)$  et on dira qu'une **non-arête** est une paire de sommets non-adjacents dans  $G$ . Dans la suite, nous considérerons des graphes **simples**, c'est-à-dire tels que pour toute arête  $ab$ ,  $a \neq b$  et tels que deux arêtes distinctes ne possèdent pas les mêmes extrémités.

Étant donné un graphe  $G$ , on dit qu'un graphe  $G'$  est un **sous-graphe** de  $G$  si et seulement si  $V(G') \subseteq V(G)$  et  $E(G') \subseteq E(G)$ . De la même manière on peut définir le graphe induit par un sous-ensemble de sommets. Étant donné  $S \subseteq V(G)$ , on appelle **sous-graphe induit** par  $S$  et on note  $G[S]$ , le graphe  $G' = (S, E')$  où  $E'$  est l'ensemble des arêtes de  $E(G)$  ayant leurs deux extrémités dans  $S$ . Lorsque le contexte sera clair, on pourra omettre d'utiliser la notation  $G[S]$  et se contenter de se référer au sous-graphe  $S$ .

On peut introduire une notion de complémentarité pour les graphes de la manière suivante. On appelle **graphe complémentaire** de  $G$  et on note  $\bar{G}$  le graphe tel que  $V(\bar{G}) = V(G)$  et  $E(\bar{G}) = \{uv \in V(G)^2 \mid u \neq v, uv \notin E(G)\}$ .

Si on s'intéresse à un sommet particulier  $u$  d'un graphe  $G$ , On appelle **voisinage** de  $u$  l'ensemble  $N(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$ . On définit alors le **degré** de ce sommet dans  $G$  et on note  $\deg(u)$ , le cardinal de  $N(u)$ . On appelle alors degré minimal (resp. maxi-

mal) de  $G$  et on note  $\delta(G)$  (resp.  $\Delta(G)$ ), l'entier défini par  $\delta(G) = \min_{u \in V(G)} (\deg(u))$  (resp.  $\Delta(G) = \max_{u \in V(G)} (\deg(u))$ ).

Étant donné  $u \in V(G)$ , on appelle **voisinage** de  $u$  et on note  $N_G(u)$ , l'ensemble  $\{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$  des sommets adjacents à  $u$ . De la même manière, on appelle **voisinage clôt** de  $u$  et on note  $N_G[u]$  l'ensemble  $N_G(u) \cup \{u\}$ . Lorsque le contexte sera clair, on omettra de préciser  $G$  et on notera  $N(u)$  et  $N[u]$  pour désigner  $N_G(u)$  et  $N_G[u]$  respectivement.

Enfin, nous introduisons certaines opérations sur les graphes qui nous seront utiles par la suite.

Étant donné  $G$  un graphe et  $e \in E(G)$ . Le graphe obtenu en supprimant l'arête  $e$  est le sous-graphe de  $G$  défini par  $(V(G), E(G) \setminus \{e\})$ . On le note  $G \setminus e$  et on appelle cette opération **suppression d'arête**.

Une deuxième opération que nous utiliserons beaucoup par la suite est celle de **contraction d'arête**. Soit  $H$  un graphe. On dit que  $H$  est une contraction de  $G$  s'il existe une application  $c : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que

- $\forall x \in V(H)$ ,  $G[c^{-1}(x)]$  est connexe.
- $\forall x, y \in V(H)$ ,  $xy \in E(H)$  si et seulement si  $G$  contient au moins une arête avec une extrémité dans  $c^{-1}(x)$  et l'autre dans  $c^{-1}(y)$ .

On peut alors définir la contraction de l'arête  $e = ab \in E(G)$ , par la contraction de  $G$  associée à l'application  $c : V(G) \rightarrow V(H)$  définie par  $c(a) = b$  et  $c(x) = x$ ,  $\forall x \in V(G) \setminus \{a, b\}$ . On note le graphe obtenu par  $G/e$ .

Notons que ces deux opérations peuvent être généralisées à des ensembles d'arêtes en considérant la suppression ou contraction successive de tous les éléments de l'ensemble.

Enfin nous rencontrerons la notion de subdivision d'un graphe. La **subdivision** d'une arête  $uv$  est l'opération conduisant à un graphe contenant un nouveau sommet  $w$  où l'arête  $uv$  a été remplacée par deux nouvelles arêtes  $uw$  et  $wv$ . Une subdivision d'un graphe est alors un graphe obtenu à partir de  $G$  par une suite finie de subdivisions successives.

### 1.1.1 Connexité et séparations

Soit  $(A, B)$  une paire de sous-ensembles de  $V(G)$  telle que  $A \cup B = V(G)$ ,  $A \setminus B \neq \emptyset$  et  $B \setminus A \neq \emptyset$ . On dit que  $(A, B)$  est une **séparation** de  $G$ , si aucune arête de  $G$  n'est incidente à la fois à un sommet de  $A \setminus B$  et à un sommet de  $B \setminus A$ . Dans ce cas, on dira que  $A \cap B$  est un **séparateur** de  $G$  et on appellera  $k = |A \cap B|$  l'**ordre de la séparation**  $(A, B)$ . Par souci de concision, on dira que  $(A, B)$  est une  **$k$ -séparation** de  $G$  si  $(A, B)$  est une séparation d'ordre  $k$  de  $G$ .

La notion de connexité est étroitement reliée à l'existence de chemins entre sommets du graphe (cf. Théorème 1.1). Un **chemin** entre deux sommets  $u$  et  $v$  de  $V(G)$  est une suite de sommets  $(p_1, p_2, \dots, p_l)$  distincts telle que  $p_1 = u$ ,  $p_l = v$  et telle que  $p_i$  et  $p_{i+1}$  soient adjacents pour  $1 \leq i \leq l-1$ . Les sommets  $p_1$  et  $p_l$  sont alors appelés les extrémités de ce

chemin. Un **cycle** est alors une suite de sommets  $(p_1, p_2, \dots, p_l)$  telle que  $p_1 = p_l$  et telle que  $p_i$  et  $p_{i+1}$  soient adjacents pour  $1 \leq i \leq l - 1$ .

On dit alors qu'un graphe  $G$  est **connexe** si pour toute paire  $(u, v) \in V(G)^2$ , il existe un chemin entre  $u$  et  $v$ . Si  $G$  n'est pas connexe, une **composante connexe** de  $G$  est un sous-ensemble  $S \subset V(G)$  tel que  $G[S]$  est connexe.

La proposition suivante relie la notion de séparation d'un graphe et celle de connexité.

**Proposition 1.1**

*Un graphe est connexe si et seulement s'il ne possède pas de séparations d'ordre 0.*

Plus généralement, on peut définir la notion de  $k$ -connexité d'un graphe en utilisant les séparations d'ordre supérieur. On dira alors qu'un graphe  $G$  est  **$k$ -connexe** s'il n'existe pas de séparation de  $G$  d'ordre inférieur ou égal à  $k - 1$ .

Le théorème suivant dû à Menger généralise la proposition précédente aux ordres supérieurs en reliant la  $k$ -connexité d'un graphe et l'existence de chemins disjoints entre deux sous-ensembles quelconques de sommets  $G$ .

**Théorème 1.2** (Menger, 1927, [51])

*Un graphe  $G$  est  $k$ -connexe si et seulement si pour toute paire de sommets  $a$  et  $b$  il existe  $k$  chemins intérieurement sommet-disjoints (i.e. disjoint sauf potentiellement en leurs extrémités) entre  $a$  et  $b$ .*

Notons que ce théorème peut s'exprimer en termes de sous-ensembles. Étant donné deux sous-ensemble de sommets  $X$  et  $Y$  disjoints d'un graphe  $G$ . Alors  $G$  est  $k$ -connexe si et seulement s'il existe  $k$  chemins intérieurement sommet-disjoints dont une extrémité est dans  $X$  et l'autre dans  $Y$ .

On peut aussi définir la connexité en termes d'arêtes. On dit qu'un graphe est  **$k$ -arête-connexe** si enlever  $k - 1$  arêtes distinctes ne déconnecte pas le graphe.

Enfin, on pourra rencontrer dans ce manuscrit un dernier type de connexité. On dit qu'un graphe  $G$  est **intérieurement  $k$ -connexe** si  $G$  est  $k - 1$ -connexe et si pour toute séparation  $(A, B)$  de  $G$  de taille  $k$ ,  $|A| = 1$  ou  $|B| = 1$ .

### 1.1.2 Quelques classes de graphes

Dans cette partie, nous nous intéressons à quelques classes de graphes spécifiques qui nous seront utiles tout au long de ce manuscrit.

Une **clique** (ou graphe complet) de taille  $k$  est un graphe à  $k$  sommet tel que pour tout  $u, v \in V(G)$  tel que  $u \neq v$ ,  $uv \in E(G)$ . La famille complémentaire à cette-ci est la famille des **stables**. Un stable est un graphe  $G$  tel que  $E(G) = \emptyset$ . On peut alors définir un stable de  $G$  comme un sous-ensemble  $S$  de sommets de  $G$  tel qu'aucune arête de  $G$  n'ait ses deux extrémités dans  $S$ .

Un graphe **biparti** est un graphe admettant une partition de ses sommets en deux

stables. Un cas particulier de graphe est le **graphe biparti complet**  $K_{n,m}$  tel que  $V(G) = A \cup B$  où  $|A| = n$ ,  $|B| = m$ ,  $A \cap B = \emptyset$  et où  $uv \in E(G)$  pour tout  $u \in A$  et  $v \in B$ .

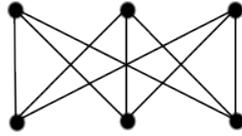


FIGURE 1.1 – Graphe biparti complet  $K_{3,3}$

Un **arbre** est un graphe connexe ne contenant pas de cycles. Il est aisé de remarquer que tout arbre avec au moins deux sommets, possède au moins 2 sommets de degré 1. Les sommets de degré 1 sont alors appelés les **feuilles**. Un graphe non connexe et sans cycles est une **forêt**.

Une **roue**  $W_r$  est un graphe obtenu à partir d'un cycle à  $r$  sommets,  $r \geq 3$ , en ajoutant un sommet adjacent à tous les sommets du cycle. Les arêtes incidentes à ce sommet sont appelées les rayons de la roue.

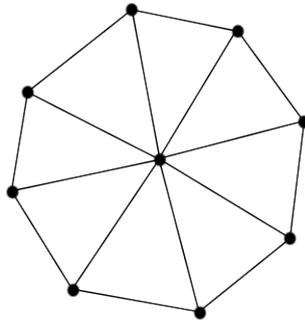


FIGURE 1.2 – La roue à 8 sommets  $W_8$

Nous allons maintenant introduire certaines classes de graphes dont les définitions sont de nature topologique.

Dans la suite, nous nous réfèrerons à [52] pour la définition de plongement d'un graphe dans une surface. Un graphe est dit **planaire** s'il existe un plongement de ce graphe dans  $\mathbb{R}^2$ . Un graphe **planaire externe** est un graphe planaire tel qu'il existe un plongement de ce graphe dans  $\mathbb{R}^2$  où tous les sommets sont situés sur la face externe. Enfin un graphe  $G$  est dit **apex** s'il existe un sommet  $u$  tel que  $G \setminus u$  soit planaire.

On dénote par  $\mathbb{S}^3$  la 3-sphère. Un graphe  $G$  est alors dit **sans entrelacs** si, pour tout cycle  $C$  de  $G$ , il existe un disque  $D$  et un plongement  $\rho$  de  $G \cup D$  dans  $\mathbb{S}^3$  tel que  $\rho(D \setminus \delta D) \cap \rho(G) = \emptyset$  et  $\rho(\delta D) = \rho(C)$ . Autrement dit s'il existe un plongement de  $G$  dans  $\mathbb{R}^3$  tel que tout cycle est le bord d'un disque topologique dont l'intérieur est disjoint du graphe. Robertson, Seymour et Thomas ([61], [62], [63]) ont montré que cette définition était équivalente au fait qu'il existe un plongement de  $G$  tel que pour toute paire de cycles  $(C_1, C_2)$ , les cycles ne formaient pas un entrelacs. On se réfèrera à [64] pour la définition d'un entrelacs et d'un noeud.

Par exemple, tout graphe apex est en particulier sans entrelacs. En effet, si  $G$  est un graphe apex alors il existe  $u$  tel que  $G \setminus u$  soit planaire. On considère alors un plongement de  $G \setminus u$  dans  $\mathbb{S}^2$  auquel on rajoute le sommet  $u$  à l'intérieur de la sphère pour

obtenir un plongement dans  $\mathbb{S}^3$  de  $G$ . Il est alors facile de vérifier que ce plongement est sans entrelacs.

On dira qu'un cycle  $C_1$  plongé dans  $\mathbb{S}^3$  est dénoué si  $C_1$  peut être déformé en un cercle par une isotopie ambiante (cf. [64]). Un plongement  $\rho$  d'un graphe  $G$  est dit sans noeuds si pour tout cycle  $C$  de  $G$ ,  $\rho(C)$  est dénoué. Un tel graphe  $G$  est alors dit **sans noeuds** s'il existe un plongement de  $G$  sans noeuds.

On pourrait vérifier que tout graphe  $G$  tel qu'il existe  $u, v \in V(G)$  tels que  $G \setminus \{u, v\}$  soit planaire est sans noeuds.

### 1.1.3 Clique-sum

Dans cette sous-section, nous introduisons une opération sur les graphes qui nous sera fondamentale par la suite.

Étant donné deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  et étant donné  $K_1$  et  $K_2$  deux cliques de taille  $k$  telles que  $K_1 \subsetneq G_1$  et  $K_2 \subsetneq G_2$ , on appelle **clique-sum** (ou  $k$ -somme) de  $G_1$  et  $G_2$  et on note  $G_1 \oplus_k G_2$  le graphe obtenu en prenant de l'union disjointe de  $G_1$  et  $G_2$  et en identifiant  $K_1$  avec  $K_2$  et en supprimant éventuellement certaines arêtes de la clique.

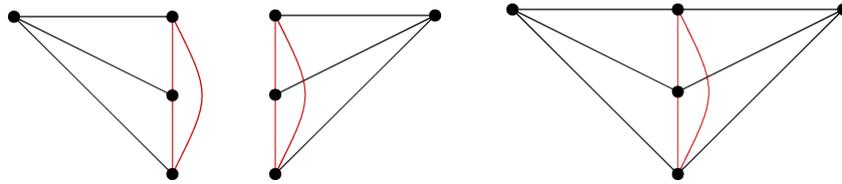


FIGURE 1.3 – Exemple de 3-somme de deux graphes  $K_4$

La proposition suivante énonce que si un graphe admet une  $k$ -séparation alors il peut s'écrire comme une clique-sum de taille  $k$  de deux graphes plus petits.

#### Proposition 1.3

Soit  $G$  un graphe et  $(A, B)$  une  $k$ -séparation de  $G$  et soit  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) le graphe obtenu à partir de  $G[A]$  (resp.  $G[B]$ ) en complétant le sous-graphe  $A \cap B$  en une clique. Alors  $G = G_1 \oplus_k G_2$ .

## 1.2 Matroïdes

La notion de matroïde a été introduite en 1935 par Whitney pour étudier la notion d'indépendance linéaire. Dans cette partie, nous suivrons les notations d'Oxley [54].

Il existe de nombreuses axiomatiques équivalentes pour définir un matroïde. Nous utiliserons l'axiomatique suivante.

#### Définition 1.4

Un **matroïde**  $M$  est un paire  $(E, \mathcal{I})$  tel que :

- $E$  est un ensemble fini.
- $\mathcal{I}$  est une collection de sous ensembles de  $E$  vérifiant :
  - (I1) :  $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) : Si  $I \subset J$  et  $J \in \mathcal{I}$  alors  $I \in \mathcal{I}$

(I3) : Si  $I, J \in \mathcal{I}$  et  $|I| < |J|$  alors il existe  $j \in J - I$  tel que  $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ .

L'ensemble  $E$  est appelé le **support** du matroïde  $M$  et  $\mathcal{I}$  l'ensemble des **indépendants**. Un élément de  $\mathcal{I}$  est appelé un indépendant. Étant donné un matroïde  $M$ , on notera aussi par  $E(M)$  le support de ce matroïde. L'ensemble complémentaire de  $\mathcal{I}$  dans l'ensemble des parties de  $E$   $\mathcal{P}(E)$  est appelé l'ensemble des dépendants et ses éléments les **dépendants**.

**Exemple (Matroïdes graphique)** : On peut construire un matroïde à partir d'un graphe. Plus précisément, étant donné un graphe  $G$ , on peut définir un matroïde  $M(G)$  dont le support est  $E = E(G)$  et dont l'ensemble des indépendants  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des forêts de  $G$ . Il est facile de montrer que cet ensemble vérifie les axiomes précédents. Un matroïde  $M$  est dit **graphique** s'il existe un graphe  $G$  tel que  $M = M(G)$ .

À partir de cette notion d'indépendance, on peut construire une fonction  $r : \mathcal{P}(E(M)) \rightarrow \mathbb{N}$  définie par,

$$r(P) = \{\max(|I|) : I \in \mathcal{I} \text{ et } I \subseteq P\},$$

pour tout  $P \in \mathcal{P}(E(M))$ . Cette fonction est appelée la fonction **rang** du matroïde. On appellera alors **rang** du matroïde, l'entier  $r(E(M))$ .

Un **circuit** est un dépendant minimal pour la relation d'inclusion. Un circuit de taille 1 est appelé une **boucle** et un circuit de taille 3 est appelé un **triangle**. Enfin les éléments d'un circuit de taille 2 sont dits **parallèles**. On dit qu'un matroïde est **simple** s'il ne contient ni de boucles ni d'éléments parallèles. Dans un matroïde graphique, les circuits correspondent alors aux cycles du graphe minimaux pour l'inclusion. Il est aussi facile de montrer qu'un matroïde graphique  $M(G)$  est simple si et seulement si le graphe  $G$  est simple.

Pour tout matroïde  $M$ , on définit la **simplification** de  $M$  et on note  $si(M)$  le matroïde construit à partir de  $M$  dans lequel on a supprimé les boucles et identifié les éléments parallèles.

Dans la suite, nous pourrons utiliser l'axiomatique suivante, équivalente à celle de la définition 1.4, pour définir un matroïde à partir de ses circuits.

**Proposition 1.5**

*Un ensemble  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde si et seulement s'il vérifie les axiomes suivants.*

(C1)  $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) Si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  et  $C_1 \subseteq C_2$  alors  $C_1 = C_2$ .

(C3) Si  $C_1, C_2$  sont deux éléments distincts de  $\mathcal{C}$  et  $e \in C_1 \cap C_2$  alors il existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tel que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$ .

La Figure 1.4 est une représentation géométrique du matroïde  $M(K_4)$ . Ce type de représentation permet de représenter les matroïdes de rang au plus 4. Les points sont alors les éléments du matroïdes et les fermés (i.e. dépendants maximaux pour l'inclusion) de rang 2 et 3 correspondent respectivement aux lignes et aux plans. Par exemple, si le ma-

troïde est simple alors les circuits de taille 3 du matroïde sont représentés par tous les ensembles de 3 points alignés. On peut ainsi vérifier que les lignes de la Figure 1.4 correspondent aux triangles du graphe  $K_4$ . Lorsque la représentation fait intervenir des droites et plans affines alors la représentation est dite **affine**.

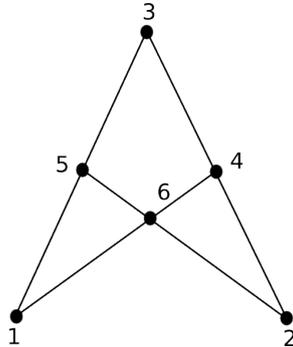


FIGURE 1.4 – Représentation géométrique du matroïde  $M(K_4)$

Il existe une notion de séparation et de connectivité pour les matroïdes similaire à celle des graphes. Étant donné  $k$  un entier positif et un matroïde  $M$ , une partition  $(X, Y)$  de  $E(M)$  telle que  $\min\{|X|, |Y|\} \geq k$  et  $r(X) + r(Y) - r(M) \leq k - 1$  est appelé une  **$k$ -séparation**. De plus  $(X, Y)$  est appelée une  **$k$ -séparation exacte** si  $r(X) + r(Y) - r(M) = k - 1$ .  $M$  est dit  **$k$ -séparé** s'il existe une  $k$ -séparation de  $M$ . On appelle **fonction de connectivité** d'un matroïde  $M$  et on note  $\lambda_M$ , la fonction définie pour tout  $S \subseteq E(M)$  par

$$\lambda_M(S) = r(S) + r(E(M) \setminus S) - r(M).$$

où  $r$  est la fonction rang du matroïde  $M$ .

On peut alors vérifier que toute partition  $(X, Y)$  de  $E(M)$  telle que  $\min\{|X|, |Y|\} \geq k$  est une  $k$ -séparation si et seulement si  $\lambda_M(X) \leq k - 1$ .

On peut alors introduire la **connectivité**  $\lambda(M)$  d'un matroïde  $M$  comme la fonction définie par

$$\lambda(M) = \min\{k : M \text{ est } k\text{-séparé}\}.$$

On dit qu'un matroïde est  **$k$ -connexe** si  $\lambda(M) \geq k$ . On dit qu'un matroïde est **connexe** si il est 1-connexe.

De la même manière, on dit qu'un matroïde est **verticalement  $k$ -connexe** si pour toute partition  $(X, Y)$  telle que  $r(X) + r(Y) - r(M) < k - 1$ ,  $X$  ou  $Y$  contient une base du matroïde. Cette dernière notion de connexité la plus proche de la  $k$ -connexité des graphes telle que nous l'avons définie dans la partie précédente. En particulier  $G$  est  $k$ -connexe si et seulement si  $M(G)$  est verticalement  $k$ -connexe.

Le théorème suivant, dû à Tutte, généralise le Théorème 1.2 de Menger aux matroïdes. Pour l'introduire, nous avons besoin d'introduire la fonction  $\kappa$  suivante. Soit  $M$  un matroïde et  $S, T \subseteq E(M)$ , alors on note

$$\kappa(S, T) = \min\{\lambda_M(X) : S \subseteq X \subseteq (E \setminus T)\}.$$

**Théorème 1.6** (Tutte, 1965, [77])

Soit  $M$  un matroïde et  $S, T \subseteq E(M)$  des sous-ensembles disjoints de  $E(M)$ . Alors  $\kappa(S, T) \geq k$  est égal au maximum de  $\lambda_N(S)$ , pour tous les mineurs  $N$  de  $M$  tels que  $E(N) = S \cup T$ .

Montrons que ce théorème généralise le Théorème 1.2.

PREUVE . Soit  $G$  un graphe et soit  $a$  et  $b$  deux sommets quelconques de  $G$ . On notera dans la suite  $M = M(G)$  et  $E = E(M(G))$ . Soit  $A$  l'ensemble des arêtes incidentes à  $a$  et soit  $B$  l'ensemble des arêtes incidentes à  $b$ .

Supposons que  $G$  soit  $k$ -connexe. On supposera de plus que les sommets  $a$  et  $b$  ne sont pas adjacents (si  $a$  et  $b$  sont adjacents, on supprime l'arête  $ab$  et on montre que  $a$  et  $b$  sont reliés par au moins  $k - 1$  chemins sommet-disjoints). Comme  $a$  et  $b$  ne sont pas adjacents alors les ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoints.

Comme  $G$  est  $k$  connexe  $M$  est alors verticalement  $k$ -connexe. Ainsi  $(A, E \setminus A)$  est une partition de  $E$  telle que  $B \subseteq (E \setminus A)$  Ainsi, par définition, soit  $\lambda_M(A) \geq k$  soit  $A$  ou  $E \setminus A$  contient une base de  $M$ . Supposons que  $A$  ou  $E \setminus A$  car  $A$  contiendrait alors un arbre couvrant de  $G$ , ce qui contredit la définition de  $B$ .

Nous avons donc que  $\lambda_M(A) \geq k$ . En particulier, cela implique que  $\kappa(A, B) \geq k$ . Ainsi par le théorème de Tutte, il existe un mineur  $N$  de  $M$  sur l'ensemble  $A \cup B$  tel que  $\lambda_N(S) \geq k$ . Ceci implique l'existence d'au moins  $k$  chemins intérieurement sommet-disjoints dans le graphe  $G$ .  $\square$

Étant donné  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroïde et  $S \subseteq E$ . On appelle **restriction** de  $M$  à  $S$  et on note  $M|_S$ , le matroïde de support  $S$  et d'ensemble d'indépendant

$$\mathcal{I}(M|_S) = \{I \in \mathcal{I} : I \subseteq S\}.$$

La **suppression** d'un élément  $e$  d'un matroïde  $M$  est alors le matroïde noté  $M \setminus e$  défini par  $M \setminus e = M|_{E(M) \setminus e}$ .

On définit la **contraction** d'un élément  $e$  de  $M$  par le matroïde dont le support est  $E \setminus \{e\}$  et dont l'ensemble des indépendants est  $\{I - \{e\} : e \in I \in \mathcal{I}(M)\}$ . On note cette opération  $M/e$ .

Notons que ces deux opérations de suppression et contraction se généralisent directement à un ensemble  $S$  quelconque d'éléments de  $M$ . On note alors  $M \setminus S$  et  $M/S$  respectivement.

Enfin nous pouvons définir une notion de dualité pour les matroïdes. Étant donné  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroïde, on appelle matroïde dual de  $M$  et on note  $M^*$  le matroïde  $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$  où

$$\mathcal{I}^* = \{X \mid X \subseteq E \text{ tel qu'il existe une base } B \text{ de } M \text{ telle que } X \cap B = \emptyset\}.$$

Notons en particulier que les opérations de contraction et suppression sont duales l'une de l'autre. Plus précisément, étant donné un élément  $e$  d'un matroïde  $M$ , on a que  $M/e = (M^* \setminus e)^*$ . Un circuit du dual d'un matroïde  $M$  est appelé un **cocircuit** de  $M$ . Une **triade** est un cocircuit de taille 3. Une **coboucle** est un cocircuit de taille 1.

### 1.2.1 Quelques classes de matroïdes

Dans cette section on introduit plusieurs classes de matroïdes.

Un matroïde  $M$  est dit **co-graphique** s'il existe un graphe  $G$  tel que  $M = M^*(G)$ . Notons que le dual d'un matroïde graphique  $M(G)$  est lui-même graphique si et seulement si  $G$  est planaire.

Les matroïdes graphiques et co-graphiques appartiennent à la classe plus large des matroïdes dits représentables. Étant donné  $\mathbb{F}$  un corps et  $q$  un entier quelconque, on dit que  $M$  est **représentable** sur  $\mathbb{F}$  s'il existe une application  $\rho : E(M) \rightarrow \mathbb{F}^q$  telle que pour tout  $F \subseteq E(M)$ , l'ensemble de vecteurs  $\{\rho(f) : f \in F\}$  est linéairement indépendant si et seulement si  $F$  est un indépendant de  $M$ . Un tel matroïde est usuellement représenté sous la forme compacte d'une matrice de taille  $k \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{F}$  où  $k$  est le rang et  $n$  le nombre d'éléments du matroïde. Les éléments du matroïde correspondent alors aux vecteurs colonnes de la matrice. Si  $A$  est une matrice alors on note par  $M[A]$  le matroïde engendré par la matrice  $A$ . On peut vérifier que  $M[A]$  reste inchangé si on effectue l'une des opérations élémentaires sur la matrice  $A$  :

- Échanger deux lignes
- Échanger deux colonnes
- Remplacer une ligne  $L_i$  par une combinaison linéaire de la forme  $aL_i + bL_j$  où  $i \neq j$  et  $a \neq 0$ .
- Appliquer un automorphisme de  $\mathbb{F}$  sur  $A$ .
- Supprimer une ligne nulle (sauf si c'est la seule ligne de la matrice)

En utilisant ces opérations, on peut montrer que tout matroïde  $M[A]$  est isomorphe à un matroïde  $M[A']$  où  $A'$  est une matrice de la forme  $[\text{Id}_k | B]$ , où  $\text{Id}_k$  est la matrice identité de taille  $k$ , obtenue à partir de  $A$  par les transformations élémentaires listées ci-dessus.

En particulier, un matroïde est dit **binaire** s'il est représentable sur le corps fini à deux éléments  $\text{GF}(2)$ . Tout matroïde graphique  $M(G)$  est binaire, car l'application qui au  $i^{\text{ème}}$  élément du matroïde associe le vecteur de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice d'incidence du graphe  $G$  est une représentation de  $M(G)$  sur  $\text{GF}(2)$ .

Un matroïde est dit **régulier** s'il est représentable sur tout corps. Ces matroïdes ont pour propriété de pouvoir être représentés par une matrice totalement unimodulaire (i.e. dont toutes les sous-matrices sont de déterminant non-nul). En particulier les matroïdes graphiques sont réguliers.

La classe des matroïdes représentables sur un corps  $\mathbb{F}$  est close par dualité. En effet, étant donné une représentation d'un matroïde de rang  $k$  à  $n$  éléments par une matrice sous la forme canonique  $[I_k | A]$  où  $I_k$  est la matrice identité de taille  $k$ , alors  ${}^t A | I_{n-k}$  est la matrice d'une représentation de  $M^*$  sur le corps  $\mathbb{F}$ .

### 1.2.2 Quelques matroïdes particuliers

On va maintenant donner quelques matroïdes spécifiques qui seront utilisés par la suite.

**Le matroïde uniforme**  $U_{r,n}$

Le matroïde uniforme  $U_{r,n}$  est le matroïde de rang  $r$  donc le support est un ensemble  $E$  de cardinalité  $n$  et où les indépendants sont tous les sous-ensembles de  $E$  de cardinalité inférieur ou égal à  $r$ .

Ces matroïdes jouent un rôle important dans la structure des matroïdes représentables sur un corps fini.

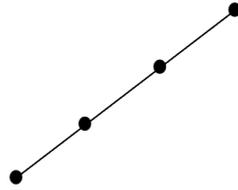


FIGURE 1.5 – Représentation affine du matroïde  $U_{2,4}$

**Le matroïde de Fano  $F_7$ .** C'est le matroïde de rang 3 correspondant au plan projectif fini d'ordre 2. Il peut être représenté par la matrice binaire suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce matroïde n'est ni graphique ni co-graphique. Une représentation géométrique de ce matroïde est donnée par la Figure 1.6 (les indices correspondent aux colonnes de la matrice).

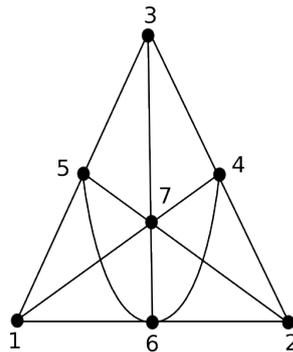


FIGURE 1.6 – Représentation affine du matroïde de Fano

**Le matroïde  $R_{10}$ .**

Le matroïde  $R_{10}$  est le matroïde régulier représenté par la matrice totalement unimodulaire suivante à coefficients réels :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce matroïde intervient dans la décomposition des matroïdes réguliers. Il a comme propriété particulière que pour tout  $e \in E(R_{10})$ ,  $(R_{10} \setminus e) \simeq M(K_{3,3})$ .

**Le matroïde  $P_7$ .**

Le matroïde  $P_7$  est le matroïde ternaire (i.e. représentable sur  $GF(3)$ ) de rang 3 représenté par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il intervient dans la caractérisation des matroïdes ternaires sans mineur  $M(K_4)$ . La Figure 1.7 est la représentation affine de ce matroïde.

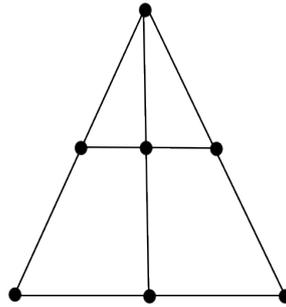


FIGURE 1.7 – Représentation géométrique du matroïde  $P_7$

### Le matroïde J.

Le matroïde J est le matroïde ternaire de rang 4 représenté par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il intervient dans la caractérisation des matroïdes ternaires sans mineur  $M(K_4)$ .

### Système de Steiner $S(t, k, v)$ .

Le système de Steiner  $S(t, k, v)$  est une paire  $(S, \mathcal{D})$  où  $S$  est un ensemble de cardinalité  $v$  et  $\mathcal{D}$  est un ensemble de parties de  $S$  de cardinalité  $k$  tel que tout sous-ensemble de  $S$  de cardinalité  $t$  est contenu dans un unique élément de  $\mathcal{D}$ .

A tout système de Steiner  $(S, \mathcal{D})$ , on peut associer un matroïde  $M$  dont  $S$  est le support et dont l'ensemble des hyperplans (i.e. dépendant maximaux par inclusion de rang  $r(M) - 1$ ) est  $\mathcal{D}$ . Un hyperplan pour un matroïde est un fermé de rang  $r - 1$  où  $r$  est le rang du matroïde, c'est-à-dire un sous-ensemble d'éléments du matroïde de rang  $r - 1$  maximal. En général, un système de Steiner n'est pas entièrement défini par les paramètres  $t$ ,  $k$  et  $v$  sauf pour les systèmes de Steiner  $S(5, 6, 12)$ ,  $S(4, 5, 11)$ ,  $S(3, 4, 10)$  et  $S(2, 3, 9)$  qui sont uniques.

Dans la suite nous nous intéresserons plus particulièrement au matroïde de Steiner  $S(5, 6, 12)$  dont la représentation est donnée par la matrice à coefficients réels suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il intervient dans la caractérisation des matroïdes ternaires sans mineur  $M(K_4)$ . Un autre système de Steiner nous sera utile dans la suite, le système  $S(2, 3, 9)$ . L'unique matroïde correspondant à ce système est le matroïde correspondant à la géométrie affine  $AG(2, 3)$ . Ce matroïde est donné par la matrice suivante et est représenté à la Figure 1.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

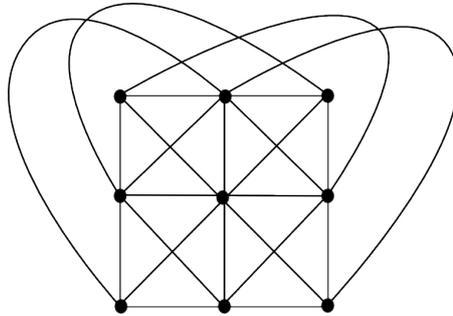


FIGURE 1.8 – Représentation géométrique du matroïde  $AG(2, 3)$

### Roue et whirls

Soit  $r \geq 3$ , la **roue** est le matroïde  $M(W_r)$  associé au graphe  $W_r$ . Lorsque le contexte sera clair, on le notera  $W_r$ . Notons  $E(W_r) = \{x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_r\}$  où  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  sont les rayons de la roue. Pour tout  $r \geq 2$ , la **whirl** de rang  $r$  est le matroïde obtenu à partir de  $M(W_r)$  et en ajoutant l'ensemble  $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$  à l'ensemble des indépendants. Comme  $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$  est un circuit-hyperplan de  $M(W_r)$  alors ce nouvel ensemble d'indépendants forme un matroïde de support  $E(M(W_r))$ . On le note  $W^r$ .

On peut vérifier que la roue de rang  $r$  et la whirl de rang  $r$  pour tout  $r \geq 3$  sont des matroïdes duaux l'un de l'autre, i.e.  $W_r^* = W^r$ .

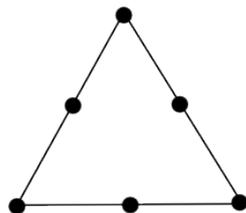


FIGURE 1.9 – Représentation géométrique de la whirl de rang 3

### 1.2.3 $k$ -somme de matroïdes

Nous allons maintenant introduire certaines opérations similaires à la clique-sum pour les matroïdes.

La première est la somme directe de deux matroïdes.

**Proposition 1.7**

Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux matroïdes de support disjoint et non vide  $E_1$  et  $E_2$  respectivement. Alors l'ensemble  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2)$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde de support  $E_1 \cup E_2$ , appelé la **somme directe** de  $M_1$  et  $M_2$  et est noté  $M_1 \oplus M_2$ .

Si  $M_1 = M(G_1)$  et  $M_2 = M(G_2)$  sont des matroïdes graphiques alors  $M_1 \oplus M_2$  correspond au matroïde  $M(G_1 \oplus_1 G_2)$ . Notons que,  $M(G_1 \oplus_1 G_2) = M(G_1 \sqcup G_2)$  où  $G_1 \sqcup G_2$  correspond à l'union disjointe des deux graphes.

Cette opération se généralise directement à l'ordre 2 de la manière suivante.

**Proposition 1.8**

Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux matroïdes de support non-vide  $E_1$  et  $E_2$  respectivement tels que  $E_1 \cap E_2 = \{p\}$ , alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(M_1 \setminus p) \cup \mathcal{C}(M_2 \setminus p) \cup \{C_1 \Delta C_2 : C_i \in \mathcal{C}(M_i), \text{ for } i = 1, 2\}$$

est l'ensemble des circuits d'un matroïde de support  $E_1 \Delta E_2$ , appelé la **2-somme** de  $M_1$  et  $M_2$  et est noté  $M_1 \oplus_2 M_2$ .

Étant donné deux matroïdes graphiques  $M_1 = M(G_1)$  et  $M_2 = M(G_2)$  tels que  $E(M_1) \cap E(M_2) = \{p\}$  alors  $M_1 \oplus_2 M_2$  est le matroïde associé au graphe  $(G_1 \oplus_2 G_2) \setminus p$ .

Les propositions suivantes relient la notion de somme directe et de 2-somme à la notion de séparation dans les matroïdes à la manière de la Proposition 1.3 pour les graphes.

**Proposition 1.9** (Seymour, 1981, [66])

Si  $(X, Y)$  est une 1-séparation de  $M$  alors  $M$  est la somme directe de  $M|_X$  et  $M|_Y$ ; inversement, si  $M$  est la somme directe de  $M_1$  et  $M_2$  alors  $(E(M_1), E(M_2))$  est une 1-séparation de  $M$ .

**Proposition 1.10** (Seymour, 1981, [66])

Si  $(X, Y)$  est une 2-séparation exacte de  $M$  alors il existe deux matroïdes  $M_1$  et  $M_2$  définis sur  $X \cup \{z\}$  et  $Y \cup \{z\}$  respectivement tels que  $M = M_1 \oplus_2 M_2$ . Inversement, si  $M = M_1 \oplus_2 M_2$  alors  $(E(M_1) \setminus E(M_2), E(M_2) \setminus E(M_1))$  est une 2-séparation exacte de  $M$ .

Ainsi un matroïde  $M$  n'est pas 2-connexe si et seulement s'il existe deux matroïdes  $M_1$  et  $M_2$  non vides tels que  $M = M_1 \oplus_2 M_2$ . De la même manière, Seymour a prouvé que l'on a une propriété similaire pour la 3-connexité.

**Proposition 1.11** (Seymour, 1981, [66])

Un matroïde 2-connexe  $M$  n'est pas 3-connexe si et seulement s'il existe  $M_1$  et  $M_2$  tels que  $M = M_1 \oplus_2 M_2$ .

Cette relation entre séparation et 1- et 2-somme n'a pas d'équivalent pour les matroïdes 3-connexe. Néanmoins, dans le cas particulier des matroïdes binaires, Seymour [66] a introduit l'opération de 3-somme et a prouvé une relation similaire à celle des propositions précédentes pour ces opérations.

**Proposition 1.12** (Seymour, 1981, [66])

Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux matroïdes binaires tels que  $E_1 \cap E_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$ . Soit  $\mathcal{C}'$  l'ensemble

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C}(M_1 \setminus E_2) \cup \mathcal{C}(M_2 \setminus E_1) \cup \{C_1 \Delta C_2 : C_i \in \mathcal{C}(M_i) \text{ for } i = 1, 2\}.$$

et soit  $C$  l'ensemble des éléments minimaux de  $\mathcal{C}'$  pour l'inclusion. Alors  $C$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde binaire  $M$  sur l'ensemble  $E_1 \Delta E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$ . Si  $E_1 \cap E_2$  ne contient pas de cocircuit de  $M_1$  ou  $M_2$  alors  $M$  est appelé la **3-somme** de  $M_1$  et  $M_2$  et est noté  $M_1 \oplus_3 M_2$ .

La proposition suivante relie cette définition de 3-somme avec la notion de 3-séparation.

**Proposition 1.13** (Seymour, 1981, [66])

Si  $(X, Y)$  est une 3-séparation exacte d'un matroïde binaire  $M$  avec  $|X|, |Y| \geq 4$ , et soit  $Z$  un ensemble de taille 3 disjoint de  $E(M)$  alors il existe deux matroïdes binaires  $M_1$  et  $M_2$  sur  $X \cup Z$  et  $Y \cup Z$  respectivement, tels que  $M = M_1 \oplus_3 M_2$ . Réciproquement si  $M$  est une 3-somme de  $M_1$  et  $M_2$  alors  $(E(M_1) \setminus E(M_2), E(M_2) \setminus E(M_1))$  est une 3-séparation exacte de  $M$  et  $|E(M_1) \setminus E(M_2)|, |E(M_2) \setminus E(M_1)| \geq 4$ .

---

# Mineurs de graphes et de matroïdes

*Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie des mineurs de graphes et de matroïdes qui occupera une place importante dans la suite du manuscrit.*

## 2.1 Introduction

Ce chapitre constitue une introduction à la théorie des mineurs de graphes et de matroïdes. Soit  $G$  un graphe. Un **mineur**  $H$  de  $G$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  via une succession finie d'opérations de contractions et de suppressions d'arêtes et de suppressions de sommets. De manière équivalente, on peut voir un mineur comme une fonction  $f : V(H) \rightarrow \mathcal{P}(V(G))$  telle que pour tout  $v \in V(H)$ ,  $f(v)$  induit une composante connexe de  $G$  et pour tout  $u \in V(H)$ , si  $u$  et  $v$  sont adjacents alors il existe une arête avec une extrémité dans  $f(u)$  et une extrémité dans  $f(v)$ .

La théorie des mineurs est apparue dans les années 1930 et se développe autour des travaux de Robertson et Seymour entre les années 1980 et 2012 (Graph Minors I - XXIII). Dans ces travaux, la notion de classe de graphe close par la relation de mineur joue un rôle prépondérant. Dans la Section 2.2, nous allons étudier ces classes de graphes closes par mineur puis leur structure dans la Section 2.3. Dans la Section 2.4, nous verrons des conditions suffisantes pour l'existence de mineurs enracinés, c'est-à-dire de mineurs dont on a fixé un certain ensemble de sommets. Dans la Section 2.5, nous verrons comment une densité élevée d'arêtes dans un graphe permet de justifier l'existence de certains mineurs dans les graphes. Enfin, dans la Section 2.6, nous étudierons certains invariants associés à certaines classes de graphes topologiques.

## 2.2 Classes de graphes et de matroïdes closes par mineur

Soit  $\mathcal{C}$  une classe de graphe. On dit que  $\mathcal{C}$  est une classe de graphes **close par mineur** si pour tout graphe  $G \in \mathcal{C}$ , tous les mineurs de  $G$  appartiennent à  $\mathcal{C}$ . Un **mineur exclu** pour la classe  $\mathcal{C}$  est un graphe  $E$  tel que  $E \notin \mathcal{C}$  et pour tout mineur strict (i.e. un

mineur strictement plus petit)  $H$  de  $E$ ,  $H \in \mathcal{C}$ . De nombreuses et importantes classes de graphes sont closes par mineur, notamment les graphes planaires (et plus généralement les graphes plongeables dans les surface) ainsi que certaines classes de graphes topologiques (arbres, graphes planaires externes, graphes sans entrelacs, sans noeuds, ...).

Un **bel ordre**  $\leq$  sur un ensemble  $X$  est un ordre partiel sur  $X$  tel que, pour toute suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$ , il existe  $i$  et  $j$  tels que  $i < j$  et  $x_i \leq x_j$ . On dira qu'une classe est **bien-quasi-ordonnée** pour la relation  $\leq$  si  $\leq$  est un bel ordre pour cette classe. Une question importante était de savoir si la relation de mineur formait un bel ordre pour la classe des graphes. Kruskal a montré que c'était le cas pour les arbres.

**Théorème 2.1** (Kruskal, 1960, [43])

*Les arbres finis sont bien-quasi-ordonnés par la relation de mineur.*

Mais le théorème fondamental dans la théorie des mineurs de graphes est le suivant, qui généralise le théorème précédent à l'ensemble des graphes.

**Théorème 2.2** (Robertson & Seymour, 2004, [59])

*Les graphes sont bien-quasi-ordonnés pour la relation de mineur.*

En particulier cela implique l'inexistence d'antichaînes infinies où une antichaîne est dans ce cas un ensemble de graphes  $A$  tels que pour tout  $H$  et  $G$  dans  $A$ , si  $H$  est un mineur de  $G$  alors les graphes  $H$  et  $G$  sont isomorphes. Autrement dit, il ne peut exister un ensemble infini d'éléments incomparables pour la relation de mineur. On peut donc reformuler le Théorème 2.2 de la manière suivante.

**Théorème 2.3** (Robertson & Seymour, 2004, [59])

*Toute classe de graphe close par mineur est caractérisée par un ensemble fini de mineurs exclus.*

Néanmoins la preuve de ce théorème n'est pas constructive et ne permet donc pas de donner la liste des mineurs exclus. La liste est connue uniquement pour certaines classes de graphes closes par mineur. On donne un petit aperçu de telles caractérisations.

**Théorème 2.4** (Folklore)

*Un graphe est un arbre si et seulement s'il ne contient pas  $K_3$  comme mineur.*

**Théorème 2.5** (Chartrand & Harary, 1967, [16])

*Un graphe est planaire externe si et seulement s'il ne contient pas  $K_4$  ou  $K_{2,3}$  comme mineur.*

La liste ne serait pas complète sans la célèbre caractérisation des graphes planaires dûe à Kuratowski et Wagner.

**Théorème 2.6** (Wagner, 1937, [80])

*Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  comme mineur.*

La preuve de ce théorème se base sur le théorème suivant de Kuratowski.

**Théorème 2.7** (Kuratowski, 1930, [15])

*Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas une subdivision  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  comme sous-graphe.*

Notons que cette dernière caractérisation ne fait pas intervenir la relation d'inclusion comme mineur mais comme subdivision. En particulier, toute classe caractérisée par un ensemble fini de mineurs exclus  $\mathcal{M}$  peut être aussi caractérisée par un ensemble  $\mathcal{S}$  de sous-graphes exclus à subdivision près. Pour cela on considère toutes les combinaisons possibles de remplacement des sommets du mineur par un arbre ne contenant pas de sommets de degré 2 et dont le nombre de feuilles correspond au degré du sommet du mineur. Comme il n'existe qu'un nombre fini de tels arbres et qu'il n'y a qu'un nombre fini de mineurs, alors cette liste est finie. Il est maintenant facile de prouver que tout graphe contenant un élément de  $\mathcal{M}$  comme mineur contient aussi une subdivision d'un élément de  $\mathcal{S}$  comme sous-graphe.

Ce dernier théorème a plusieurs généralisations possibles. L'une consiste à regarder les graphes plongés dans les surfaces de genre  $g$ . En effet l'ensemble des graphes plongeables dans une surface de genre  $g$  fixé est une famille de graphes close par mineur. Archdeacon et Huneke [5] ont montré que dans le cas des surfaces non-orientées, cette famille est caractérisée par un ensemble fini de mineurs exclus. Robertson et Seymour [58] l'ont ensuite montré dans le cas des surfaces orientées. Ce dernier théorème joue un rôle prépondérant dans la preuve de leur théorème de structure des graphes sans mineur  $H$ . Néanmoins caractériser explicitement les mineurs exclus pour les graphes plongeables dans les surfaces de genre  $g$  reste très difficile du fait de l'explosion du nombre de mineurs exclus. Par exemple, Glover, Huneke et Wang [30] ont montré qu'un graphe était plongeable dans le plan projectif si et seulement s'il ne contenait pas un des 35 mineurs exclus pour cette classe. Dans le cas orienté, le nombre de mineurs exclus est encore plus grand : le nombre de mineurs exclus pour la classe des graphes plongeables dans le tore est supérieur à 16000 et la liste n'est probablement pas exhaustive [29].

Une autre possibilité de généraliser le théorème de Wagner est de généraliser la notion de planarité en dimension supérieure. Une telle généralisation pourrait être de considérer les graphes sans entrelacs. Le théorème suivant montre que dans ce cas-là, le nombre de mineurs exclus reste raisonnable.

**Théorème 2.8** (Robertson, Seymour & Thomas, 1930, [15])

*Un graphe est sans entrelacs si et seulement s'il ne contient pas de graphe de la famille de Petersen comme mineur (cf. Figure 2.1).*

Une telle caractérisation pour les graphes sans noeuds reste ouverte.

Ce type de caractérisation par mineurs exclus peut s'étendre aux matroïdes. Un cas in-

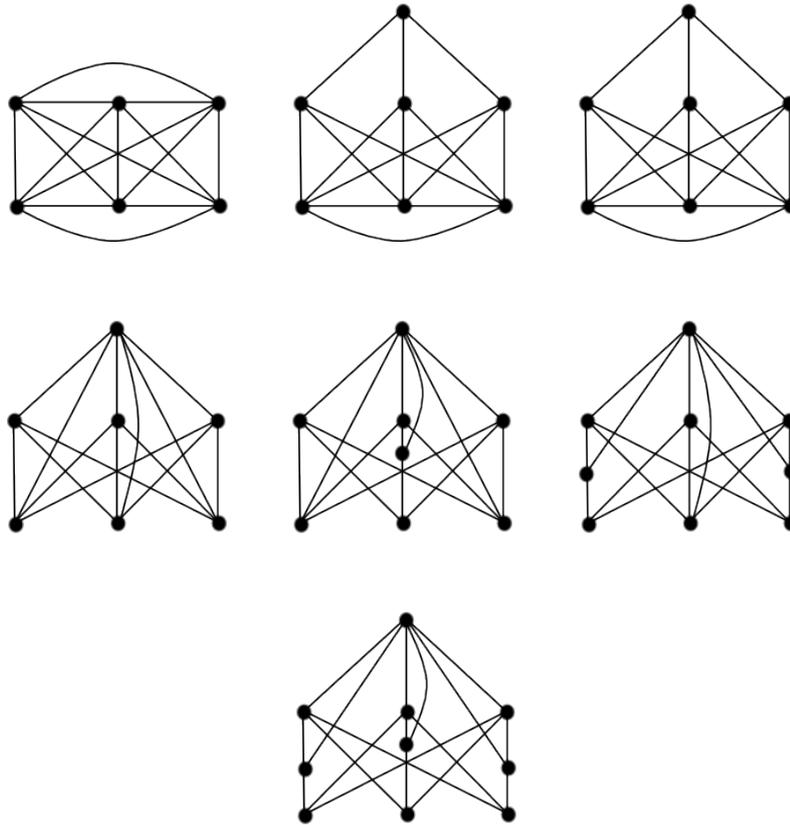


FIGURE 2.1 – *Famille de Petersen*

téressant de famille close par mineur correspond à l'ensemble des matroïdes représentables sur un corps  $\mathbb{F}$ . En effet, l'opération de suppression d'un élément correspond alors à la suppression d'une colonne et donc préserve la représentabilité du matroïde. De plus nous avons vu dans le Chapitre 1 que l'opération de contraction est l'opération duale de l'opération de suppression et que le passage au dual préserve la représentabilité. On peut donc en déduire que l'opération de contraction préserve la représentabilité du matroïde.

Contrairement au cas des graphes, le Théorème 2.3 est faux dans le cas général des matroïdes. Considérons par exemple l'ensemble des matroïdes représentables sur le corps  $\mathbb{R}$ . Cette famille est close par mineur d'après la remarque précédente. Néanmoins la relation de mineur n'est pas un bel ordre. Dans la suite, nous noterons  $I_p$  la matrice identité de taille  $p \times p$  et par  $J_p$  la matrice  $p \times p$  composé uniquement de 1. En effet, si l'on considère l'ensemble des matrices de la forme  $[I_{p+1} | J_{p+1} - I_{p+1}]$  à coefficients dans le corps fini  $\text{GF}(p)$  où  $p$  est un nombre premier différent de 2. Les matroïdes associés à ces matrices sont des mineurs exclus pour la représentabilité sur  $\mathbb{R}$  [44].

Néanmoins, dans le cas de la représentabilité sur un corps fini, le problème est plus simple. Pour les corps finis de petite caractéristique, des caractérisations explicites par mineurs exclus ont été données.

**Théorème 2.9** (Tutte, 1958, [75])

*Un matroïde est binaire si et seulement s'il ne contient pas  $U_{2,4}$  comme mineur.*

**Théorème 2.10** (Reid & Bixby, [11])

*Un matroïde est ternaire si et seulement s'il ne contient pas  $U_{2,5}$ ,  $U_{3,5}$ ,  $F_7$  et  $F_7^*$  comme mineur.*

En 2000, Geelen, Oxley, Vertigan et Whittle [35] ont donné explicitement la liste des mineurs exclus pour les matroïdes quaternaires. On peut encore citer les théorèmes suivants qui sont des résultats classiques en théorie des matroïdes.

**Théorème 2.11** (Tutte, 1958, [75])

*Un matroïde est graphique si et seulement s'il ne contient pas  $U_{2,4}$ ,  $F_7$ ,  $F_7^*$ ,  $M^*(K_5)$  ou  $M^*(K_{3,3})$  comme mineur.*

**Théorème 2.12** (Tutte, 1958, [75])

*Un matroïde est régulier si et seulement s'il ne contient pas  $U_{2,4}$ ,  $F_7$  et  $F_7^*$  comme mineur.*

Notons que certaines classes de matroïdes sont beaucoup plus compliquées à caractériser que dans le cas des graphes. Prenons par exemple la classe des graphes sans mineur  $K_4$ . Cette classe est caractérisée très simplement par le Théorème 2.5. Caractériser les matroïdes sans mineur  $M(K_4)$  reste un important problème ouvert dans la théorie des matroïdes. Dans le cas des matroïdes binaires, Brylawski [12] a montré que la classe des matroïdes binaires sans mineur  $M(K_4)$  correspondait à la classe des matroïdes obtenus à partir des graphes série-parallèles, étendant ainsi directement le Théorème 2.5.

Bien plus récemment (2013), Geelen, Gerards et Whittle ont annoncé avoir prouvé que les matroïdes représentables sur un corps fini peuvent être caractérisés par un ensemble fini de mineurs exclus, étendant ainsi le Théorème 2.3. Néanmoins à la manière du Théorème 2.3, la démonstration n'est pas constructive et ne fournit donc pas la liste de mineurs exclus.

## 2.3 Classes de graphes et de matroïdes excluant un certain mineur

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la classe des graphes excluant un certain mineur. En effet, l'ensemble des graphes excluant un même mineur  $H$  forme une classe de graphe close par mineur par définition. On va s'intéresser à la structure de ces classes notamment lorsque  $H$  est un graphe complet. Par exemple, l'ensemble des forêts est une classe de graphe close par mineur. Comme une forêt est un graphe sans cycle, il est facile de voir qu'un graphe est une forêt si et seulement si ce graphe ne contient pas  $K_3$  comme mineur. Ainsi l'ensemble des graphes sans mineur  $K_3$  correspond à l'ensemble des forêts et l'unique mineur exclu de cette classe est le triangle. Plus généralement, le théorème de Robertson et Seymour affirme que pour toute classe de graphes close par mineur, il existe un nombre fini de mineurs exclus [59].

Regardons premièrement la caractérisation des graphes sans mineur  $K_t$ . Nous avons vu que la classe des graphes sans mineur  $K_3$  est la classe des arbres. Le théorème suivant est dû à Dirac et prouve une caractérisation structurelle des graphes sans mineurs  $K_4$ .

**Théorème 2.13** (Dirac, 1952, [24])

*Tout graphe sans mineur  $K_4$  peut être obtenu à partir de copies de  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  par 0-, 1- et 2-sommes.*

Les éléments connexes de cette classe de graphes correspondent de manière équivalente à la classe des graphes série-parallèles. Étant donné deux graphes connexes avec deux sommets spéciaux  $u, v$  et  $u', v'$  respectivement, on définit deux opérations :

- la connexion parallèle obtenue en identifiant les sommets  $u$  et  $u'$  puis  $v$  avec  $v'$ .
- la connexion série obtenue en identifiant  $v$  avec  $u'$ .

Ces deux opérations engendrent un graphe dont deux sommets sont spéciaux (dans le premier cas les sommets résultant des identifications et dans le deuxième cas les sommets  $u$  et  $v'$ ). Ainsi on peut poursuivre ces opérations récursivement. La classe des graphes série-parallèle correspond aux graphes obtenus à partir de copies de  $K_2$  et des opérations de connexion série et parallèles. Notons de plus que la 2-somme de deux  $K_3$  correspond à une opération de connexion parallèle.

De la même manière, les graphes sans mineur  $K_5$  ont été caractérisés par Wagner.

**Théorème 2.14** (Wagner, 1937, [80])

*Tout graphe sans mineur  $K_5$  peut être obtenu à partir de copies de graphes planaires et du graphe  $V_8$  (représenté à la Figure 2.2) par 0-, 1-, 2- et 3-sommes.*

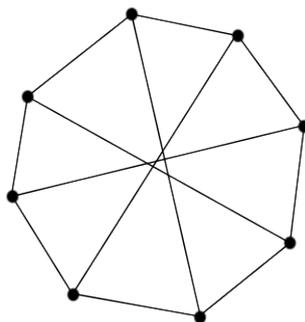


FIGURE 2.2 – Le graphe de Wagner  $V_8$ .

\*

On peut aussi caractériser les graphes sans mineur  $K_{3,3}$  de manière similaire.

**Théorème 2.15** (Hall, 1943, [32])

*Tout graphe sans mineur  $K_{3,3}$  peut être obtenu à partir de copies de graphes planaires et du graphe  $K_5$  par 0-, 1- et 2-sommes.*

La caractérisation des graphes sans mineur  $K_t$  pour  $t \geq 6$  est un problème ouvert important en théorie des graphes. Diverses autres caractérisations ont été obtenues, par exemple pour les graphes ne possédant pas le cube comme mineur (Maharry, [49]) ou encore l'octaèdre (Ding, [23]).

Notons que le Théorème 2.3 ne fournit qu'une approximation de ce à quoi la classe des graphes sans mineur  $H$  ressemble et non une caractérisation précise. Pour introduire

cette approximation, nous avons besoin d'une définition supplémentaire. On pourra se référer à [45] pour plus de détails. Soit  $C$  un cycle et  $k$  un entier. Soit  $\mathcal{F}$  une famille de chemins de  $C$  telle que chaque sommet de  $C$  est contenu dans au plus  $k$  chemins. Pour chaque chemin de  $\mathcal{F}$ , on ajoute un sommet relié à un nombre arbitraire de sommets du chemin. Enfin pour toute paire de sommets ajoutés à l'étape précédente, on peut ajouter une arête entre ces deux sommets si les chemins correspondant à ces deux sommets ont une intersection non-nulle. On appelle cette opération, ajouter un **vortex** de largeur  $k$  à  $C$ .

On peut alors définir la classe de graphes  $\mathcal{L}_k$ , où  $k$  est un entier positif. La construction suivante définit les éléments de base de la classe.

1. On part d'un graphe  $G$  plongé dans une surface de genre  $k$  où toutes les faces sont homéomorphes à un disque.
2. On ajoute un vortex à au plus  $k$  faces de ce graphe.
3. On ajoute au plus  $k$  sommets reliés à un nombre de sommets quelconque de  $G$ .

La classe  $\mathcal{L}_k$  est alors contruite à partir des graphes construits précédemment par clique-somme de taille au plus  $k$ .

Robertson et Seymour ont alors prouvé le théorème suivant.

**Théorème 2.16** (Robertson & Seymour)

*Soit  $\mathcal{C}_H$  la classe des graphes excluant  $H$  comme mineur. Alors il existe  $k > 0$ , tel que  $\mathcal{C}_H \subseteq \mathcal{L}_k$ .*

Dans la suite nous allons introduire certains outils permettant de prouver ce type de résultats, notamment deux théorèmes fondamentaux dus à Tutte et Seymour.

On dit qu'un graphe  $G$  est obtenu à partir d'un graphe  $H$  en **splittant** un sommet si  $H$  est obtenu à partir de  $G$  en contractant une arête. Le **split** d'un sommet peut donc être vu comme l'opération inverse d'une contraction. Le théorème suivant est dû à Tutte et permet de caractériser les graphes simples 3-connexes.

**Théorème 2.17** (Tutte, 1961, [76])

*Tout graphe simple 3-connexe peut-être obtenu à partir d'une roue par les opérations répétées d'addition d'arêtes et de split de sommets.*

Seymour a prouvé que n'importe quel graphe simple 3-connexe peut être obtenu à partir de n'importe quel mineur 3-connexe (pas nécessairement d'une roue).

**Théorème 2.18** (Seymour, 1980, [66])

*Soit  $G$  un graphe et  $H$  un mineur simple et 3-connexe de  $G$  tel que si  $H$  est une roue, alors c'est la plus grande roue contenue comme mineur dans  $G$ . Alors il existe une suite  $G_0, G_1, \dots, G_n$  de graphes 3-connexe telle que  $G_0 = H$  et  $G_n = G$ , et telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $M_i$  est obtenu à partir de  $M_{i-1}$  en ajoutant une arête ou en splittant un sommet.*

Ce théorème permet de fournir une preuve aux Théorèmes 2.13 et 2.15.

Notons que pour les  $k$ -somme où  $k$  est petit, l'existence d'un mineur du graphe final peut être déduit de l'existence d'un tel mineur dans les graphes composant la  $k$ -somme. Plus précisément, on a le lemme suivant.

**Lemme 2.19**

*Soit  $G$  un graphe  $k$ -connexe avec  $k \leq 2$ . Si  $G = G_1 \oplus_k G_2$  alors  $G_1$  et  $G_2$  sont des mineurs stricts de  $G$ .*

PREUVE . Si  $k \leq 1$ , alors il est immédiat de voir que  $G_1$  et  $G_2$  sont des mineurs stricts de  $G$ . Supposons donc que  $k = 2$  et notons par  $u$  et  $v$  les sommets de  $G_1 \cap G_2$ . Comme  $G$  est 2-connexe, il existe un cycle contenant les sommets  $u$  et  $v$ . En considérant le chemin obtenu en restreignant ce cycle à  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) respectivement, on a alors que  $G_2$  (resp.  $G_1$ ) est un mineur strict de  $G$ .  $\square$

En règle générale, pour des  $k$ -sommés avec  $k > 3$ , ce théorème n'est plus vérifié.

Le lemme suivant fournit une relation entre petites séparations et  $k$ -sommés.

**Lemme 2.20**

*Soit  $(A, B)$  une  $k$ -séparation d'un graphe  $G$  avec  $k \leq 2$ . Alors  $G$  peut être écrit comme la  $k$ -somme de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  qui sont des mineurs stricts de  $G$ .*

PREUVE . On considère  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) le graphe obtenu à partir de  $G[A]$  (resp.  $G[B]$ ) en ajoutant une arête entre toutes les paires de sommets de  $A \cap B$ . Il est alors facile de voir que  $G = G_1 \oplus G_2$ . De plus, par le Lemme 2.19,  $G_1$  et  $G_2$  sont des mineurs stricts de  $G$ .  $\square$

De ces deux lemmes, nous pouvons déduire un théorème général sur la caractérisation des graphes 3-connexes sans mineur  $H$ .

**Lemme 2.21**

*Soit  $H$  un graphe 3-connexe. Alors tout graphe sans mineur  $H$  peut être obtenu par 0-, 1- et 2-sommés à partir de graphes de l'ensemble  $\{K_1, K_2, K_3\} \cup \mathcal{E}x(H)$  où  $\mathcal{E}x(H)$  est l'ensemble des graphes 3-connexes ne contenant pas  $H$  comme mineur.*

PREUVE . Si  $G$  est obtenu par 2-sommés de graphes de l'ensemble  $\{K_1, K_2, K_3\} \cup \mathcal{E}x(H)$  alors par le Lemme 2.19,  $H$  n'est pas un mineur de  $G$ .

Réciproquement, soit  $G$  un graphe ne contenant pas  $H$  comme mineur. Si  $G \notin \{K_1, K_2, K_3\} \cup \mathcal{E}x(H)$ , on note par  $k$  le plus petit entier tel qu'il existe une  $k$ -séparation de  $G$ . Comme  $G$  n'est pas 3-connexe, on a  $k \leq 2$ . De plus par minimalité de  $k$ ,  $G$  est  $k$ -connexe. Par le Lemme 2.3,  $G$  aurait pu s'écrire comme la  $k$ -somme de deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  avec  $S = V(G_1) \cap V(G_2)$ . En répétant cette opération, on montre que tout graphe sans mineur  $H$  est obtenu par 0-, 1- et 2-sommés de graphes de l'ensemble  $\{K_1, K_2, K_3\} \cup \mathcal{E}x(H)$ .  $\square$

On peut aussi prouver le lemme suivant (cf. [23] pour une preuve).

**Lemme 2.22**

*Soit  $H$  un graphe 4-connexe. Alors tout graphe sans mineur  $H$  peut être obtenu par 0-,*

1-, 2- et 3-sommes à partir de graphes de l'ensemble  $\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \cup \mathcal{E}x(H)$  où  $\mathcal{E}x(H)$  est l'ensemble des graphes intérieurement 4-connexe ne contenant pas  $H$  comme mineur.

Soit  $\mathcal{F}$  une classe de graphes close par mineur. Un **splitter**  $H$  pour la classe  $\mathcal{F}$  est un graphe de  $\mathcal{F}$ , 3-connexe, non-isomorphe à une roue et tel que tout graphe 3-connexe obtenu à partir de  $H$  en ajoutant une arête ou splittant un sommet n'appartienne pas à  $\mathcal{F}$ . Par exemple,  $V_8$  est un splitter pour la classe des graphes sans mineur  $K_5$ . On peut voir ces graphes comme les éléments maximaux de la famille  $\mathcal{F}$  et on peut alors reformuler le Théorème 2.18 de la manière suivante.

**Théorème 2.23**

*Soit  $\mathcal{F}$  une classe de graphes close par mineur et  $H$  un splitter de la classe  $\mathcal{F}$ . Alors tout graphe  $G \in \mathcal{F}$  peut-être obtenu à partir de graphes de  $\mathcal{F}$  ne contenant pas de mineur  $H$  et de copies du graphe  $H$  par 0-, 1- et 2-sommes.*

On donne dans la suite une idée rapide de la preuve de ce théorème. PREUVE . Soit  $G \in \mathcal{F}$  et  $H$  un splitter de  $\mathcal{F}$ . En décomposant le graphe le long de ses petits séparateurs et en appliquant le Lemme 2.3, on peut supposer que  $G$  est 3-connexe. Si  $G$  ne contient pas de mineur  $H$  alors le théorème est vérifié. Si  $G$  contient un mineur  $H$  alors par le Théorème 2.18,  $G$  peut être obtenu à partir de  $H$  par des opérations d'ajout d'arêtes et de split de sommets. Or comme  $H$  est maximal pour ces opérations (par définition d'un splitter), on en déduit que  $G \simeq H$ , ce qui prouve le théorème.  $\square$

Pour prouver le Théorème 2.13, il suffit donc de montrer que  $\mathcal{E}x(H) = \emptyset$ .

PREUVE DU THÉORÈME 2.13. Soit  $G$  un graphe sans mineur  $K_4$ . Par le Lemme 2.21, on peut supposer que  $G$  est 3-connexe. Par le Théorème 2.17,  $G$  contient une roue de taille au moins 3 comme mineur et contient donc  $W_3 = K_4$  comme mineur. On en déduit donc que  $\mathcal{E}x(H) = \emptyset$ , ce qui conclût la preuve par le Lemme 2.21.  $\square$

La preuve du Théorème 2.15 de Hall est similaire à celle donnée dans la preuve du Théorème 2.13 mais utilise le Théorème 2.18 plutôt que le Théorème 2.17. Notons que la preuve aurait aussi bien pu utiliser le Théorème 2.23. En effet la preuve consiste uniquement à prouver que  $K_5$  est un splitter pour la classe des graphes sans mineur  $K_{3,3}$ .

PREUVE DU THÉORÈME 2.15. Soit  $G$  un graphe sans mineur  $K_{3,3}$ . Par le Lemme 2.21, on peut supposer que  $G$  est 3-connexe. Si  $G$  est planaire alors on a fini. Supposons donc que  $G$  ne soit pas planaire, par le Théorème 2.6,  $G$  contient un mineur  $K_5$ . Si  $G$  est isomorphe à  $K_5$  alors on a fini. Supposons donc que  $G$  ne soit pas isomorphe à  $K_5$ . Par le Théorème 2.18,  $G$  peut être obtenu à partir de  $K_5$  par des opérations d'addition d'arêtes et de split de sommets. Comme  $K_5$  est un graphe complet, la première opération est une opération de split. Par symétrie, on peut choisir n'importe quel sommet de  $K_5$  et comme le graphe obtenu doit être 3-connexe, il existe une unique possibilité de splitter ce sommet. Il est facile alors de vérifier que le graphe obtenu contient un mineur  $K_{3,3}$ . On en déduit donc que  $\mathcal{E}x(K_{3,3}) = K_5 \cup \{G : G \text{ planaire 3-connexe}\}$ , ce qui conclût la preuve par le Lemme 2.21.  $\square$

Enfin, on peut montrer le Théorème 2.14 en utilisant le Lemme 2.22 et en remarquant

que tout graphe intérieurement 4-connexe et contenant un mineur  $K_{3,3}$  contient un mineur  $V_8$  (cf. [71] pour une preuve).

Dans le cas des matroïdes, les résultats sur les graphes peuvent être étendus directement. En effet, les Théorèmes 2.17 et 2.18 peuvent en fait s'énoncer plus généralement dans le cadre des matroïdes. Une **1-extension** d'un matroïde  $M$  est un matroïde  $M'$  tel qu'il existe  $e \in E(M')$  tel que  $M' \setminus e \simeq M$ . De la même manière, une **1-coextension** d'un matroïde  $M$  est un matroïde  $M'$  tel qu'il existe  $e \in E(M')$  tel que  $M'/e \simeq M$ .

**Théorème 2.24** (Tutte, 1961, [76])

*Soit  $M$  un matroïde 3-connexe à au moins 4 éléments. Alors il existe une suite de matroïdes 3-connexes  $M_0, M_1, \dots, M_k$  où  $M_0$  est une roue de rang 3 ou une whirl de rang 3,  $M_k = M$  et  $M_i$  est une 1-extension ou une 1-coextension de  $M_{i-1}$ .*

**Théorème 2.25** (Seymour, 1980, [66])

*Soit  $M$  un matroïde 3-connexe et  $N$  un mineur 3-connexe de  $M$  tel que si  $N$  est une roue ou une whirl, c'est la plus grande roue ou whirl contenue comme mineur de  $M$ . Alors il existe une suite de matroïdes 3-connexes  $M_0, M_1, \dots, M_k$  où  $M_0 = N$ ,  $M_k = M$  et  $M_i$  est une 1-extension ou une 1-coextension de  $M_{i-1}$ .*

De plus, à la manière des graphes, la somme de matroïde se comporte bien pour la relation mineur.

**Théorème 2.26** (Folklore)

*Si  $M = M_1 \oplus_k M_2$  avec  $k \leq 2$  alors  $M_1$  et  $M_2$  sont des mineurs propres de  $M$ .*

PREUVE . Si  $k = 1$  la preuve est immédiate par définition car  $M_1$  et  $M_2$  sont alors des sous-matroïdes de  $M$ . Supposons donc que  $k = 2$ . On note alors par  $p$  l'élément de  $M_1 \cap M_2$ . Par définition,  $p$  n'est ni une boucle ni une coboucle dans  $M_2$  donc il existe un circuit  $C$  de  $M_2$  contenant  $p$  et de taille au moins 2. Soit  $q \in C - \{p\}$ . Alors le matroïde  $M \setminus (E(M_2) - C) / (C \setminus \{p, q\})$  est isomorphe à  $M_1$ . On en déduit que  $M_1$  est un mineur de  $M$  et par symétrie que  $M_2$  est aussi un mineur de  $M$ .  $\square$

Pour le cas des  $k$ -sommes avec  $k \geq 3$ , cette propriété n'est plus vraie en général. Néanmoins Seymour l'a étendue dans le cas des matroïdes binaires.

**Théorème 2.27** (Seymour, 1981, [66])

*Si  $M$  est un matroïde binaire et si  $M = M_1 \oplus_3 M_2$  alors  $M_1$  et  $M_2$  sont des mineurs propres de  $M$ .*

Le lemme suivant est l'équivalent du Lemme 2.3 dans le cas des matroïdes. Néanmoins la preuve n'est pas triviale au contraire du Lemme 2.3.

**Lemme 2.28** (Bixby, Cunningham, Seymour, [54])

*Un matroïde 2-connexe n'est pas 3-connexe si et seulement si  $M = M_1 \oplus_2 M_2$  où  $M_1$  et  $M_2$  sont isomorphes à deux mineurs stricts de  $M$ .*

On va introduire la notion de splitter pour les classes de matroïdes closes par mineur de la même manière que pour les graphes.

Soit  $\mathcal{F}$  une classe de matroïdes close par mineur. Un **splitter**  $N$  pour la classe  $\mathcal{F}$  est un matroïde de  $\mathcal{F}$ , 3-connexe, non-isomorphe à une roue ou à une whirl et tel que tout matroïde 3-connexe obtenu à partir de  $N$  par une 1-extension ou 1-coextention n'appartienne pas à  $\mathcal{F}$ .

On peut alors reformuler le Théorème 2.25 sous la forme suivante.

**Théorème 2.29**

*Soit  $\mathcal{F}$  une classe de matroïdes close par mineur et  $N$  un splitter de la classe  $\mathcal{F}$ . Alors tout matroïde  $M \in \mathcal{F}$  peut-être obtenu à partir de matroïdes de  $\mathcal{F}$  ne contenant pas de mineur  $N$  et de copies du matroïde  $N$  par 1- et 2-sommes.*

Ce dernier théorème permet en particulier de prouver le théorème suivant caractérisant les matroïdes binaires sans mineur  $F_7$ .

**Théorème 2.30** (Seymour, 1981, [66])

*Tout matroïde binaire sans mineur  $F_7$  peut-être obtenu par une séquence de 1- et 2-somme de matroïdes réguliers et de copies de  $F_7^*$ .*

PREUVE . Il suffit de montrer que  $F_7^*$  est un splitter pour la classe des matroïdes binaires sans mineur  $F_7$ . Clairement  $F_7^*$  ne contient pas de mineur  $F_7$ , est 3-connexe, et n'est pas isomorphe à une roue ou à une whirl. On va maintenant montrer que toute 1-extension ou 1-coextention 3-connexe de  $F_7^*$  contient un mineur  $F_7$ . La démonstration qui suit est inspirée de celle de Seymour [67].

La matrice de  $F_7^*$  sur  $GF(2)$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit  $M$  un matroïde 3-connexe obtenu par 1-extension de  $F_7^*$ . Comme les matroïdes binaires 3-connexes sont uniquement représentables sur  $GF(2)$  alors on peut supposer que  $M$  est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$$

Comme  $M$  est simple alors le vecteur  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  n'est pas une colonne de la matrice de  $F_7^*$ . On en déduit que ce vecteur doit être égal à l'un des vecteurs  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 1)$  et  $(0, 1, 1, 0)$ .

Il est alors facile de vérifier que toutes les matrices obtenues sont équivalentes, à transformations élémentaires près, à l'une de ces deux matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessus correspond alors au matroïde de la géométrie affine  $AG(3, 2)$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce dernier matroïde est appelé  $S_8$  dans la littérature. Ces deux matroïdes contiennent un mineur  $F_7$  obtenu en contractant l'élément 1 pour la première matrice et l'élément 4 dans la seconde matrice.

Considérons maintenant que  $M$  est une 1-coextension de  $F_7^*$ . Par dualité, cela revient à considérer une 1-extension de  $F_7$ . Mais en utilisant les mêmes arguments que précédemment, on peut voir qu'il n'existe pas de 1-extension de  $F_7$  qui soit un matroïde simple. On a donc que  $F_7^*$  est un splitter pour la classe des matroïdes sans mineur  $F_7$ .

On rappelle que par le résultat de Tutte (Théorème 2.12), un matroïde est régulier si et seulement s'il ne contient pas  $U_{2,4}$ ,  $F_7$  et  $F_7^*$  comme mineur. En appliquant le Théorème 2.30, on en déduit donc le résultat.  $\square$

Seymour a aussi obtenu une caractérisation des matroïdes réguliers. La preuve est compliquée et nous l'omettrons donc mais une partie importante de celle-ci consiste à montrer que  $R_{10}$  est un splitter pour la classe des matroïdes réguliers.

**Théorème 2.31** (Seymour, 1981, [66])

*Tout matroïde régulier peut-être obtenu par une séquence de 1-, 2- et 3-somme de matroïdes graphiques, co-graphiques et de copies de  $R_{10}$ .*

Notons que, à la manière des graphes, lorsque l'on considère des matroïdes représentables avec un connexité plus grande, la structure de ces matroïdes se simplifie.

Par exemple, en utilisant le Théorème 2.24 de Tutte, on peut immédiatement montrer que tout matroïde binaire 3-connexe contient un mineur  $M(K_4)$ .

Oxley a obtenu une caractérisation similaire pour les matroïdes ternaires 3-connexe sans mineur  $K_4$ .

**Théorème 2.32** (Oxley, 1987, [55])

*Tout matroïde ternaire 3-connexe sans mineur  $M(K_4)$  est soit isomorphe à une whirl  $W^r$ , au matroïde  $J$  ou à l'un des 15 mineurs 3-connexes du matroïde de Steiner  $S(5, 6, 12)$ .*

Dans le cas des matroïdes représentables sur  $GF(4)$ , Geelen, Oxley, Vertigan et Whittle [35] ont aussi obtenu une telle caractérisation.

## 2.4 Mineurs enracinés

Dans cette partie, nous allons étudier un type différent de mineurs : les mineurs enracinés. Soit  $G$  un graphe et  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  des sommets distincts de  $G$  et soit  $H$  un graphe sur l'ensemble  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . On dit que  $G$  contient un mineur  $H$  enraciné en  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  s'il existe des sous-graphes connexes  $H_1, H_2, \dots, H_k$  tels que  $v_i \in H_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$  et  $H_i$  est adjacent à  $H_j$  si et seulement si  $v_i$  et  $v_j$  sont adjacents dans  $H$ .

Pour les graphes  $H$  suffisamment petits, l'existence de tels mineurs enracinés peut être caractérisée complètement. Par exemple dans le cas de mineurs enracinés  $K_3$ , le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un tel mineur.

**Théorème 2.33** (Wood & Linusson, [82])

Soit  $a, b, c$  trois sommets distincts d'un graphe connexe  $G$ , alors soit :

- $G$  contient un mineur  $K_3$  enraciné en  $\{a, b, c\}$ , ou
- il existe un sommet  $v \in V(G)$  tel que au plus un élément de  $\{a, b, c\}$  appartient à chaque composante connexe de  $G \setminus v$ .

Un théorème similaire peut être obtenu dans le cas de mineurs enracinés  $K_4$ . Le théorème suivant est dû à Robertson et Seymour et Thomas [60] mais une caractérisation équivalente peut être trouvée dans un article de Fabila-Monroy et Wood [26] ainsi que chez Robertson et Seymour [57].

**Théorème 2.34** (Robertson, Seymour & Thomas, 1996, [60])

Soit  $G$  un graphe et  $v_1, v_2, v_3, v_4$  des sommets de  $G$ , alors soit

- $G$  contient un mineur  $K_4$  enraciné en  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , ou
- il existe une 3-séparation  $(A, B)$  de  $G$  avec  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq A$ , et  $|B \setminus A| \geq 2$ , ou
- $G$  peut être plongé dans un disque où  $v_1, v_2, v_3, v_4$  sont sur le bord du disque dans cet ordre.

Le problème de trouver un mineur enraciné est relié directement au problème de l'existence de chemins disjoints entre certaines paires de sommets. On dit qu'un graphe est  $k$ -**linked** si pour tout ensemble de  $2k$  sommets distincts  $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$ , il existe des chemins disjoints  $P_1, P_2, \dots, P_k$  tels que les extrémités de  $P_i$  soient  $s_i$  et  $t_i$  respectivement pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

Le Théorème 2.34 peut en fait être reformulé plus généralement de la manière suivante, caractérisant ainsi les graphes 2-linked.

**Théorème 2.35** (Robertson, Seymour & Thomas, 1996, [60])

Soit  $G$  un graphe et  $v_1, v_2, \dots, v_k$  des sommets de  $G$ , alors

- $G$  contient deux chemins sommet-disjoints dont les extrémités sont  $p_1 p_2$  et  $q_1 q_2$  de telle manière que la séquence ordonnée  $p_1 q_2 p_2 q_2$  apparaisse dans la séquence  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , ou bien

- il existe une 3-séparation  $(A, B)$  de  $G$  avec  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq A$ , et  $|B \setminus A| \geq 2$ , ou encore
- $G$  peut être plongé dans un disque où  $v_1, v_2, \dots, v_k$  sont sur le bord du disque dans cet ordre.

Un corollaire immédiat de ce théorème est le suivant, originalement prouvé par Jung [36].

**Corollaire 2.36** (Jung, 1970, [36])

*Tout graphe 4-connexe non-planaire est 2-linked.*

Bien plus généralement, Thomas et Wollan ont prouvé le théorème suivant.

**Théorème 2.37** (Thomas & Wollan, 2005, [72])

*Tout graphe  $2k$ -connexe avec au moins  $2k$  sommets et  $5kn$  arêtes est  $k$ -linked.*

Néanmoins la borne sur le nombre d'arêtes n'est pas optimale, par exemple dans le cas  $k = 2$ , comme le montre le corollaire précédent. Nous allons étudier ces bornes sur le nombre d'arêtes plus en détail dans la section suivante.

L'existence de certains mineurs permet aussi de prouver qu'un graphe est  $k$ -linked.

**Théorème 2.38** (Chen et al., 2005, [17])

*Si un graphe 6-connexe a un mineur  $K_9^-$  alors  $G$  est 3-linked.*

Chen et al. ont conjecturé que l'existence d'un mineur obtenu à partir de  $K_9^-$  en supprimant une arête est suffisante pour prouver qu'un graphe est 3-linked dans ce cas.

Enfin, la conjecture suivante est largement ouverte dans ce domaine.

**Conjecture 2.39**

*Tout graphe 8-connexe est 3-linked.*

## 2.5 Théorie extrémale et dégénérescence des classes de graphes closes par mineur

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux propriétés extrémales des classes de graphes excluant un certain mineur. Plus précisément, nous nous poserons la question de savoir à partir de quelle densité d'arête un graphe possède un certain mineur.

Ces bornes sur le nombre d'arêtes nous permettront par la suite de prouver l'existence de sommets de "petit" degré. On dira qu'un graphe est  $t$ -dégénéré si  $\delta(G) \leq k$ . Par exemple, on peut montrer que la classe des arbres est 1-dégénérée ou encore que la classe des graphes sans mineur  $K_4$  est 2-dégénérée (en utilisant la définition récursive des graphes série-parallèles).

Pour les graphes planaires simples, on peut montrer qu'ils sont 5-dégénérés en utilisant la formule d'Euler. Pour cela, soit  $G$  un graphe planaire simple. On note par  $n$  le nombre de sommets de  $G$ ,  $m$  le nombre d'arêtes de  $G$  et  $f$  le nombre de faces d'un plongement

planaire de  $G$ . La formule d'Euler affirme que  $n - m + f = 2$ . En remarquant qu'une arête est comprise dans au plus 2 faces et qu'une face est bordée par au moins 3 arêtes, on en déduit que  $f \leq \frac{2m}{3}$  et donc que  $m \leq 3n - 6$ . Ainsi les graphes planaires possèdent au plus  $3n - 6$  arêtes. Ce résultat peut se généraliser aux graphes sans mineur  $K_5$  en utilisant le Théorème 2.14.

On peut maintenant montrer que les graphes sans mineur  $K_5$  sont 5-dégénérés. Supposons par contradiction un graphe  $G$  sans mineur  $K_5$  tel que  $\forall v \in V(G), d(v) \geq 6$ . Comme  $m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq \frac{6n}{2} = 3n \geq 3n - 6$ , on en déduit que  $G$  contient un mineur  $K_5$ , ce qui contredit les hypothèses.

Notons que les graphes planaires qui atteignent la borne des  $3n - 6$  arêtes sont les graphes planaires maximaux, dont l'ajout d'une arête supprime leur planarité. Ces graphes sont donc triangulés (i.e. tels que toutes leurs faces soient des triangles).

Bien plus généralement, Mader a étendu ce résultat à la classe des graphes sans mineur  $K_r$ , pour  $3 \leq r \leq 7$ , de la manière suivante.

**Théorème 2.40** (Mader, 1968, [47])

*Pour  $3 \leq r \leq 7$ , tout graphe sans mineur  $K_r$  avec au moins  $r$  sommets a au plus  $(r - 2)n - \binom{r-1}{2}$  arêtes.*

Ce théorème permet en particulier de montrer que tout graphe sans mineur  $K_6$  (resp.  $K_7$ ) possède un sommet de degré au plus 7 (resp. 9).

La question naturelle qui suit ce théorème est de savoir si tout graphe sans mineur  $K_r$  possède  $(r - 2)n - \binom{r-1}{2}$  arêtes en général. Néanmoins cette propriété ne se vérifie pas pour  $r \geq 8$ . En effet, on peut construire une famille de contre-exemples pour le cas  $r = 8$ . Pour cela nous aurons besoin de la définition suivante.

Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Une  $(G, H, k)$ -**cockade** est un graphe construit récursivement de la manière suivante :

- $G$  et  $H$  sont des  $(G, H, k)$ -cockades.
- Soit  $N$  et  $M$  deux  $(G, H, k)$ -cockades alors le graphe obtenu à partir de  $N$  et  $M$  en identifiant une clique de taille  $k$  de  $N$  avec une clique de taille  $k$  de  $M$  est une  $(G, H, k)$ -cockade.

Lorsque  $G = H$ , on dira que c'est une  $(G, k)$ -**cockade**.

Dans notre cas, on peut remarquer que  $K_{2,2,2,2,2}$  ne contient pas de mineur  $K_8$  mais possède plus de  $6 \times 10 - \binom{7}{2}$  arêtes. On peut alors montrer récursivement que toute  $(K_{2,2,2,2,2}, 5)$ -cockade possède cette propriété.

Jørgensen a montré que cette famille était la seule obstruction à la généralisation du Théorème 2.40 au cas  $r = 8$ . Il a en effet pû prouver le théorème suivant.

**Théorème 2.41** (Jørgensen, 1994, [37])

*Tout graphe avec  $n \geq 8$  sommets et au moins  $6n - 20$  arêtes a soit un mineur  $K_8$ , soit est une  $(K_{2,2,2,2,2}, 5)$ -cockade.*

Ce théorème implique en particulier que tout graphe sans mineur  $K_8$  possède un sommet de degré au plus 11.

De la même manière, Song et Thomas ont caractérisé les exceptions pour le cas  $r = 9$ .

**Théorème 2.42** (Song & Thomas, 2006, [69])

*Tout graphe avec  $n \geq 9$  sommets et au moins  $7n - 27$  arêtes contient un mineur  $K_9$ , est une  $(K_{1,2,2,2,2,2}, 6)$ -cockade ou est isomorphe à  $K_{2,2,2,3,3}$ .*

Ainsi les graphes sans mineur  $K_9$  possèdent un sommet de degré au plus 13. La conjecture suivante affirme que les théorèmes précédents restent valables dans le cas général.

**Conjecture 2.43** (Seymour & Thomas)

*Pour tout  $r \geq 1$ , il existe une constante  $C = C(r)$  telle que pour tout graphe  $(r - 2)$ -connexe avec au moins  $C$  sommets et au moins  $(r - 2)n - \binom{r-1}{2} + 1$  arêtes contient un mineur  $K_r$ .*

Les théorèmes précédents impliquent que cette conjecture est vraie pour  $r \leq 9$ .

Dans la suite, nous noterons par  $K_r^-$  le graphe obtenu à partir de  $K_r$  en enlevant une arête. Les théorèmes suivants prouvent des bornes optimales sur le nombre d'arêtes sans mineur  $K_r^-$  pour  $k \leq 9$ .

**Théorème 2.44** (Jakobsen, 1983, [34])

*Tout graphe avec au moins 7 sommets et  $\frac{9}{2}n - 12$  arêtes a un mineur  $K_7^-$  ou est isomorphe à une  $(K_{2,2,2,2}, K_6, 4)$ -cockade.*

**Théorème 2.45** (Song, 2005, [68])

*Tout graphe avec au moins 8 sommets et  $\frac{11}{2}n - \frac{35}{2}$  arêtes a un mineur  $K_8^-$  ou est isomorphe à une  $(K_{1,2,2,2,2}, K_7, 5)$ -cockade.*

Pour le cas suivant, la borne exacte n'est pas connue mais Chen et al. [17] proposent la conjecture suivante.

**Conjecture 2.46** (Chen et al., 2005, [17])

*Tout graphe avec au moins 8 sommets et  $\frac{13}{2}n - \frac{47}{2}$  arêtes a un mineur  $K_9^-$ .*

Enfin Song et Thomas ont posé la conjecture suivante dans le cas des mineurs  $K_{10}$ .

**Conjecture 2.47** (Song & Thomas)

*Tout graphe avec au moins  $n \geq 10$  sommets et  $8n - 35$  arêtes contient un mineur  $K_{10}$  ou est une  $(K_{1,1,2,2,2,2,2}, 7)$ -cockade ou est isomorphe à l'un des graphes suivants :  $K_{1,2,2,2,3,3}$ ,  $K_{2,2,3,3,4}$ ,  $K_{2,3,3,3,3}$ ,  $K_{2,3,3,3,3}^-$ ,  $K_{2,2,2,2,2,3}$  ou au graphe obtenu à partir de deux copies de  $K_{2,2,2,2,2,3}$  en identifiant deux cliques de taille 6.*

Cette conjecture impliquerait en particulier le cas  $r = 10$  de la Conjecture 2.43.

L'exclusion d'un mineur de graphe biparti complet permet aussi de borner le nombre d'arêtes du graphe.

**Théorème 2.48** (Chudnovsky et al., 2011, [19])

*Tout graphe sans mineur  $K_{2,t}$  avec  $t \geq 2$  a au plus  $\frac{1}{2}(t+1)(n-1)$  arêtes.*

**Théorème 2.49** (Jørgensen, 2001, [38])

*Tout graphe 4-connexe sans mineur  $K_{4,4}$  avec au moins  $n$  sommets a au plus  $4n-8$  arêtes.*

Ce dernier théorème a en particulier été utilisé par Kawarabayashi et Toft pour prouver certains résultats sur la coloration des graphes que nous verrons dans le Chapitre 4.

Dans le cadre des mineurs enracinés que nous avons étudiés dans la partie précédente, il n'existe que peu de résultats extrémaux les concernant. Néanmoins Jørgensen [38] a prouvé le théorème suivant dans le cas des mineurs  $K_{2,4}$  enracinés sur les sommets du stable de taille 4.

**Théorème 2.50** (Jørgensen, 2001, [38])

*Soit  $G$  un graphe 4-connexe avec au moins  $4n-8$  arêtes et soit  $X$  un ensemble de quatre sommets de  $G$  quatre sommets de  $G$ . Alors  $G$  contient un mineur enraciné  $K_{2,4}$  enraciné en  $X$ .*

Ce dernier théorème a servi, en particulier, à prouver le Théorème 2.49. Si on essaye d'enraciner un mineur  $K_{2,t}$  sur l'ensemble stable de taille 2 alors Chudnovsky et al. [19] ont prouvé le théorème suivant.

**Théorème 2.51** (Chudnovsky et al., 2011, [19])

*Soit  $G$  un graphe 2-connexe avec au moins  $12(t+3-\frac{4}{t+2})(n-1)-1$  arêtes avec  $t \geq 2$  et soit  $X$  un ensemble de deux sommets de  $G$ . Alors  $G$  contient un mineur  $K_{2,t}$  enraciné en  $X$ .*

Enfin, Kawarabayashi et Jørgensen ont aussi prouvé le théorème suivant généralisant le théorème de Jørgensen donné précédemment.

**Théorème 2.52** (Kawarabayashi & Jørgensen, 2005, [39])

*Soit  $G$  un graphe 4-connexe avec au moins  $4n-8$  arêtes et soit  $X$  un ensemble de quatre sommets de  $G$ . Alors  $G$  contient un mineur enraciné  $K_{2,4}$  enraciné en  $X$ .*

## 2.6 Invariant de Colin de Verdière

Cette partie sera consacrée à l'étude de l'invariant  $\mu$  introduit par Colin de Verdière [21]. On pourra se référer à [79] pour plus de détails sur cet invariant.

Motivé par l'étude de la multiplicité de la seconde valeur propre des opérateurs de Schrödinger, Colin de Verdière [21] a introduit en 1990 un certain paramètre noté  $\mu$  sur les graphes.

Pour l'introduire nous aurons besoin de certaines définitions sur les matrices. Soit  $G$  un graphe avec  $n$  sommets. On note par  $\mathcal{O}_G$  l'ensemble des matrices symétriques  $(M_{ij})_{ij}$  de taille  $n \times n$  telles que pour tout  $uv \in E(G)$ ,  $M_{uv} < 0$  et telles que  $M_{uv} = 0$  autrement. Ces

matrices sont communément appelées opérateurs de Schrödinger discrets. Le **corang** d'une matrice  $M$  est défini comme la dimension du noyau  $\text{Ker}(M)$ . On définit alors  $\mu(G)$  comme étant le plus grand entier tel qu'il existe une matrice  $(M_{ij})_{ij}$  vérifiant :

- $M \in \mathcal{O}_G$ ,
- $M$  a exactement une valeur propre négative, de multiplicité 1,
- Il n'existe pas de matrice de taille  $n \times n$  non-nulle  $X = (X_{ij})_{ij}$  telle que  $MX = 0$  et  $X_{ij} = 0$  si  $i = j$  ou  $M_{ij} = 0$ .

Cette dernière propriété est aussi nommée "la propriété d'Arnold forte" dans la littérature. Notons que  $\mu(G)$  existe toujours lorsque  $G$  est connexe par une application du théorème de Perron-Frobenius (cf. [79]). Si le graphe n'est pas connexe, on peut prendre le maximum des valeurs de  $\mu$  prises sur toutes les composantes connexes du graphe.

**Exemple :** Pour le graphe complet  $K_n$ , on a  $\mu(K_n) = n - 1$ . La matrice  $-J_n$  vérifie alors les trois conditions précédentes et est de corang  $n - 1$ . Comme au moins une des valeurs propres doit être négative, cette matrice est celle de corang maximale. De plus, on peut montrer que le graphe complet est l'unique graphe à  $n$  sommet qui atteint cette valeur.

L'une des propriétés les plus importantes que possède cet invariant est le fait qu'il soit monotone pour la relation de mineurs.

**Théorème 2.53** (C. de Verdière, 1987, [20])

*Soit  $G$  un graphe. Si  $H$  est un mineur de  $G$  alors  $\mu(H) \leq \mu(G)$ .*

Ainsi, étant donné un entier  $k$  positif, l'ensemble des graphes  $G$  vérifiant  $\mu(G) \leq k$  forme une classe de graphes close par mineur. Par le théorème de Robertson et Seymour (Théorème 2.3), cette classe est donc caractérisée par un ensemble fini de mineurs exclus. La question naturelle qui se pose est : peut-on caractériser l'ensemble des mineurs exclus pour ces classes ?

Le théorème suivant montre que pour les petites valeurs de  $k$ , on retrouve certaines classes de graphes topologiques vues précédemment et dont la liste des mineurs exclus est connue.

**Théorème 2.54** ([21], [46], [78])

*On a les propriétés suivantes :*

- Un graphe  $G$  est un stable de taille 1 ou 2 si et seulement si  $\mu(G) \leq 0$ .
- Un graphe  $G$  est une forêt si et seulement si  $\mu(G) \leq 1$ .
- Un graphe  $G$  est un graphe planaire externe si et seulement si  $\mu(G) \leq 2$ .
- Un graphe  $G$  est un graphe planaire si et seulement si  $\mu(G) \leq 3$ .
- Un graphe  $G$  est un graphe sans entrelacs si et seulement si  $\mu(G) \leq 4$ .

De plus, comme le montre le théorème suivant, il existe certaines relations entre la valeur  $\mu$  prise entre un graphe et son complémentaire. Ces relations nous seront utiles par la suite pour calculer la valeur de  $\mu$  pour certains graphes particuliers.

**Théorème 2.55** (Kotlov et al., 1997, [42])

*Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets. On a alors les propriétés suivantes :*

- Si  $\bar{G}$  est une forêt de chemins alors  $\mu(G) \geq n - 3$ .

- Si  $\overline{G}$  est un graphe planaire externe alors  $\mu(G) \geq n - 4$ .
- Si  $\overline{G}$  est un graphe planaire alors  $\mu(G) \geq n - 5$ .

De plus, on peut partiellement montrer une réciproque à ces propriétés en rajoutant la condition que les graphes n'aient pas de sommets **jumeaux**, c'est-à-dire deux sommets  $u$  et  $v$  tels que  $N[u] = N[v]$ .

**Théorème 2.56** (Kotlov et al., 1997, [42])

Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets n'ayant pas de sommets jumeaux alors on a les propriétés suivantes :

- If  $\mu(G) \geq n - 3$  alors  $\overline{G}$  est un graphe planaire externe.
- If  $\mu(G) \geq n - 4$  alors  $\overline{G}$  est un graphe planaire.



## Triangles et mineurs de graphes

*Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la relation entre l'existence de triangles dans les graphes et certains mineurs de graphes complets. Nevo [53] a prouvé que si chaque arête d'un graphe appartient à 2 (resp. 3) triangles alors ce graphe admet un graphe  $K_4$  (resp.  $K_5$ ) comme mineur. Dans le cas où chaque arête du graphe appartient à 4 triangles, Nevo a prouvé que soit le graphe contient un mineur  $K_6$  ou bien que le graphe peut être obtenu à partir de deux graphes plus petits en identifiant des cliques de taille au plus 4. La motivation de ce chapitre est d'étendre les travaux de Nevo aux cas supérieurs. En particulier, nous prouvons les résultats suivants.*

- *Nous étendons les résultats de Nevo aux cas où chaque arête appartient à 4 et 5 triangles.*
- *Nous proposons une généralisation des résultats de Nevo au cas où chaque arête appartient à 6 triangles. En effet, nous verrons qu'une généralisation directe du théorème de Nevo est impossible en raison de l'apparition de certains contre-exemples. Néanmoins, nous verrons que ces contre-exemples possèdent tous une certaine sous-structure particulière.*
- *Enfin, nous essaierons de généraliser ces propriétés aux matroïdes. En particulier, nous montrerons que des théorèmes similaires à ceux des graphes dans les cas où le nombre de triangles par élément est de 2 ou 3.*

*Ces résultats ont été obtenus avec D. Gonçalves et J. Ramírez-Alfonsín [2, 4].*

### 3.1 Introduction

En 1968, Mader prouve un théorème reliant l'existence d'un mineur d'un graphe complet et la densité du graphe en nombre d'arêtes (cf. Théorème 2.40 de la Section 2.5) Plus précisément, il affirme que pour  $3 \leq r \leq 7$ , tout graphe sans mineur  $K_r$  avec au moins  $r$  sommets a au plus  $(r-2)n - \binom{r-1}{2}$  arêtes.

Intéressons-nous maintenant à une propriété particulière d'un contre-exemple minimal à ce théorème. Soit  $G$  un contre-exemple minimal, c'est-à-dire un graphe sans mineur  $K_r$ ,  $3 \leq r \leq 7$  et avec au moins  $r$  sommets tel que  $G$  contienne au moins

$(r-2)n - \binom{r-1}{2} + 1$  arêtes et soit  $e$  une arête de ce graphe. Supposons que l'on contracte l'arête  $e$ , comme  $G$  est minimal,  $G/e$  a au plus  $(r-2)(n-1) - \binom{r-1}{2} = (r-2)n - (r-2) - \binom{r-1}{2}$  arêtes. Comme tous les graphes sont simples, l'arête  $e$  est contenue dans au moins  $(r-2)$  triangles. En effet en contractant l'arête  $e$ , les triangles contenant  $e$  verront leurs arêtes restantes être en parallèles. Comme le graphe est simple, les arêtes en parallèles seront identifiées et donc le nombre d'arêtes total du graphe diminuera de un par triangle contenant  $e$ .

Nous supposerons que tous les graphes étudiés dans ce chapitre sont simples, connexes et ont au moins une arête. Le but de ce chapitre est d'étudier la question suivante.

QUESTION. Si chaque arête d'un graphe  $G$  appartient à au moins  $(r-2)$  triangles avec  $r \geq 3$ ,  $G$  admet-t-il un graphe complet  $K_r$  comme mineur ?

Nevo [53] a répondu affirmativement pour les petites valeurs de  $r$ . En particulier, il a prouvé le théorème suivant.

**Théorème 3.2** (Nevo, 2007, [53])

*Pour  $3 \leq r \leq 5$ , tout graphe tel que chaque arête appartienne à au moins  $(r-2)$  triangles contient le graphe  $K_r$  comme mineur.*

PREUVE . Soit  $G$  un graphe sans mineur  $K_r$  tel que chaque arête appartienne à au moins  $(r-2)$  triangles.

Pour  $r = 3$ , la proposition est triviale.

Pour  $r = 4$ , par le Théorème 2.40,  $G$  a au plus  $2n - 4$  arêtes. En particulier, il existe un sommet  $u$  tel que  $d(u) \leq 3$ . Comme chaque arête appartient à au moins 2 triangles, cela implique que chaque sommet de  $N(u)$  a degré au moins 2 dans  $G[N(u)]$ . En effet si une arête  $uv$  est contenue dans un triangle, alors le troisième sommet du triangle appartient à  $N(u)$  et est adjacent à  $v$ . On en déduit que  $G[N(u)] \simeq K_3$  et donc  $G[N(u)]$  est isomorphe à  $K_4$ , une contradiction.

Pour  $r = 5$ , toujours par le Théorème 2.40,  $G$  a au plus  $3n - 6$  arêtes. En particulier, il existe un sommet  $u$  tel que  $\deg(u) \leq 5$ . De plus comme chaque arête appartient à au moins 3 triangles,  $\deg(u) \geq 4$ . Notons que  $G[N(u)]$  ne peut pas contenir un mineur  $K_4$ , car autrement  $G[N(u)]$  contiendrait un mineur  $K_5$ , ce qui serait une contradiction. On peut donc supposer que  $G[N(u)]$  est sans mineur  $K_4$ . En particulier par le Théorème 2.13,  $G[N(u)]$  contient un sommet de degré au plus 2. Or comme chaque arête appartient à au moins 3 triangles,  $\delta(G[N(u)]) \geq 3$ , contradiction.  $\square$

Pour le cas  $r = 6$ , Nevo a prouvé le théorème suivant.

**Théorème 3.3** (Nevo, 2007, [53])

*Tout graphe tel que chaque arête appartienne à au moins 4 triangles contient le graphe  $K_6$  comme mineur ou bien  $G$  peut être obtenu à partir de deux graphes plus petits en identifiant des cliques de taille au plus 4 (i.e.  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $G_1, G_2 \neq G$  tel que  $G_1 \cap G_2 = K_r$  avec  $r \leq 4$ ).*

Le but des sections suivantes sera d'étendre et de généraliser les Théorèmes 3.2 et 3.3.

Plus précisément, nous prouverons le théorème suivant.

**Théorème 3.4** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Pour  $3 \leq r \leq 7$ , tout graphe  $G$  sans mineur  $K_r$  a une arête  $uv$  telle que  $\deg(u) \leq 2r - 5$  et  $uv$  appartient à au plus  $r - 3$  triangles.*

Le Théorème 3.4 ne peut être étendu au cas  $r = 8$  directement. En effet, comme l'a remarqué Nevo [53],  $K_{2,2,2,2,2}$  est alors un contre-exemple au théorème car il ne contient pas de mineur  $K_8$  alors que chaque arête appartient à 6 triangles. En fait, on peut obtenir un graphe sans mineur  $K_8$  et dont chaque arête appartient à au moins 6 triangles à partir de n'importe quel graphe en collant des copies de  $K_{2,2,2,2,2}$  sur chacune des arêtes du graphe. Il est intéressant de noter que  $K_{2,2,2,2,2}$  apparaît dans un théorème équivalent au Théorème 2.40 pour les graphes sans mineur  $K_8$  (Théorème 2.41).

Ainsi, même si le Théorème 3.4 ne peut pas être étendu directement au cas des graphes sans mineur  $K_8$ , des conclusions similaires peuvent être atteintes en considérant des hypothèses plus fortes. Nous prouvons dans cette partie les trois théorèmes suivants.

**Théorème 3.5** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_8$  avec  $\delta(G) \geq 11$  a une arête  $uv$  telle que  $u$  ait degré 11 et  $uv$  appartient à au plus 5 triangles.*

**Théorème 3.6** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_8$  avec  $\delta(G) \geq 9$  a une arête  $uv$  appartenant à au plus 5 triangles.*

**Théorème 3.7** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_8$  ne contenant pas  $K_{2,2,2,2,2}$  comme sous-graphe induit a une arête  $uv$  appartenant à au plus 5 triangles.*

Enfin, nous avons étudié les généralisations possibles de ces théorèmes aux cas des matroïdes. Dans ce cas, on rappelle que les triangles sont des circuits de taille 3. En particulier, étant donné un matroïde dont tous les éléments appartiennent à  $k$  triangles, contiennent-ils un mineur  $M(K_{k+2})$  où  $M(K_{k+2})$  est le matroïde graphique associé au graphe  $K_{k+2}$  ?

Comme le montrent les théorèmes suivants, la réponse est moins simple que dans le cas des graphes. Néanmoins, pour les petites valeurs de  $k$ , on peut prouver le théorème suivant qui fournit un analogue aux théorèmes vus précédemment pour les graphes sans mineur  $K_5$ . Notons que dans le cas des matroïdes, la liste des mineurs à exclure est nettement plus longue que dans le cas des graphes.

**Théorème 3.8** (Albar, Gonçalves & Ramírez, 2014, [4])

*Soit  $M$  un matroïde simple tel que chaque élément appartienne à au moins 3 triangles. Alors  $M$  contient un mineur  $U_{2,4}$ , un mineur  $F_7$  ou bien un mineur  $M(K_5)$ .*

En modifiant légèrement les preuves du Théorème 3.4 et en utilisant les lemmes de la preuve du Théorème 3.8, on peut généraliser le Théorème 3.4 au cas des matroïdes réguliers. On rappelle qu'un matroïde est régulier si et seulement s'il ne contient pas  $U_{2,4}$ ,  $F_7$  ou  $F_7^*$  comme mineur (cf. Théorème 2.12). Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 3.9** (Albar, Gonçalves & Ramírez, 2014, [4])

*Pour  $r \leq 3 \leq 7$ , tout matroïde simple et régulier  $M$  tel que tout élément de  $M$  appartienne à au moins  $r$  triangles contient un mineur  $M(K_r)$ .*

Dans le cas, plus simple, où tous les éléments appartiennent à deux triangles, on peut montrer que le matroïde contient  $U_{2,4}$  ou  $M(K_4)$  comme mineur. Cela découle de la caractérisation des matroïdes binaires (Théorème 2.9) et du fait que les classes des matroïdes binaires sans mineur  $M(K_4)$  correspondent à la classe des matroïdes obtenus à partir des graphes séries-parallèles. Une question naturelle est de savoir si de tels théorèmes peuvent être obtenus pour les matroïdes représentables sur des corps de caractéristique plus grande. Si l'on considère les matroïdes ternaires on peut par exemple montrer le théorème suivant.

**Théorème 3.10** (Albar, Gonçalves & Ramírez, 2014)

*Tout matroïde ternaire simple tel que tout élément appartienne à au moins 2 triangles, contient  $P_7$  ou  $M(K_4)$  comme mineur ou bien contient une copie de  $U_{2,4}$  comme sous-matroïde.*

## 3.2 Preuve du Théorème 3.4

Le but de cette section est de prouver le Théorème 3.4.

### 3.2.1 Preuve des cas $r = 3, 4, 5, 6$

La preuve pour les cas  $r = 3, 4, 5$  sont similaires à celle du Théorème 3.2.

Considérons maintenant le cas  $r = 6$ . Soit  $G$  un graphe sans mineur  $K_6$  tel que toute arête incidente à un sommet de degré au plus 7 appartient à au moins 4 triangles. Par le Théorème 2.40,  $\delta(G) \leq 7$ . Nous allons commencer par étudier le voisinage des sommets de degré au plus 7. Soit  $u$  un sommet de degré au plus 7. Premièrement, il est clair que  $G[N(u)]$  est un graphe sans mineur  $K_5$  car autrement  $G[N(u)]$  contiendrait un mineur  $K_6$ , ce qui contredirait les hypothèses.

Le lemme suivant donne des bornes inférieures pour le degré de  $G$  et celui de  $G[N(u)]$ .

**Lemme 3.11**

$\delta(G) \geq 6$  et pour tout sommet  $u$  de degré au plus 7,  $\delta(G[N(u)]) \geq 4$ .

PREUVE . Soit  $u$  un sommet de degré au plus 7 et  $v$  un sommet adjacent à  $u$ . Par hypothèse l'arête  $uv$  est contenue dans au moins 4 triangles. De plus le troisième sommet de chaque triangle appartient à  $N(u)$  et est adjacent à  $v$ . On en déduit que  $v$  à degré au moins 4 dans  $G[N(u)]$  et donc que  $\delta(G[N(u)]) \geq 4$ .

De plus comme pour tout sommet  $u$  de degré au plus 7,  $\delta(G[N(u)]) \geq 4$  alors  $|N(u)| \geq 5$ . Supposons maintenant qu'il existe  $u$  tel que  $|N(u)| = 5$  alors  $G[N(u)]$  est isomorphe à  $K_5$  et donc  $G[N(u)]$  est isomorphe à  $K_6$ , contradiction.  $\square$

Le lemme suivant est une version plus forte du lemme précédent portant sur le degré minimal de  $G[N(u)]$ .

**Lemme 3.12**

Soit  $u$  un sommet de degré au plus 7,  $G[N(u)]$  est 4-connexe.

PREUVE . Soit  $u$  un sommet de degré au plus 7 et supposons qu'il existe une  $(\leq 3)$ -séparation  $(A, B)$  de  $G[N(u)]$ .

Comme  $\delta(G[N(u)]) \geq 4$  et que les ensembles  $A$  et  $B$  sont non vides, on a en particulier  $|A|, |B| \geq 5$ . Or comme  $7 \geq |N(u)| = |A| + |B| - |A \cap B|$  et que  $|A \cap B| \leq 3$ , on en déduit que  $(A, B)$  est une 3-séparation. Ainsi on a  $|A \setminus B| = |B \setminus A| = 2$  et comme  $\delta(G[N(u)]) \geq 4$ , on en déduit que  $G[N(u)]$  contient le graphe de la Figure 3.1 comme sous-graphe. Mais ce graphe contient un mineur  $K_5$ , contradiction.  $\square$

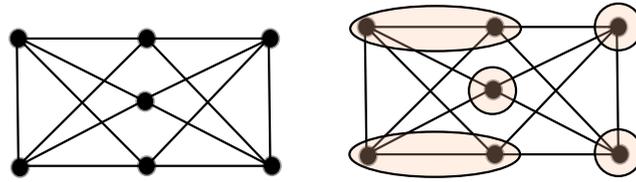


FIGURE 3.1 – Sous-graphe contenant un mineur  $K_5$

Notons que par la caractérisation de Wagner des graphes sans mineur  $K_5$ , tout graphe 4-connexe sans mineur  $K_5$  est planaire. Chen et Kanevsky [18] ont prouvé que tout graphe 4-connexe peut être obtenu à partir de  $K_5$  et de la roue à deux axes  $W_4^2$  en utilisant certaines opérations particulières. Plus précisément, ils ont montré le théorème suivant.

**Théorème 3.13** (Chen & Kanevsky, 1993, [18])

Soit  $G$  un graphe simple 4-connexe. Il existe une séquence de pseudo sous-graphes simples 4-connexe de  $G$ ,  $G_1, G_2, \dots, G_t$  telle que  $G_t = G$  et telle que  $G_0$  soit isomorphe à  $K_5$  ou à  $W_4^2$  et que chaque  $G_{i+1}$  soit obtenu à partir de  $G_i$ , pour  $1 \leq i \leq t - 1$ , par un nombre au plus constant de I-insertions, C-insertions et de split de sommet de degré 4.

On se réfèrera à [18] pour les définitions des opérations utilisées et de la notion de pseudo-sous-graphe. Le point le plus important est que ces opérations ne font intervenir que des splits de sommets et des additions d'arêtes. Ainsi ces opérations conservent l'existence des mineurs. Comme les graphes considérés ne contiennent pas de mineur  $K_5$ , on peut donc considérer uniquement les graphes obtenus à partir de  $W_4^2$ . En particulier, leur résultat implique que les deux seules possibilités pour  $G[N(u)]$  sont la roue à deux axes à 4 et 5 sommets représentés sur la Figure 3.2. En effet la seule opération permise à partir du graphe  $W_4^2$  correspond au split d'un sommet de degré 4 puis à l'ajout d'arêtes pour conserver la 4-connectivité du graphe. On peut vérifier que l'unique possibilité consiste à spliter un sommet du 4-cycle de  $W_4^2$  puis d'ajouter une arête entre les deux sommets issus du split et les deux sommets restants. On peut facilement vérifier ce

résultat par ordinateur (cf. Annexe A.1). Notons que ces deux graphes (ayant  $3|N(u)| - 6$  arêtes) sont sans mineur  $K_5$  et maximaux pour cette propriété.

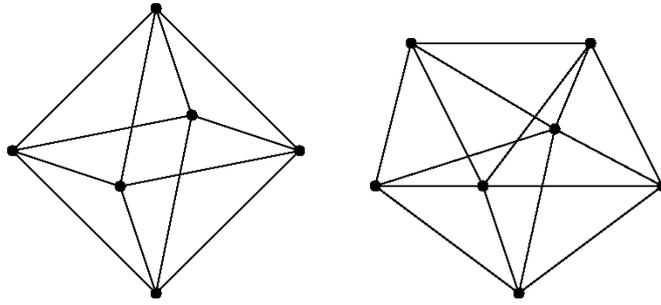


FIGURE 3.2 – La roue à deux axes à 4 et 5 sommets.

Les deux lemmes suivants portent encore sur les propriétés des voisinages des sommets de petit degré.

**Lemme 3.14**

*Pour tout sommet  $u$  de degré au plus 7, tout sommet  $v \in N(u)$  a un voisin dans  $G \setminus N[u]$ .*

PREUVE . Rappelons que  $G[N(u)]$  est une roue à deux axes et notons que dans un tel graphe, tout sommet à degré au plus 5 et toute arête appartient à exactement 2 triangles. Ainsi, tout sommet de  $N(u)$  a degré au plus 6 dans  $G[N(u)]$ . Cela implique que tout sommet  $v \in N(u)$  a soit un degré strictement supérieur à 8 dans  $G$  (et ont donc au moins deux voisins dans  $G \setminus N[u]$ ), soit que l'une de ses arêtes incidentes  $vw$  dans  $G[N(u)]$  est contenue dans un quatrième triangle  $vw x$  avec  $x \in G \setminus N[u]$ .  $\square$

**Lemme 3.15**

*Pour tout sommet  $u$  de degré au plus 7 et pour toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus N[u]$ , le graphe  $G[N(C)]$  est une clique de taille au plus 3.*

PREUVE . Notons que  $N(C) \subseteq N(u)$ . Comme  $G[N(u)]$  n'a pas de clique de taille plus grande que 3, montrons que  $N(C)$  ne contient pas deux sommets non adjacents, dénotés  $v_1$  et  $v_2$ . Dans le cas contraire, il existerait un chemin  $P$  de  $v_1$  vers  $v_2$  dont les sommets internes sont contenus dans  $C$ . Comme  $G[N(u)]$  est un graphe sans mineur  $K_5$  et maximal pour cette propriété,  $G[N(u) \cup V(P)]$  contiendrait un mineur  $K_6$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.16**

*Pour tout sommet de degré au plus 7 et pour toute composante  $C$  de  $G \setminus N[u]$ , il existe un sommet  $u' \in C$  de degré au plus 7 dans  $G$ .*

PREUVE . Supposons par contradiction que tout sommet de  $C$  a degré au moins 8 dans  $G$ . Par définition tout sommet dans  $N(C)$  a un voisin dans  $C$ . Donc, comme par le Lemme 3.15  $G[N(C)]$  est une clique de taille  $k \leq 3$ , les sommets dans  $N(C)$  ont degré au moins  $k$  dans  $G[N(C)]$ . Ainsi le nombre d'arêtes de  $G[N(C)]$  vaut au moins

$$|E(G[N(C)])| \geq \frac{1}{2}(8|C| + k^2).$$

Or comme  $k^2 > 8k - 20$  pour  $1 \leq k \leq 3$ , on en déduit que  $|E(G[N[C]])| > 4(|C| + k) - 10$ . Ainsi, par le Théorème 2.40,  $G[N[C]]$  contient un mineur  $K_6$ , une contradiction.  $\square$

Maintenant choisissons une paire  $(u, C)$ , où  $u$  de degré au plus 7 et  $C$  est une composante connexe de  $G \setminus N[u]$  telle que  $|C|$  soit de taille minimale. Par le Lemme 3.16,  $C$  contient un sommet  $v$  de degré au plus 7.

Soit  $C_u$  la composante connexe de  $G \setminus N[v]$  qui contient  $u$ , et soit  $x \in N(v) \setminus N(C_u)$ . Par le Lemme 3.14, il existe une composante connexe  $C'$  de  $G \setminus N[v]$  telle que  $x \in N(C')$ .

Comme  $C' \subsetneq C$  et donc que  $|C'| < |C|$ , la paire  $(v, C')$  contredit la minimalité de  $(u, C)$ . Cela conclut la preuve du Théorème 3.4 pour le cas  $r = 6$ .

### 3.2.2 Preuve du cas $r = 7$ : le cas à 5 triangles

Considérons par contradiction un graphe sans mineur  $K_7$  tel que toute arête incidente à un sommet de degré au plus 9 appartienne à au moins 5 triangles. Par le Théorème 2.40,  $|E(G)| \leq 5|V(G)| - 15$ , ainsi, il existe des sommets  $u$  tels que  $\deg(u) \leq 9$ .

Nous commencerons par étudier les propriétés de  $G[N(u)]$ , pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9. Premièrement, il est clair que  $G[N(u)]$  est un graphe sans mineur  $K_6$ , car autrement  $G[N(u)]$  contiendrait un mineur  $K_7$ , ce qui contredirait les hypothèses.

#### Lemme 3.17

$\delta(G) \geq 7$ , et pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9,  $\delta(G[N(u)]) \geq 5$ .

PREUVE . Pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9, et tout sommet  $v \in N(u)$ , l'arête  $uv$  appartient à au moins 5 triangles par hypothèse. Le troisième sommet de chaque triangle appartient clairement à  $N(u)$  et est adjacent à  $v$ . Ainsi  $v$  a degré au moins 5 dans  $G[N(u)]$ .

Comme pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9 nous avons que  $\delta(G[N(u)]) \geq 5$ , alors  $|N(u)| \geq 6$  (i.e.  $\deg(u) \geq 6$ ). De plus s'il existait un sommet  $u$  de degré 6, comme  $\delta(G[N(u)]) \geq 5$ , le graphe  $G[N(u)]$  serait isomorphe à  $K_6$ , contredisant le fait que  $G[N(u)]$  ne contienne pas de mineur  $K_6$ . Ainsi on en déduit que  $\delta(G) \geq 7$ .  $\square$

Notons qu'à la manière du Lemme 3.12, on pourrait aussi montrer que pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9,  $G[N(u)]$  est 5-connexe. Néanmoins cette propriété n'est pas nécessaire pour prouver la suite du théorème, donc nous omettrons de la prouver.

Il n'existe pas de théorème approprié (contrairement au cas  $r = 6$ ) pour générer tous les voisinages possibles pour les sommets de petit degré. A la place, nous générons tous les graphes avec au plus 9 sommets et degré minimum au moins 5 par ordinateur. Ensuite nous réduisons la liste (toujours par ordinateur) en supprimant les graphes ayant un mineur  $K_6$ . Finalement, nous avons obtenu une liste de 22 graphes (cf. Annexe A.2). Une différence majeure avec le cas précédent est que certains des 22 graphes ne sont pas maximaux pour la propriété d'être sans mineur  $K_6$ . Nous déduisons les deux lemmes suivants de l'étude de ces graphes par ordinateur.

**Lemme 3.18**

*Pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9, toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus N[u]$  est telle que  $|N(C)| = k \leq 5$  et  $|E(N(C))| \geq \binom{k}{2} - 3$  (i.e.  $G[N(C)]$  a au plus 3 non-arêtes).*

PREUVE . Comme toute composante connexe  $C$  peut être contracté en un unique sommet, on prouve le lemme en attachant un nouveau sommet à chaque combinaison de  $k$  sommets de  $N(u)$  (car nous savons que  $N(u)$  induit l'un des 22 graphes possible générés précédemment), pour tout  $k \leq 6$ . On teste ensuite l'existence d'un mineur  $K_7$  dans ce nouveau graphe (cf. Annexe A.1).  $\square$

Le lemme précédent nous permet de prouver un lemme équivalent au Lemme 3.16 dans le cas précédent.

**Lemme 3.19**

*Pour tout sommet de degré au plus 9 et pour toute composante  $C$  de  $G \setminus N[u]$ , il existe un sommet  $u' \in C$  de degré au plus 9 dans  $G$ .*

PREUVE . Soit  $u$  un sommet de degré au plus 9 et soit  $C$  une composante connexe de  $G \setminus N[u]$  telle que tout sommet de cette composante a degré au plus 10 dans  $G$ . Notons que par définition tout sommet de  $N(C)$  a au moins un voisin dans  $C$ . Le Lemme 3.18 implique que  $|N(C)| = k \leq 5$  et que  $G[N(C)]$  a au plus 3 non-arêtes. Ainsi, en contractant une arête incidente à  $u$  et  $N(C)$  choisie convenablement, on obtient que  $G[N(C)]$  a au plus 1 non-arête. Après cette contraction, nous avons que :

$$\begin{aligned} |E(N[C])| &\geq \frac{1}{2} \left[ 10|C| + k(k-1) - 2 + k \right] \\ &= 5|C| + \frac{k^2}{2} - 1 > 5(|C| + k) - 15. \end{aligned}$$

En effet, on peut remarquer que  $k^2 > 10k - 28$  lorsque  $1 \leq k \leq 5$ . Comme le graphe précédent a été obtenu après contraction d'une arête incidente à  $u$ , cela contredit le fait que  $G[N[C]]$  (et donc  $G$ ) est sans mineur  $K_7$  et donc conclut la preuve de ce lemme.  $\square$

**Lemme 3.20**

*Pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9, au plus un sommet  $v$  de  $N(u)$  est tel que  $N(v) \subseteq N[u]$ .*

PREUVE . Pour tout sommet  $v$  tel que  $N(v) \subseteq N[u]$ , comme  $\deg(v) \leq \deg(u) \leq 9$ , les arêtes incidentes à  $v$  et dont les deux extrémités appartiennent à  $N(u)$ , appartiennent à au moins 5 triangles dans  $G$  (i.e. appartiennent à au moins 4 triangles dans  $G[N(u)]$ ). Nous avons vérifié que pour tout graphe dans la liste des 22 graphes possibles, au plus un sommet vérifie cette condition (cf. Annexe A.2 et A.1).  $\square$

Cela nous permet de prouver le lemme suivant.

**Lemme 3.21**

Pour tout sommet  $u$  de degré au plus 9 et toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus N[u]$ , il existe une composante connexe  $C'$  de  $G \setminus N[u]$  telle que  $N(C') \setminus N(C) \neq \emptyset$ .

PREUVE . Comme  $\deg(u) \geq 7$  (par le Lemme 3.17) et  $|N(C)| \leq 5$  (par le Lemme 3.18), il y a au moins 2 sommets dans  $N(u) \setminus N(C)$ . Par le Lemme 3.20, un de ces deux sommets a un voisin  $x$  hors de  $N[u]$ . Ainsi la composante connexe de  $G \setminus N[u]$  contenant  $x$  remplit les conditions requises du lemme.  $\square$

Maintenant choisissons un sommet de degré au plus 9 et une composante connexe  $C$  de  $G \setminus N[u]$  telle que la taille de  $C$  soit minimale. Par le Lemme 3.19,  $C$  a un sommet  $v$  de degré au plus 9. Soit  $C_u$  la composante connexe de  $G \setminus N[v]$  contenant  $u$ . Par le Lemme 3.21, il existe une composante connexe  $C'$  de  $G \setminus N[v]$  telle que  $N(C') \setminus N(C_u) \neq \emptyset$ , et soit  $x \in N(C') \setminus N(C_u)$ . Comme  $N[u] \subseteq N[C_u]$ , il est clair que  $G[C' \cup \{x, v\}]$  est un sous-graphe connexe de  $G \setminus N[u]$ . Ainsi nous avons que  $C' \subsetneq C$  avec  $|C'| < |C|$ , contredisant le choix de  $u$  et de  $C$ . Cela conclut la preuve du cas  $r = 7$  du Théorème 3.4.

**3.3 Preuve des Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7**

Comme dans les parties précédentes, nous allons considérer les sommets de petit degré et leurs voisinages. Nous allons donc avoir besoin du lemme suivant (qui à été prouvé par ordinateur en énumérant les graphes de taille au plus 11 et de degré minimum 6 sans mineur  $K_7$ , cf. Annexe A.1 et A.2, nous omettrons donc la preuve).

**Lemme 3.22**

Tout graphe  $H$  sans mineur  $K_7$  distinct de  $K_{2,2,2,2}$ ,  $K_{3,3,3}$  et  $\overline{P_{10}}$  le complémentaire du graphe de Petersen, et tel que  $8 \leq |V(H)| \leq 11$  et  $\delta(H) \geq 6$  vérifie :

- $H$  est 5-connexe.
- $H$  a au plus un sommet  $v$  tel que chacune des arêtes incidentes à  $v$  appartient à au moins 5 triangles.
- Pour tout sous-ensemble  $Y \subsetneq V(H)$  de taille 7, le graphe obtenu à partir de  $H$  en ajoutant deux sommets  $x$  et  $y$  tels que  $N(x) = V(H)$  et  $N(y) = Y$  contient un mineur  $K_8$ .

Notons que les deux premières propriétés de ce lemme s'appliquent aussi à  $K_{2,2,2,2}$ ,  $K_{3,3,3}$  et  $\overline{P_{10}}$ . En effet chaque arête de ces 3 graphes appartient à au plus 4 triangles et ces graphes sont 5-connexes.

Ce lemme peut être vu comme une forme plus forte du lemme suivant de Jørgensen.

**Lemme 3.23** (Jørgensen, 1994, [37])

Soit  $H$  un graphe avec  $n \leq 11$  et  $\delta(G) \geq 6$  tel que pour tout sommet  $x$ ,  $H \setminus \{x\}$  ne contienne pas de mineur  $K_6$ , alors  $H$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ ,  $K_{3,3,3}$  ou  $\overline{P_{10}}$ .

**3.3.0.1 Preuve du Théorème 3.5**

Le Théorème 2.41 implique en particulier que tout graphe sans mineur  $K_8$  a degré minimum au plus 11. Considérons par contradiction un graphe  $G$  sans mineur  $K_8$  avec

$\delta(G) = 11$ , et tel que toute arête incidente à un sommet de degré 11 appartienne à au moins 6 triangles. Premièrement, il est clair que pour tout sommet  $u$  de degré 11,  $G[N(u)]$  est un graphe sans mineur  $K_7$  car autrement il y aurait un mineur  $K_8$  dans  $G$ , contredisant les hypothèses.

**Lemme 3.24**

*Pour tout sommet  $u$  de degré 11,  $\delta(G[N(u)]) \geq 6$ .*

PREUVE . Pour tout sommet  $u$  de degré 11 et tout sommet  $v \in N(u)$ , les arêtes  $uv$  appartiennent à au moins 6 triangles. Le troisième sommet de ces triangles appartient clairement à  $N(u)$  et est adjacent à  $v$ . Ainsi  $v$  a degré au moins 6 dans  $G[N(u)]$ .  $\square$

**Lemme 3.25**

*Pour tout sommet  $u$  de degré 11, toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus N[u]$  a un sommet  $u'$  de degré au plus 11 dans  $G$ .*

PREUVE . Soit  $u$  un sommet de degré 11 de  $G$  et soit  $C$  une composante connexe de  $G \setminus N[u]$  telle que tous ces sommets aient degré au moins 12 dans  $G$ . Le Lemme 3.22 implique que  $G[N(u)]$  est 5-connexe et que  $|N(C)| = k \leq 6$ . En considérant le graphe  $G[N[u] \cup C]$  dans le Lemme 3.26, on en déduit le résultat.  $\square$

**Lemme 3.26**

*Soit  $H$  un graphe contenant un sommet  $u \in V(H)$  de degré 11 et tel que :*

- (A)  $H[N(u)]$  est 5-connexe,
- (B)  $\delta(H[N(u)]) \geq 6$ ,
- (C) l'ensemble  $C = V(H) \setminus N[u]$  est non-vide, et tout ses sommets ont degré au moins 12, et
- (D) l'ensemble  $N(C) \subseteq N(u)$  a taille  $k \leq 6$ , a un mineur  $K_8$ .

PREUVE . Considérons un contre-exemple minimal  $H$ , c'est-à-dire un graphe sans mineur  $K_8$  et remplissant les conditions (A), (B), (C) et (D) tel que  $|V(H)|$  soit minimal. Notons que par définition tout sommet de  $N(C) \subseteq N(u)$  a au moins un voisin dans  $C$ . Prouvons maintenant que tout sommet de  $N(C)$  a en fait au moins deux voisins dans  $C$ . Supposons que  $x \in N(C)$  ait un seul voisin  $y$  dans  $C$ , alors on note  $G'$  le graphe obtenu en contractant l'arête  $xy$ . Il est clair que  $G'$  est sans mineur  $K_8$ , et remplit les conditions (A), (B) et (D). De plus,  $C \setminus \{y\}$  est non-vide car il contient au moins 6 sommets de  $N(y) \cap C$  (car  $\deg(y) \geq 12$  et  $|N(C)| = k \leq 6$ ), et tout sommet de  $C \setminus \{y\}$  a degré au moins 12 dans  $H'$  car aucun de ces sommets n'est adjacent à  $x$  dans  $H$ . Donc  $G'$  vérifie aussi la condition (C), ce qui contredit la minimalité de  $G$ . Ainsi tout sommet de  $N(C)$  a au moins 2 voisins dans  $C$ .

On peut aisément vérifier que toute  $(K_{2,2,2,2,2}, 5)$ -cockade a au moins 10 sommets de degré 8. Donc le graphe  $H[N[C]]$ , ainsi que tout graphe obtenu à partir de  $H[N[C]]$  en ajoutant des arêtes, ne peut pas être une  $(K_{2,2,2,2,2}, 5)$ -cockade car il a au plus 6 sommets de degré 8 correspondant aux sommets de  $N(C)$ . Donc comme  $H[N[C]]$  a au moins  $\frac{1}{2}(12|C| + 2k)$  arêtes et que cette valeur est au moins de  $6(|C| + k) - 20$  pour  $k \leq 4$ , par le Théorème 2.41, on a que  $5 \leq k \leq 6$ .

Supposons maintenant que  $k = 5, 6$ . Soit  $v_1$  et  $v_2$  deux sommets de degré minimum dans  $H[N(C)]$ . Notons par  $\delta_1$  et  $\delta_2$  leur degré respectif dans  $H[N(C)]$ . Notons que, si  $k = 6$ , comme  $v_1$  a au moins 6 voisins dans  $N(u)$  et comme il y a seulement 5 sommets dans  $N(u) \setminus N(C)$ , alors  $\delta_1 \geq 1$ . En contractant l'arête  $uv_1$ , nous avons  $k - 1 - \delta_1$  arêtes supplémentaires dans  $H[N(C)]$ . De plus comme  $H[N(u)]$  est 5-connexe et comme  $|N(C)| \leq 6$ , pour tout sommet  $x \neq v_2$  de  $N(C)$ , nous avons que  $|N(C) \setminus \{x, v_2\}| = 4$  et donc que le graphe  $H[N(u)] \setminus (N(C) \setminus \{x, v_2\})$  est connexe. Ainsi, itérativement, en contractant toutes les arêtes entre  $v_2$  et  $N(u) \setminus N(C)$ , on ajoute  $k - 2 - \delta_2$  arêtes à  $H[N(C)]$  (car nous avons potentiellement déjà ajouté l'arête  $v_1 v_2$  à l'étape précédente). Le nombre d'arêtes dans le graphe obtenu est alors au moins

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} ((\delta_1 + 2) + (\delta_2 + 2)(k - 1) + 12|C|) + (k - 1 - \delta_1) + (k - 2 - \delta_2) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_1 + 2 + \delta_2(k - 1) + 2k - 2) + 6|C| + 2k - 3 - \delta_1 - \delta_2 \\ &= \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2(k - 1)) + 6|C| + 3k - 3 - \delta_1 - \delta_2 \\ &= \frac{k - 3}{2} \delta_2 + 6|C| + 3k - 3 - \frac{1}{2} \delta_1 \end{aligned}$$

Si  $k = 5$  alors

$$m = \delta_2 + 6|C| + 12 - \frac{1}{2} \delta_1$$

et donc  $m \geq 6(|C| + k) - 20$  avec  $k = 5$ . Si maintenant  $k = 6$ , alors  $\delta_2 \geq \delta_1 \geq 1$ . On a donc

$$m \geq +6|C| + 16$$

ce qui est encore supérieur à la borne de  $6(|C| + k) - 20$ . Dans les deux cas, ce graphe contient un mineur  $K_8$ , et donc par construction  $H$  à aussi un mineur  $K_8$ . Ceci termine la preuve de ce lemme.  $\square$

**Lemme 3.27**

*Pour tout sommet  $u$  de degré 11 et toute composante  $C$  de  $G \setminus N[u]$ , il existe une composante connexe  $C'$  de  $G \setminus N[u]$  telle que  $N(C') \setminus N(C) \neq \emptyset$ .*

PREUVE. Comme  $\deg(u) = 11$  et comme  $|N(C)| \leq 6$  (par le Lemme 3.22), il y a au moins 5 sommets dans  $N(u) \setminus N(C)$ . Comme  $\delta(G) = 11$ , on peut aisément dériver du Lemme 3.22 qu'un (en fait 4) de ces sommets a un voisin  $x$  hors de  $N[u]$ . Donc la composante de  $G \setminus N[u]$  contenant  $x$  remplit les conditions du lemme.  $\square$

Choisissons maintenant un sommet  $u$  de degré 11 et une composante connexe  $C$  de  $G \setminus N[u]$ , de manière à ce que  $|C|$  soit minimal. Par le Lemme 3.25, la composante  $C$  contient un sommet  $v$  de degré 11. Soit  $C_u$  la composante connexe de  $G \setminus N[v]$  contenant  $u$ . Par le Lemme 3.27, il existe une composante connexe  $C'$  de  $G \setminus N[v]$  telle que  $N(C') \setminus N(C_u) \neq \emptyset$ , et soit  $x \in N(C') \setminus N(C_u)$ . Comme  $N[u] \subseteq N[C_u]$ , il est clair que  $G[C' \cup \{x, v\}]$  est un sous-graphe connexe de  $G \setminus N[u]$ . Ainsi nous avons que  $C' \subsetneq C$  et que  $|C'| < |C|$ , contredisant le choix de  $u$  et de  $C$ . Cela conclut la preuve du Théorème 3.5.

### 3.3.0.2 Preuve du Théorème 3.7

Prouvons maintenant le Théorème 3.7. Soit  $G$  un contre-exemple à ce théorème. Notons que si l'on ajoute un sommet  $s$  à  $G$ , adjacent à un unique sommet de  $G$ , on obtient un contre-exemple au théorème suivant. Le Théorème 3.7 est donc un corollaire du théorème suivant.

#### Théorème 3.28

*Considérons un graphe  $G$  connexe sans mineur  $K_8$  avec un sommet  $s$  de degré au plus 7 tel que  $N[s] \subsetneq V(G)$ . Si toute arête  $e \in E(G) \setminus E(G[N[s]])$  appartient à au moins 6 triangles, alors  $G$  contient un sous-graphe induit isomorphe à  $K_{2,2,2,2,2}$ .*

Soit  $G$  un graphe sans mineur  $K_8$  tel qu'il existe  $X \subseteq V(G)$  avec  $G[X] = K_{2,2,2,2,2}$ . Notons que comme  $K_{2,2,2,2,2}$  est un graphe maximal sans mineur  $K_8$ , pour toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus X$ ,  $N(C)$  induit une clique dans  $G[X]$ .

Considérons maintenant un graphe  $G$  connexe et sans mineur  $K_8$  avec  $s$  un sommet de degré au plus 7 tel que  $N[s] \subsetneq V(G)$ , tel que  $G$  ne contient pas de sous-graphe induit  $K_{2,2,2,2,2}$ , et tel que toute arête  $e \in E(G) \setminus E(G[N[s]])$  appartient à au moins 6 triangles. Nous supposons aussi que  $G$  est un contre-exemple minimal en nombre de sommets. En particulier, cela implique que  $G \setminus N[s]$  est connexe. En effet, dans le cas contraire, on pourrait supprimer une composante connexe de  $G \setminus N[s]$  et obtenir un contre-exemple plus petit. Le graphe  $G$  est presque 8-connexe comme on l'observe dans le lemme suivant.

#### Lemme 3.29

*Pour toute séparation  $(A, B)$  de  $G$  (on note  $S = A \cap B$ ), nous avons l'une des propriétés suivantes :*

- $|S| \geq 8$ , ou
- $s \notin S$  et  $A \setminus B = \{s\}$  (i.e.  $A = N[s]$  et  $B = V(G) \setminus \{s\}$ ), ou
- $s \in S$  et  $|S| \geq 6$ .

PREUVE . Supposons qu'il existe une séparation  $(A, B)$  contredisant le lemme. Notons que  $|S| < 8$  et supposons que  $s \in A$ .

Considérons le premier cas où  $s \notin S = A \cap B$ , c'est-à-dire le cas où  $\{s\} \subsetneq A \setminus B$ . Supposons que parmi tous les contre-exemples,  $(A, B)$  minimise  $|S|$ . Dans ce cas, si la composante connexe de  $A \setminus B$  contenant  $s$  a d'autres sommets alors, en contractant cette composante sur le sommet  $s$ , on obtient un mineur propre  $G'$  de  $G$  tel que  $N[s] \subsetneq V(G')$  (car  $B \setminus A \neq \emptyset$ ) et tel que toute arête qui ne soit pas dans  $E(N[s])$  appartienne à au moins 6 triangles. De plus comme  $\deg_{G'}(v) \leq 7$  et comme  $G' \setminus v$  est un sous-graphe de  $G$ , alors  $G'$  ne contient pas de sous-graphe isomorphe à  $K_{2,2,2,2,2}$ . Or le graphe  $G'$  contredirait la minimalité de  $G$ , donc nous pouvons supposer l'existence d'une composante  $C_0 = \{s\}$  dans  $G \setminus B$ . Comme  $\{s\} \subsetneq A \setminus B$ , soit  $C_1 \neq \{s\}$  une composante connexe de  $G \setminus B$  et  $C_2$  une composante quelconque de  $G \setminus A$ . Notons que pour toutes ces composantes  $C_i$ ,  $N(C_i) \subsetneq S$ . Dans le cas contraire on pourrait contracter (si besoin) une telle composante  $C_i$  en un unique sommet  $s'$  et le graphe induit par  $\{s'\} \cup N[C_1]$  ou par  $\{s'\} \cup N[C_2]$  (qui sont aussi des mineurs propres de  $G$ ) seraient des contre-exemples plus petits. Notons mainte-

nant que  $S = N(s) \cup N(C_i)$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . En effet, dans le cas contraire, la séparation  $(N[s] \cup N[C_i], V(G) \setminus (C_i \cup \{s\}))$  serait un contre-exemple contredisant la minimalité de  $S$ . Enfin, notons que  $N(C_2) \not\subseteq N(C_1)$ , car autrement, en contractant  $C_1$  en un sommet  $s'$  et en considérant le graphe induit par  $N[C_2] \cup \{s'\}$ , on aurait un contre-exemple plus petit au Théorème 3.28 (où  $s'$  joue le rôle de  $s$ ). Ainsi il existe  $x \in N(s) \cap N(C_2)$  tel que  $x \notin N(C_1)$ . En contractant l'arête  $xs$  et la composante  $C_2$  sur le sommet  $s$  et en considérant le graphe induit par  $N[C_1] \cup \{x\}$ , on obtient un contre-exemple plus petit au Théorème 3.28.

Considérons maintenant le cas où  $s \in S = A \cap B$  et notons que dans ce cas  $|S| < 6$ . Supposons que parmi toutes les séparations contenant  $s$ ,  $(A, B)$  est la séparation qui minimise  $|S|$ . Notons que toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus S$  est tel que  $s \in N(C)$ . En effet, nous avons vu qu'autrement  $C$  serait tel que  $|N(C)| \geq 8$  (en considérant la séparation  $(V(G) \setminus C, N[C])$ ) et notons que  $\{s\} \subsetneq V(G) \setminus N[C]$ , ce qui contredirait le fait que  $|S| \leq 6$ . Cela implique que toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus S$  est telle que  $N(C) = S$ . Dans le cas contraire,  $(V(G) \setminus C, N[C])$  serait une séparation contenant  $s$ , ce qui contredirait la minimalité de  $S$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $s$  a au plus autant de voisins dans  $B \setminus A$  que dans  $A \setminus B$ . En particulier, comme  $\deg(s) \leq 7$ ,  $s$  a au plus 3 voisins dans  $B \setminus A$ . Notons que  $B \not\subseteq N[s]$  car autrement  $G \setminus (B \setminus A)$  serait un contre-exemple plus petit. Ainsi il existe une arête dans le sous-graphe  $G[B] \setminus E(G[N[s]])$  qui appartient à au moins 6 triangles, et on a donc que  $|B| \geq 9$  ( $s$  plus les 6 triangles). Donc en contractant toute composante de  $A \setminus B$  sur le sommet  $s$ , on obtient un mineur propre  $G'$  de  $G$  tel que  $\deg(s) \leq 7$  ( $s$  aura degré au plus 4 dans  $S$  car  $|S| < 6$  et aura degré au plus 3 dans  $B \setminus A$ ), tel que  $N[s] \subsetneq V(G')$  (car  $|V(G')| = |B| \geq 9$ ), et tel que toute arête qui ne soit pas dans  $E(N[s])$  appartienne à au moins 6 triangles, ce qui contredit la minimalité de  $G$  et conclut la preuve de ce lemme.  $\square$

Par le Théorème 2.41,  $G$  a au plus  $6n - 21$  arêtes, et donc il existe plusieurs sommets de  $G$  de degré au plus 11. Nous allons maintenant prouver que certains de ces sommets sont situés en dehors de  $N[s]$ . Premièrement, on a besoin du lemme suivant sur le degré minimum des sommets de  $V[G] \setminus N[S]$ .

**Lemme 3.30**

*Tout sommet de  $V[G] \setminus N[s]$  a degré au moins 8 dans  $G$ .*

PREUVE . Soit  $x \in V(G) \setminus N[s]$ .  $(N[x], G \setminus x)$  est une séparation de  $G$  et comme  $x \notin N[s]$  alors par le Lemme 3.29,  $|N[x] \cap (G \setminus x)| \geq 8$  et donc  $|N(x)| \geq 8$ . Ainsi  $x$  a degré au moins 8 dans  $G$ .  $\square$

Le lemme suivant assure l'existence de sommets de  $V(G) \setminus N[s]$  de degré au plus 11 dans  $G$ .

**Lemme 3.31**

*Il existe au moins deux sommets dans  $V(G) \setminus N[s]$  de degré au plus 11 dans  $G$ .*

PREUVE . Supposons par contradiction que tous les sommets de  $V(G) \setminus N[s]$  sauf un dénoté  $x$ , ont degré au moins 12, et rappelons que tout sommet de  $V[G] \setminus N[S]$  a degré au moins 8 par le Lemme 3.30. Notons que tout sommet  $v \in N(s)$  a un voisin dans

$V(G) \setminus N[s]$ , car autrement  $G \setminus v$  serait un contre-exemple plus petit. Ainsi tout sommet  $v \in N(s)$  a une arête incidente appartenant à au moins 6 triangles (sans utiliser l'arête  $sv$ ), ce qui implique en particulier que  $\deg(v) \geq 8$ . Le nombre d'arêtes de  $G$  vérifie

$$12n - 42 \geq 2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 8 + k + 8k + 12(n - k - 2)$$

où  $k = \deg(s)$ . Cela implique que  $k \geq 9$ , contredisant le fait que  $k = \deg(s) \leq 7$  et conclut la preuve du lemme.  $\square$

Il existe au moins deux sommets dans  $V(G) \setminus N[s]$  de degré entre 8 et 11 par les deux lemmes précédents. Le lemme suivant nous en dit plus sur le voisinage de ces sommets de petit degré.

**Lemme 3.32**

*Pour tout sommet  $u \in V(G) \setminus N[s]$  de degré au plus 11 dans  $G$ ,  $G[N(u)]$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ ,  $K_{3,3,3}$  ou  $\overline{P_{10}}$ .*

PREUVE . Soit  $u$  un sommet de  $V(G) \setminus N[s]$  de degré au plus 11 dans  $G$ . Comme on l'a observé précédemment,  $8 \leq \deg(u) \leq 11$  et  $\delta(G[N(u)]) \geq 6$ . Supposons par contradiction que  $N(u)$  n'est pas isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ ,  $K_{3,3,3}$  ou  $\overline{P_{10}}$ . Notons que  $|N(u) \cap N(s)| \leq 6$ , car autrement, par le Lemme 3.22,  $G$  contiendrait un mineur  $K_8$ , ce qui contredit les hypothèses.

Par le Lemme 3.22, un des deux (au moins) sommets de  $N(u) \setminus N(s)$  que l'on dénotera par  $x$ , a une arête incidente dans  $G[N(u)]$  qui appartient à au plus 4 triangles dans  $G[N(u)]$  et donc a au plus 5 triangles dans  $G[N(u)]$ . Ainsi le sixième triangle contenant cette arête passe par un sommet  $v$  de  $V(G) \setminus (N[u] \cup \{s\})$ .

Le Lemme 3.29 implique que toute composante connexe  $C$  de  $V(G) \setminus N[u]$  contenant  $v$  est telle que  $N(C) \geq 8$ . Le graphe obtenu en contractant  $C$  en un unique sommet a un mineur  $K_8$  (par le Lemme 3.22, ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.33**

*Pour tout sommet  $u \in V(G) \setminus N[s]$  de degré au plus 11 dans  $G$ , le graphe  $G[N(u)]$  n'est pas isomorphe à  $K_{3,3,3}$ .*

PREUVE . Observons premièrement qu'ajouter deux arêtes sommet-disjointes ou trois arêtes d'un triangle dans  $K_{3,3,3}$  induit un mineur  $K_7$ . Maintenant supposons par contradiction qu'il existe un sommet  $u \in V(G) \setminus N[s]$  tel que  $G[N(u)]$  est isomorphe à  $K_{3,3,3}$ .

Comme l'ensemble  $N(u) \setminus N[s]$  est non-vide (il a au moins taille  $9 - 7 = 2$ ) et comme tout sommet  $v$  de  $N(u) \setminus N[s]$  a degré au moins 8, et donc possède un voisin en dehors de  $N[u]$ ,  $G \setminus N[u]$  a une composante connexe  $C \neq \{s\}$ . Par le Lemme 3.29,  $|N(C)| \geq 8$ .

Si  $G \setminus N[u]$  possède une autre composante connexe  $C'$  telle que  $|N(C')| \geq 6$ , on peut alors créer deux arêtes sommet-disjointes dans  $N(u)$  en contractant deux chemins sommet-disjointes avec des extrémités non adjacentes dans  $N(u)$  et inclus dans les composantes  $C$  et  $C'$  respectivement. Ceci contredit l'hypothèse que  $G$  est sans mineur  $K_8$ . Donc s'il existe une telle composante  $C'$  alors on doit avoir que  $C' = \{s\}$  et  $\deg(s) \leq 5$ , car en raison

du Lemme 3.29, toute composante différente de  $\{s\}$  a un voisinage de taille au moins 8. Dans la suite, nous considérons le graphe  $G' = G[N[u] \cup C]$  (qui est alors soit  $G$  soit  $G \setminus s$ ).

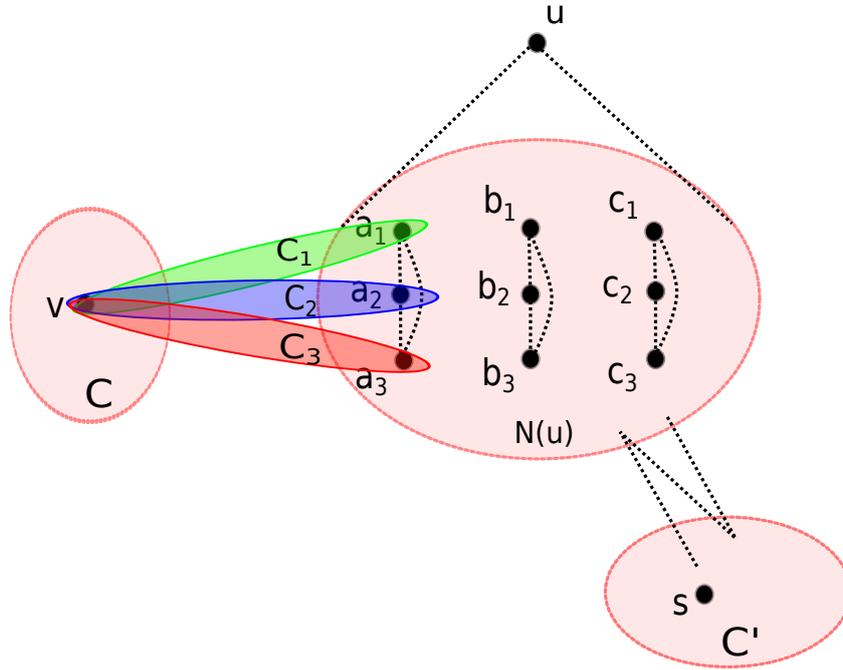


FIGURE 3.3 – Organisation des composantes connexes dans le graphe  $G$  où  $u$  est un sommet dont le voisinage est isomorphe à  $K_{3,3,3}$

Soit  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\{b_1, b_2, b_3\}$  et  $\{c_1, c_2, c_3\}$  les trois stables disjoints de  $K_{3,3,3}$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $\{a_1, a_2, a_3\} \subset N(C)$ , et que  $a_1 \notin N(s)$ . Comme les arêtes de  $N(u)$  incidentes à  $a_1$  appartiennent à au moins 6 triangles,  $a_1$  a au moins deux voisins dans  $G' \setminus N[u]$ . Par le Théorème 2.33 (appliqué sur l'ensemble  $\{a_1, a_2, a_3\}$  dans le graphe  $G'' = G' \setminus \{u, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$ ), il existe un sommet  $v \in V(G'')$  tel qu'au plus un des sommets de l'ensemble  $\{a_1, a_2, a_3\}$  appartienne à chaque composante de  $G'' \setminus v$ . En effet, s'il n'existait pas un tel sommet  $v$ , alors  $G''$  contiendrait un mineur  $K_3$  enraciné en  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $G[N[u]]$  induirait un mineur  $K_8$  dans  $G''$  et donc dans  $G$ , une contradiction. Notons que puisque  $a_1, a_2$  et  $a_3 \in N(C)$ , chaque ensemble  $C \cup \{a_i, a_j\}$  induit un graphe connexe, et donc  $v \neq a_1, a_2, a_3$ . De manière équivalente, nous avons que  $v \in V(G') \setminus N[u]$ . Ainsi  $G'' \setminus v$  contient au moins trois composantes connexes  $C_1, C_2$  et  $C_3$  (cf. Figure 3.3) avec  $a_i \in C_i$ , pour tout  $1 \leq i \leq 3$ . De plus comme  $a_1$  a au moins deux voisins dans  $G' \setminus N[u]$ , un de ces deux voisins est distinct de  $v$  et nous pouvons alors définir par  $C'_1$  l'une des composantes connexes de  $C_1 \setminus \{a_1\}$ . Notons que par construction  $N(C'_1) \subset N(u) \cup \{v\}$ . Comme  $C'_1 \neq \{s\}$ , (car  $a_1 \notin N(s)$ ) et comme nous pouvons avoir que  $v = s$ , le Lemme 3.29 implique que  $N(C'_1) \geq 6$  (en incluant les sommets  $v$  et  $a_1$ ). En particulier,  $C'_1$  a donc au moins 4 voisins dans  $\{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$  et il y a un chemin entre deux sommets  $b_i$  et  $b_j$  ou deux sommets  $c_i$  et  $c_j$ , où  $i \neq j$  et  $1 \leq i, j \leq 3$ , et dont les sommets intérieurs sont contenus dans  $C'_1$ . De plus il existe un chemin entre les sommets  $a_2$  et  $a_3$  dont les sommets intérieurs sont contenus dans  $C_2 \cup \{v\} \cup C_3$ . Cela contredit donc l'hypothèse que  $G$  est sans mineur  $K_8$  et termine la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 3.34**

Pour tout sommet  $u \in V(G) \setminus N[s]$  de degré au plus 11 dans  $G$ , le graphe  $G[N(u)]$  n'est pas isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ .

PREUVE . Supposons par contradiction qu'il existe un sommet  $u \in V(G) \setminus N[s]$  tel que  $G[N(u)]$  soit isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ . On peut noter qu'ajouter deux arêtes à  $K_{2,2,2,2}$  induit un mineur  $K_7$ . Ainsi, comme  $G$  est sans mineur  $K_8$ , il ne devrait pas être possible d'ajouter (en contractant des arêtes), deux nouvelles arêtes à  $N(u)$ .

**Propriété 3.35**

Un sommet  $v \in V(G) \setminus N[u]$  a au plus six voisins dans  $N(u)$ .

PREUVE . Supposons qu'il existe un sommet  $v$  avec 8 voisins dans  $N(u)$ . Alors  $N[u] \cup \{v\}$  induirait le graphe  $K_{2,2,2,2,2}$ , ce qui contredirait la définition de  $G$ . Nous allons donc supposer qu'il existe un sommet  $v$  avec exactement 7 voisins dans  $N(u)$ . Notons qu'éventuellement on pourra avoir  $v = s$ . Notons par  $x$  l'unique sommet de  $N(u) \setminus N(v)$ . Notons que parmi les 4 non-arêtes de  $G[N(u)]$ , seulement l'une d'entre-elles ne peut pas être créée en contractant un arête incidente à  $v$ . Ainsi s'il existe un chemin dont les extrémités sont des sommets non adjacents de  $N(u)$  et dont les sommets internes appartiennent à  $V(G) \setminus (N[u] \cup \{v\})$ , alors nous avons un mineur  $K_8$  et donc une contradiction. Si  $v \neq s$  et si  $s$  a au moins 5 voisins dans  $N(u)$  alors il existe un tel chemin passant par  $s$ . On a donc que  $s = v$  ou bien que  $s$  a au plus 4 voisins dans  $N(u)$ . Dans les deux cas, il existe une arête  $xy$  qui n'appartienne pas  $G[N[s]]$ , et donc cette arête appartient à au moins 6 triangles par hypothèse. Comme  $xy$  appartient à seulement 5 triangles dans  $G[N[u]]$ , cela implique l'existence d'un sommet  $w \in V(G) \setminus N[u]$  adjacent à  $x$  tel que  $w \neq s, v$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $G \setminus (N[u] \cup \{v\})$  contenant  $w$ . Comme  $C \neq \{s\}$ , le Lemme 3.29 implique que  $N(C)$  a taille au moins 6. Donc  $C$  a au moins 5 voisins dans  $N(u)$  et on peut ainsi lier deux sommets non adjacents de  $N(u)$  par un chemin contenu dans  $C$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Par le Lemme 3.31, il existe un autre sommet  $u' \in V(G) \setminus N[s]$  tel que  $\deg(u') \leq 11$ . Par les Lemmes 3.32 et 3.33,  $G[N(u')]$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$  ou  $\overline{P}_{10}$ .

**Propriété 3.36**

Les sommets  $u$  et  $u'$  ne sont pas adjacents.

PREUVE . Supposons par contradiction que  $u$  et  $u'$  soient adjacents. Nous allons premièrement considérer le cas où  $G[N(u')]$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ . Dans ce cas, comme  $u'$  a déjà 7 voisins dans  $N[u]$ ,  $u'$  a exactement un voisin  $v$  dans  $G \setminus N[u]$ . Comme  $v$  a 7 voisins dans  $N[u']$ , nous avons que  $|N(u) \cap N(v)| \geq 7$ , contredisant la Propriété 3.35.

Si  $G[N(u')]$  est isomorphe à  $\overline{P}_{10}$ , cela implique que  $G[N(u) \cap N(u')]$  est isomorphe à  $\overline{C}_6$  (le complément d'un cycle de taille 6). En effet, comme  $u'$  est adjacent à  $u$ , alors  $u \in N(u')$ . Cela contredit l'hypothèse que  $G[N(u)]$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ . En effet, si  $G[N(u)]$  était isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ ,  $G[N(u) \cap N(v)]$  serait isomorphe à  $K_{2,2,2}$ .  $\square$

Comme par le Lemme 3.29, il n'existe pas de ( $\leq 5$ )-séparateur  $(A, B)$  avec  $u \in A \setminus B$  et

$u' \in B \setminus A$ , par le théorème de Menger, il existe 6 chemins sommet-disjoints entre  $u$  et  $u'$ . Ces chemins induisent 6 chemins disjoints  $P_1, \dots, P_6$  entre  $N(u)$  et  $N(u')$ . Notons que tout sommet dans  $N(u) \cap N(u')$  peut être vu comme un chemin de longueur 0.

Ainsi, puisque  $N(u)$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$ , il existe deux non-arêtes  $a_1 a_2$  et  $a_3 a_4$  de  $G[N(u)]$  telles que chaque  $a_i$  est l'une des extrémités du chemin  $P_i$ . On note par  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , l'extrémité du chemin  $P_i$  dans  $N(u')$ . Notons que si  $a_i \in N(u) \cap N(u')$  alors  $a_i = b_i$ . De plus on peut supposer que le choix de  $a_1 a_2$  et  $a_3 a_4$  maximise la taille de  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cap N(u')$ . Comme  $N(u)$  est isomorphe à  $K_{2,2,2,2}$  et comme  $|N(u) \cap N(u')| \leq 6$  (par la Propriété 3.35), alors il y a au plus deux sommets dans  $N(u) \cap N(u')$  distincts de  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$ . Soit  $X = (N(u) \cap N(u')) \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ .

Comme les graphes  $K_{2,2,2,2}$  et  $\overline{P_{10}}$  sont 6-connexe alors  $N[u']$  est 7-connexe et donc  $G[N[u'] \setminus X]$  est 5-connexe. De plus  $G[N[u'] \setminus X]$  a trop d'arêtes pour être planaire. En effet, il a  $9 - |X|$  sommets et au moins  $32 - 7|X|$  arêtes, ce qui est supérieur à la borne de  $3(9 - |X|) - 6$  pour  $0 \leq |X| \leq 2$ .

Nous allons maintenant appliquer le Théorème 2.35 au graphe  $G[N[u'] \setminus X]$  où  $(v_1, \dots, v_k) = (b_1, b_3, b_2, b_4)$ . On obtient alors qu'il existe deux chemins sommet-disjoint dans  $N[u'] \setminus X$  entre  $b_1$  et  $b_2$  et entre  $b_3$  et  $b_4$ , que l'on note  $P_{1,2}$  et  $P_{3,4}$  respectivement. Ces chemins sont disjoints de  $N[u]$  par construction, sauf peut-être à leurs extrémités. Finalement, comme les chemins  $P_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$  construit ci-dessus sont disjoints de  $N[u]$  et de  $N[u'] \setminus X$  (sauf à leurs extrémités), ils existe donc deux chemins disjoints reliant respectivement  $a_1$  avec  $a_2$  (via  $P_1, P_{1,2}$  et  $P_2$ ), et  $a_3$  avec  $a_4$  (via  $P_3, P_{3,4}$  et  $P_4$ ). Cela contredit le fait que  $G$  soit sans mineur  $K_8$  et conclut la preuve du lemme.  $\square$

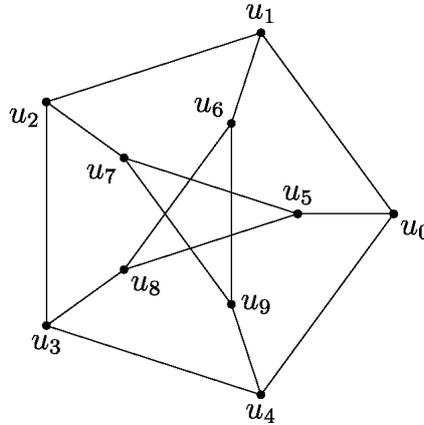


FIGURE 3.4 – Le graphe de Petersen  $P_{10}$ .

Par le Lemme 3.31 il existe au moins deux sommets  $u$  et  $u' \in V(G) \setminus N[s]$  avec degré au plus 11. Par les Lemmes 3.32, 3.33 et 3.34,  $G[N(u)]$  et  $G[N(u')]$  sont isomorphes à  $\overline{P_{10}}$ . Les deux graphes induits par  $N[u]$  et  $N[u']$  sont proches de contenir un mineur  $K_8$  comme le montre la propriété suivante.

**Propriété 3.37**

Dans  $\overline{P_{10}}$ , ajouter deux arêtes  $ab$  et  $cd$  telles que  $ab, bc$  et  $cd \notin E(\overline{P_{10}})$  induit un mineur  $K_7$ . De plus ajouter trois arêtes  $e_1, e_2$  et  $e_3$  telles que  $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = \emptyset$  dans  $\overline{P_{10}}$  induit un mineur  $K_7$ .

PREUVE . On peut aisément vérifier la véracité de la première propriété en notant qu'ajouter n'importe quelle paire d'arêtes  $ab$  et  $cd$  induit le même graphe à isomorphisme près et en notant qu'ajouter les arêtes  $u_1u_2$  et  $u_3u_4$  dans  $\overline{P_{10}}$  (avec les notations de la Figure 3.4),  $\{\{0,2\}, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6,7\}, \{8,9\}\}$  induit un mineur  $K_7$ .

Pour la seconde propriété, on peut supposer que les trois arêtes ajoutées sont telles qu'elles ne correspondent pas deux à deux au cas précédent. Sans perte de généralité supposons que l'une des trois arêtes est  $u_0u_5$  et notons que les autres arêtes sont donc distinctes de  $u_1u_2$ ,  $u_1u_6$ ,  $u_3u_4$ ,  $u_4u_9$ ,  $u_2u_7$ ,  $u_7u_9$ ,  $u_3u_8$  et  $u_6u_8$ . Considérons maintenant le cas où l'une des arêtes ajoutées est incidente à  $u_0u_5$ . Par symétrie on peut considérer que cette arête est  $u_0u_1$ , mais cela implique alors que la troisième arête ajoutée soit distincte de  $u_0u_4$  (car autrement les trois arêtes s'intersecteraient en  $u_0$ ), et des arêtes  $u_3u_4$ ,  $u_6u_9$ ,  $u_5u_7$  et  $u_5u_8$  (par la première propriété). Il n'y a donc plus de candidats restants pour la troisième arête. Cela implique qu'il est suffisant de considérer le cas où les arêtes  $u_0u_5$ ,  $u_2u_3$  et  $u_6u_9$  sont ajoutées à  $\overline{P_{10}}$ . Dans ce cas la partition  $\{\{1\}, \{4\}, \{7\}, \{8\}, \{0,5\}, \{6,9\}, \{2,3\}\}$  induit un mineur  $K_7$ .  $\square$

Listons maintenant les sous-graphes induits de  $\overline{P_{10}}$  de taille 6.

**Propriété 3.38**

*Il y a exactement 6 sous-graphes induits distincts de taille 6 dans  $\overline{P_{10}}$ , incluant  $K_{2,2,2}$ . Les compléments de ces graphes sont représentés sur la Figure 3.5. De plus notons que tout sous-graphe induit de  $\overline{P_{10}}$  de taille au moins 7 contient un sous-graphe de taille 6 distinct de  $K_{2,2,2}$ .*

Nous ne prouverons pas cette propriété car nous pouvons vérifier sa véracité très simplement.

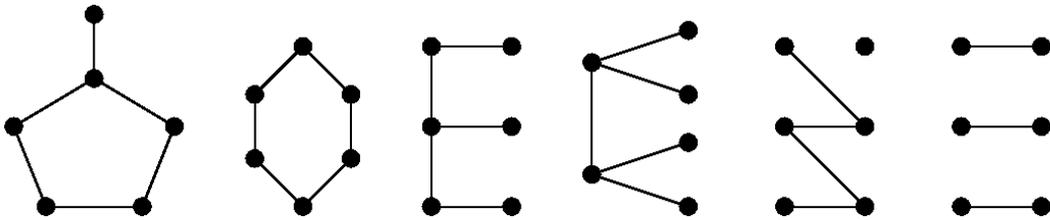


FIGURE 3.5 – Le complément des sous-graphes de  $\overline{P_{10}}$  de taille 6 (i.e. les sous-graphes de  $P_{10}$  de taille 6).

**Lemme 3.39**

*Les sommets de  $N(u) \setminus N(s)$  (resp. de  $N(u') \setminus N(s)$ ) ont degré au moins 12. En particulier,  $u$  et  $u'$  ne sont pas adjacents.*

PREUVE . Supposons par contradiction que  $u$  ait un voisin  $v$  de degré au plus 11. Par les Lemmes 3.32, 3.33 et 3.34, le graphe  $G[N(v)]$  est isomorphe à  $\overline{P_{10}}$ .

Supposons que  $v = u_0$  où  $u_0$  est donné par la Figure 3.4. Dans ce cas  $N(u) \cap N(v) = \{u_0, u_2, u_3, u_5, u_6, u_9\}$  où les indices sont donnés par la Figure 3.4. Par symétrie de  $\overline{P_{10}}$ , on peut alors noter les autres sommets de  $N(v)$  par  $u'_1, u'_4, u'_7$  et  $u'_8$ . Avec cette notation, les indices des sommets de  $N(v)$  correspondent aussi à la Fi-

gure 3.4. Il est maintenant facile de voir qu'en contractant l'une des arêtes des chemins  $(u_2, u'_4, u_7)$  et  $(u_6, u'_5, u_9)$  crée les arêtes  $u_2u_7$  et  $u_6u_9$  dans  $G[N[u]]$  et donc induit un mineur  $K_8$  (par la Propriété 3.37), une contradiction.  $\square$

Les sommets  $u$  et  $u'$  ne sont pas adjacents, néanmoins ils peuvent partager des voisins. Prouvons maintenant qu'ils ne peuvent pas en partager plus de 7.

**Lemme 3.40**

$$|N(u) \cap N(u')| \leq 7.$$

PREUVE . Supposons par contradiction que  $|N(u) \cap N(u')| \geq 8$ , ce qui est équivalent à  $|N(u) \setminus N(u')| \leq 2$  et  $|N(u') \setminus N(u)| \leq 2$ . Notons que comme  $\deg(s) \leq 7$ , l'ensemble  $(N(u) \cap N(u')) \setminus N(s)$  n'est pas vide, et notons par  $x$  l'un des sommets de cet ensemble. Par le Lemme 3.39,  $x$  a degré au moins 12. Comme il a exactement 6 voisins dans  $N(u)$ , et au plus 2 voisins dans  $N(u') \setminus N(u)$ , et comme il est adjacent à la fois à  $u$  et  $u'$ ,  $x$  a au moins deux voisins dans  $V(G) \setminus (N[u] \cup N[u'])$ . Ainsi il existe une composante  $C \neq \{s\}$  dans  $G \setminus (N[u] \cup N[u'])$ . Comme  $C \neq \{s\}$  et  $N(C) \subseteq N(u) \cup N(u')$ , le Lemme 3.29 implique que  $|N(C)| \geq 8$ . Donc, comme  $|N(u') \setminus N(u)| \leq 2$  et  $|N(C) \cap N(u)| \geq 6$ , il existe un chemin  $P$  dont les sommets intérieurs appartiennent à  $C$  et avec des extrémités non adjacentes dans  $N(u)$  (par la Propriété 3.38). Notons par  $x$  et  $y$  les extrémités de  $P$ . Comme  $|N(u) \cap N(u')| \geq 8$ , par la Propriété 3.38, il existe un sommet  $z \in N(u) \cap N(u')$  tel que  $z \neq x, y$ , et tel que contracter l'arête  $zu'$  crée au moins deux arêtes dans  $N(u)$ . Comme ces trois arêtes ajoutées ( $xy$  et les arêtes adjacentes à  $z$ ) ne s'intersectent pas, la Propriété 3.37 implique que  $G$  contient un mineur  $K_8$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Par le Lemme 3.29, il n'existe pas de  $(\leq 5)$ -séparation  $(A, B)$  avec  $u \in A \setminus B$  et  $u' \in B \setminus A$ . Le théorème de Menger implique alors l'existence de 6 chemins sommet-disjoints  $P_1, \dots, P_6$  entre  $u$  et  $u'$ . En minimisant la longueur totale de ces chemins, on peut supposer que chaque sommet dans  $N(u) \cap N(u')$  correspond à l'un de ces chemins (de longueur 0 dans ce cas) et que chacun de ces chemins intersecte  $N(u)$  (resp.  $N(u')$ ) en un seul sommet. En contractant les arêtes intérieures de ces chemins (celles non-indicentes à  $u$  ou  $u'$ ), et en considérant le graphe induit par  $N[u] \cup N[u']$  on obtient un graphe  $H$  tel que :

- $u$  et  $u'$  ne sont pas adjacents et  $|N_H(u) \cap N_H(u')| = 6$  ou  $7$  (par le Lemme 3.40),
- $\deg_H(u) = 10$ , et  $H[N(u)]$  contient le graphe  $\overline{P_{10}}$  comme sous-graphe,
- $\deg_H(u') = 10$ , et  $H[N(u')]$  contient le graphe  $\overline{P_{10}}$  comme sous-graphe.

Si le graphe induit par  $N_H(u) \cap N_H(u')$  est isomorphe à  $K_{2,2,2}$ , alors on peut supposer sans perte de généralité que  $N(u) = \{u_0, \dots, u_9\}$  où les indices sont donnés par la Figure 3.4. On peut choisir sans perte de généralité les arêtes de  $N_H(u) \cap N_H(u')$  comme étant les arêtes  $u_0u_5$ ,  $u_2u_3$  et  $u_6u_9$ . On peut alors noter les sommets de  $N(u')$  de manière que cette donnée par la Figure 3.4 et de manière à ce que les sommets  $u_0, u_2, u_3, u_5, u_6$  et  $u_9$  correspondent sur l'intersection  $N_H(u) \cap N_H(u')$ . On renomme alors les sommets de  $N(u')$  n'appartenant pas à  $N_H(u) \cap N_H(u')$  par  $u'_1, u'_4, u'_7$  et  $u'_8$  pour ne pas les confondre avec ceux de  $N(u)$ .

Maintenant observons qu'en contractant l'arête  $u_0u'$  et les chemins  $(u_6, u'_7, u'_8)$  et  $(u_2, u'_4, u'_1)$ , on crée respectivement les arêtes  $u_0u_5$ ,  $u_6u_9$  et  $u_2u_3$  (qui sont donc des non-arêtes dans  $\overline{P_{10}}$ ). Par la Propriété 3.37,  $N[u]$  contient un mineur  $K_8$ , une

contradiction. On peut donc supposer par la Propriété 3.38 que le complément de  $N_H(u) \cap N_H(u')$  contient un chemin  $(a, b, c, d)$ . Comme  $\overline{P_{10}}$  est 6-connexe, le graphe induit par  $\{a, b\} \cup (N_H(u') \setminus N(u))$  est connexe et donc contient un chemin de  $a$  à  $b$ . Par la Propriété 3.37, ce chemin, avec le chemin  $(c, u', d)$ , induit que  $H$  (qui est un mineur de  $G$  par construction) contient un mineur  $K_8$ , une contradiction. Ainsi le contre-exemple  $G$  n'existe pas, ce qui conclut la preuve du théorème.

### 3.3.0.3 Preuve du Théorème 3.6

La preuve du Théorème 3.6 est similaire à celle ci-dessus. On peut prouver la variante suivante du Théorème 3.28.

#### Théorème 3.41

*Soit  $G$  un graphe connexe sans mineur  $K_8$  contenant un sommet  $s$  de degré au plus 7, tel que  $N[s] \subsetneq V(G)$  et tel que  $\min_{v \in V(G) \setminus N[s]} \deg(v) \geq 9$ . Alors  $G$  a une arête  $e \in E(G) \setminus E(G[N[s]])$  appartenant à au plus 5 triangles.*

L'unique différence avec la démonstration ci-dessus vient du fait qu'il n'est plus nécessaire de considérer le cas où un sommet  $u$  induit un  $K_{2,2,2,2}$  dans son voisinage. De plus, le fait d'avoir  $\min_{v \in V(G) \setminus N[s]} \deg(v) \geq 9$  permet un certain nombre de simplifications dans la preuve.

## 3.4 Preuve des généralisations aux matroïdes

Dans cette partie, nous prouvons le Théorème 3.8 relatifs aux matroïdes.

### 3.4.1 Preuve du Théorème 3.8

#### Lemme 3.42

*Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux matroïdes de support  $E_1$  et  $E_2$  respectivement et tels que  $M = M_1 \oplus_k M_2$ ,  $1 \leq k \leq 3$  soit un matroïde simple (de plus, on suppose que  $M$  est binaire lorsque  $k = 3$ ). Soit  $e \in E_1 \setminus E_2$  tel que  $\{e, x\} \in \mathcal{S}(M_1)$  pour tout élément  $x \in E_1 \cap E_2$  et supposons que  $e$  appartienne à au moins  $t$  triangles dans  $M$ . Alors  $e$  appartient à  $t$  triangles dans  $si(M_1)$ .*

PREUVE . Soit  $e \in E_1 \setminus E_2$  tel que  $\{e, x\} \in \mathcal{S}(M_1)$  pour tout élément  $x \in E_1 \cap E_2$  et supposons que  $e$  appartienne à  $t$  triangles de  $M$ . Nous allons montrer que  $e$  appartient à  $t$  triangles de  $si(M_1)$ .

Soit  $T = \{e, f, g\}$  un des  $t$  triangles de  $M$  contenant  $e$ . Par définition de la  $k$ -somme,  $e, f, g \notin E_1 \cap E_2$ . Soit  $T$  est un circuit de  $M_1$  et nous avons fini, soit  $T$  peut-être écrit sous la forme  $C_1 \Delta C_2$  où  $C_i$  est un circuit de  $M_i$  pour  $i = 1, 2$ . Comme  $M$  est simple et  $E_1 \cap E_2$  ne contient pas de boucles (par définition de la  $k$ -somme) alors aucun de  $M_1$  ou  $M_2$  ne contient de boucles et donc  $|C_1|, |C_2| \geq 2$ .

Si  $|C_1| = 2$ , disons  $C_1 = \{e, x\}$ , alors  $x \in E_1 \cap E_2$  (autrement  $e$  et  $x$  seraient des éléments parallèles dans  $M$ , ce qui contredirait l'hypothèse sur la simplicité de  $M$ ). Donc  $e$  est

parallèle à un élément  $x \in E_1 \cap E_2$ , ce qui contredit les hypothèses de ce lemme. On a donc que  $|C_1| \geq 3$ .

Si  $|C_2| = 2$ , disons  $C_2 = \{g, x\}$ , alors  $x \in E_1 \cap E_2$  (autrement  $g$  et  $x$  seraient des éléments parallèles dans  $M$ , ce qui contredirait l'hypothèse sur la simplicité de  $M$ ) Ainsi, comme  $f \in T = C_1 \Delta C_2$  alors  $f \in E_1$  et comme  $x \in E_1$  et est parallèle à  $g$  alors  $\{e, f, x\}$  est un triangle de  $M_1$ .

Supposons maintenant que  $|C_1|, |C_2| \geq 3$ . Comme  $T = C_1 \Delta C_2$  alors on a que  $3 = |T| = |C_1| + |C_2| - 2|C_1 \cap C_2|$  et donc  $|C_1 \cap C_2| \geq 2$ . Ainsi  $M$  est issu d'une 3-somme (i.e.  $k = |C_1 \cap C_2| = 3$ ). On peut donc supposer que  $M$  est binaire. De plus comme  $E_1 \cap E_2$  est un triangle de  $M_1$  et  $M_2$ , alors  $C_1$  et  $C_2$  contiennent chacun au plus deux éléments de  $E_1 \cap E_2$  ou bien ils sont égaux à  $E_1 \cap E_2$ . Dans ce dernier cas  $e \in E_1 \cap E_2$ , ce qui contredit les hypothèses car  $e \in E_1 \setminus E_2$ . Supposons donc que nous sommes dans le premier cas et donc que  $|C_1 \cap C_2| = 2$ , et disons que  $C_1 \cap C_2 = \{x, y\}$ . De plus, nous avons que  $C_1$  ou  $C_2$  a cardinalité au moins 4.

Nous allons utiliser un résultat dû à Fournier [27] affirmant que  $M$  est un matroïde binaire si et seulement si pour tout circuit  $C_1$  et  $C_2$  distincts et tout ensemble  $\{p, q\} \subseteq C_1 \cap C_2$ , alors il existe un circuit de  $M$  contenu dans  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{p, q\}$ .

On a alors deux cas. Cas a) :  $|C_2| = 4$  et  $|C_1| = 3$ . On note  $C_1 = \{e, x, y\}$ . En appliquant le résultat de Fournier aux circuits  $E_1 \cap E_2 = \{x, y, z\}$  et  $C_1 = \{e, x, y\}$ , on obtient que  $\{e, z\}$  contient un circuit et comme par hypothèse ni  $e$  ni  $z$  ne sont des boucles alors  $e$  et  $z$  sont des éléments parallèles, contredisant les hypothèses car  $z \in E_1 \cap E_2$ .

Cas b) :  $|C_2| = 3$  et  $|C_1| = 4$ . On note  $C_2 = \{x, y, g\}$ . Par le résultat de Fournier appliqué aux circuits  $\{x, y, z\}$  et  $C_2$ , on obtient que  $g$  et  $z$  sont des éléments parallèles. Ainsi  $(T \setminus g) \cup \{z\}$  est un triangle de  $si(M_1)$  et n'est pas un triangle de  $M$ .

Il reste à vérifier que deux triangles de  $M$  contenant  $e$  induisent, par la construction précédente, deux triangles différents dans  $si(M_1)$ . Soit  $T$  et  $T'$  deux triangles différents de  $M$  contenant  $e$  et qui ne soient pas des triangles de  $M_1$ . Notons que  $T$  et  $T'$  contiennent exactement deux éléments de  $M_1$  car autrement, comme nous l'avons vu précédemment,  $e$  serait parallèle à un élément de  $E_1 \cap E_2$ , ce qui contredirait les hypothèses. On note par  $w$  (resp.  $w'$ ) l'unique élément de  $T$  (resp.  $T'$ ) appartenant à  $M_2$ . Si  $T \setminus \{w\}$  est différent de  $T' \setminus \{w'\}$  alors les deux triangles de  $si(M_1)$  obtenus à partir de  $T$  et  $T'$  par la construction précédente seront différents. Supposons maintenant que  $T \setminus \{w\} = T' \setminus \{w'\}$ . Dans la construction donnée ci-dessus, les éléments  $w$  et  $w'$  sont remplacés par des éléments de  $E_1 \cap E_2$  respectivement parallèles à  $w$  et  $w'$ . Notons de plus que  $w$  et  $w'$  ne peuvent pas être parallèles à un même élément de  $E_1 \cap E_2$  car cela impliquerait que  $w$  et  $w'$  sont parallèles entre-eux et contredirait donc la simplicité de  $M$ . Ainsi  $w$  et  $w'$  sont parallèles à deux éléments différents de  $E_1 \cap E_2$  et donc, par la construction précédente,  $T$  et  $T'$  induisent deux triangles différents dans  $si(M_1)$ .  $\square$

### Lemme 3.43

*Soit  $M$  un matroïde graphique simple et connexe tel que chacun de ses éléments appartient à au moins trois triangles sauf peut-être pour un élément  $e$  ou pour les éléments d'un*

*triangle T de M et tel que M ne soit pas isomorphe à T ou e. Alors M contient un mineur  $M(K_5)$ .*

PREUVE . Soit G un graphe tel que  $M = M(G)$ . On denotera par X l'ensemble de sommets correspondant aux extrémités de l'arête e ou aux sommets du triangle T suivant le cas. En particulier, on a que  $|X| \leq 3$ . Nous allons prouver que G contient un mineur  $K_5$ . Comme  $M(G)$  est simple alors G à au moins 4 sommets, il existe donc  $u \in V(G) \setminus X$ . Comme  $M(G)$  est connexe alors G l'est aussi et donc  $\deg(u) \geq 1$ . De plus, toute arête incidente à u appartient à au moins trois triangles donc  $\delta(G[N(u)]) \geq 3$ . Par un résultat de Dirac [24], on a que tout graphe sans mineur  $K_4$  contient un sommet de degré 2. Ainsi  $G[N(u)]$  contient un mineur  $K_4$  et donc  $G[N(u)]$  contient un mineur  $K_5$ . On en déduit que M contient un mineur  $M(K_5)$ .  $\square$

#### **Lemme 3.44**

*Il n'existe pas de matroïde co-graphique simple et connexe M tel que chacun de ses éléments appartient à au moins trois triangles sauf peut-être pour un élément e ou pour les éléments d'un triangle T de M et tel que M ne soit pas isomorphe à T ou e.*

PREUVE . Supposons par contradiction qu'il existe un tel matroïde co-graphique M. Soit G le graphe tel que  $M = M^*(G)$ . Comme M est connexe par hypothèse alors G est connexe. On rappelle que  $E(G)$  correspond à l'ensemble des éléments de M et que les circuits correspondent aux coupes (d'arêtes) de G. De plus comme M est simple, G ne contient ni coupe de taille 1 ou 2 et donc G est 3-arête-connexe. Une coupe est dite **triviale** si elle correspond à l'ensemble des arêtes incidentes à un même sommet v. Notons que toute arête qui appartient à au moins 3-coupes, appartient en particulier à au moins une 3-coupe non-triviale.

Dans le cas où M a un élément a qui n'appartient pas à 3 triangles, on note par v l'une des extrémités de l'arête a dans G. Dans le cas où M contient un triangle  $T = \{a, b, c\}$  dont les éléments n'appartiennent pas nécessairement à 3 triangles, la coupe est soit triviale et dans ce cas on note par v le sommet de degré 3 incident à a, b et c, soit non-triviale et dans ce cas toute arête de G appartient à au moins une 3-coupe non triviale.

On a la propriété suivante :

#### **Propriété 3.45**

*Il n'existe pas de graphe G 3-arête-connexe avec un sommet v tel que  $E(G \setminus \{v\})$  soit non-vide et que chaque arête  $e \in E(G \setminus \{v\})$  appartienne à une 3-coupe non-triviale de G.*

Il est clair que la propriété ci-dessus contredit l'existence de G et implique donc le lemme. De plus pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $G \setminus \{v\}$  n'est pas un stable. En effet, supposons que toutes les arêtes de G soient incidentes à v alors le graphe est planaire et donc, le matroïde dual, c'est-à-dire M, est un matroïde graphique associé à un graphe planaire (cf. Chapitre 1). Or dans le Théorème 3.2, nous avons vu que tout graphe tel que chaque arête appartienne à 3 triangles contient un mineur  $K_5$  et n'est donc pas planaire.

Nous allons maintenant prouver que la Propriété 3.45 est vraie. Considérons par contra-

diction un graphe  $G$  qui est 3-arête connexe et  $v$  un sommet de  $G$  tel que toute arête  $e \in E(G \setminus \{v\})$  appartienne à au moins une 3-coupe non triviale de  $G$ .  $G \setminus \{v\}$  n'est pas un stable par hypothèse et donc  $G$  contient des 3-coupes non-triviales. Soit donc  $\{e_1, e_2, e_3\} \subset E(G)$  une telle 3-coupe non triviale. On notera par  $V_1$  et  $V_2$  la partition des sommets de  $G$  induite par cette 3-coupe. On choisit alors  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de manière à ce que  $v \in V_1$  et que  $|V_2|$  soit minimal (cf. Figure 3.6). Comme cette 3-coupe est non-triviale, il existe au moins deux sommets dans  $V_2$ , et comme  $G$  est 3-arête-connexe il existe une arête  $f_1$  dans  $G[V_2]$ . On note  $\{f_1, f_2, f_3\} \subset E(G)$  une 3-coupe non-triviale de  $G$  contenant  $f_1$  (cette coupe existe par hypothèse). Elle partitionne  $V(G)$  en deux ensemble  $X$  et  $Y$  et on peut supposer que  $v \in X$ . Considérons maintenant la partition des sommets de  $G$  raffinée de la manière suivante :  $V_1^X = V_1 \cap X$ ,  $V_1^Y = V_1 \cap Y$ ,  $V_2^X = V_2 \cap X$  et  $V_2^Y = V_2 \cap Y$ . Notons que comme  $v \in V_1^X$  et comme  $f_1$  a ses deux extrémités dans  $V_2$ , les ensembles  $V_1^X$ ,  $V_2^X$  et  $V_2^Y$  sont non-vides. Notons également que par définition  $|V_2| \leq |Y|$  et donc que  $|V_2^X| \leq |V_1^Y|$ . Cela implique en particulier que  $V_1^Y$  est aussi non-vide.

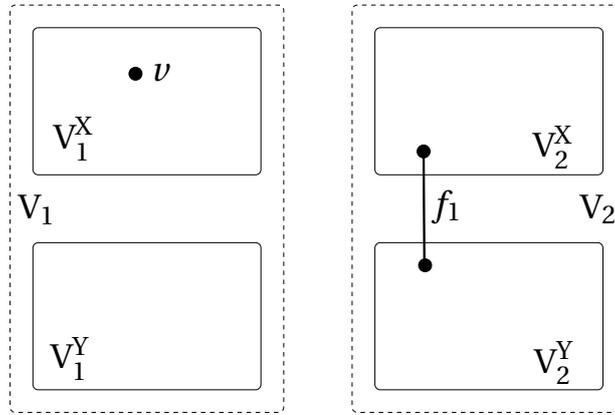


FIGURE 3.6 – Le graphe 3-arête connexe  $G$ , avec les coupes  $\{e_1, e_2, e_3\}$  et  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

Par construction, il y a au plus 6 arêtes dont les extrémités sont dans des ensembles différents de cette partition (l'égalité est obtenue quand les 3-coupes  $\{e_1, e_2, e_3\}$  et  $\{f_1, f_2, f_3\}$  sont disjointes). De plus, comme  $G$  est 3-arête-connexe, chaque sous-ensemble de la partition (qui sont non-vides) a au moins 3 arêtes sortantes. Soit  $k_e$  le nombre d'arêtes de l'ensemble  $\{e_1, e_2, e_3\}$  incidentes à un sommets de  $V_2^X$ . Notons que  $V_2^Y$  est incident à  $k'_e = 3 - k_e$  de ces arêtes. D'un autre côté, aucune des arêtes de l'ensemble  $\{f_1, f_2, f_3\}$  n'est incidente à  $V_1$  et  $V_2$ , ainsi le nombre  $k_f$  d'arêtes de cet ensemble incidentes à  $V_2^X$  est le même que le nombre  $k'_f$  d'arêtes contenues dans cet ensemble qui sont incidentes à  $V_2^Y$ . Comme  $k_e \neq k'_e$ , cela contredit le fait que  $V_2^X$  et  $V_2^Y$  sont incidents à exactement  $k_e + k_f = k'_e + k'_f = 3$  arêtes. Ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

Muni de ces lemmes, on peut maintenant prouver le Théorème 3.8.

Soit  $M$  un matroïde tel que chaque élément appartienne à au moins 3 triangles sauf peut-être un élément  $e$  ou pour les éléments d'un triangle  $T$  et tel que  $M$  soit différent de  $T$  et de  $e$ . Supposons que  $M$  ne contienne pas  $U_{2,4}$ ,  $F_7$  ou  $M(K_5)$  comme mineur et supposons que  $M$  est minimal avec cette propriété (pour la relation de mineur).

Notons premièrement que  $M$  doit être binaire (car il ne contient pas  $U_{2,4}$  comme mineur). De plus  $M$  est 2-connexe car autrement, par la Proposition 1.9, on pourrait écrire

$M$  sous la forme  $M_1 \oplus_1 M_2$ , où  $M_1$  et  $M_2$  sont deux mineurs propres de  $M$ . Mais par le Lemme 3.42,  $si(M_1)$  et  $si(M_2)$  sont tels que chaque élément appartienne à 3 triangles. Comme  $M_1$  et  $M_2$  sont des mineurs propres de  $M$  alors il en est de même pour  $si(M_1)$  et  $si(M_2)$ . Ainsi  $si(M_1)$  et  $si(M_2)$  contredisent la minimalité de  $M$ . Supposons maintenant que  $M$  ne soit pas 3-connexe. Comme  $M$  est 2-connexe alors, par la Proposition 1.11,  $M$  peut s'écrire sous la forme  $M_1 \oplus_2 M_2$  où  $M_1$  et  $M_2$  sont des mineurs stricts de  $M$ . Mais par le Lemme 3.42, l'un des matroïdes  $si(M_1)$  ou  $si(M_2)$  est tel que chaque élément appartienne à 3 triangles, sauf éventuellement les éléments de  $E(M_1) \cap E(M_2)$ , ce qui contredit la minimalité de  $M$ .

Comme  $M$  est 3-connexe, binaire et sans mineur  $F_7$  alors par le Théorème 2.30 et les Propositions 1.9 et 1.11,  $M$  est isomorphe à  $F_7^*$  ou bien est un matroïde régulier. Mais dans le premier cas il est aisé de vérifier qu'aucun élément de  $F_7^*$  n'appartient à au moins 3 triangles, ce qui contredit les hypothèses. On en déduit donc que  $M$  est un matroïde régulier 3-connexe.

Mais par la caractérisation des matroïdes réguliers de Seymour (Théorème 2.31),  $M$  est soit un matroïde graphique, soit un matroïde co-graphique, soit est isomorphe au matroïde  $R_{10}$ , soit il est le produit d'une 3-somme.

Supposons que  $M = M_1 \oplus_3 M_2$ . Comme l'ensemble de tous les éléments de  $M$  qui n'appartiennent pas à 3 triangles est soit réduit à un élément soit à l'ensemble des éléments d'un même triangle, cet ensemble est contenu entièrement soit dans  $M_1$  soit dans  $M_2$ . Sans perte de généralité, on peut supposer qu'ils sont contenus dans  $M_2$ . Mais dans ce cas, comme  $M$  est 3-connexe et binaire, alors  $M_1$  est un mineur propre de  $M$  par la Proposition 1.12 et tout élément de  $si(M_1)$  appartient à 3 triangles par le Lemme 3.42 sauf peut-être pour les éléments de  $E(M_1) \cap E(M_2)$ . Comme  $si(M_1)$  est un mineur de  $M_1$ , alors il contredit la minimalité de  $M$ .

On en déduit que  $M$  est soit graphique, soit co-graphique, ou est isomorphe à  $R_{10}$ .

Supposons que  $M$  soit isomorphe à  $R_{10}$ . Remarquons que pour tout élément  $e \in E(R_{10})$ , on a que  $R_{10} \setminus e$  est isomorphe à  $M(K_{3,3})$ . Comme  $M(K_{3,3})$  est sans triangles, alors tout élément de  $R_{10}$  devrait être contenu dans tous les triangles de  $R_{10}$ , impliquant que tout triangle contiendrait 10 éléments, ce qui est une contradiction. Ainsi  $R_{10}$  est sans triangle, ce qui contredit les hypothèses.

Donc  $M$  est soit graphique soit co-graphique et dans ce cas les Lemmes 3.43 et 3.44 concluent la preuve.  $\square$

### 3.4.2 Preuve du Théorème 3.9

Dans cette partie, nous ne donnerons pas une preuve complète de ce théorème. En effet une grande partie de la preuve consiste en une variation de la preuve du Théorème 3.4 donné dans la Section 3.2 et du Théorème 3.8 donné dans la Section 3.4.1.

Supposons par contradiction  $M$  un matroïde régulier tel que tout élément appartienne à au moins  $t$  triangles pour  $1 \leq t \leq 5$  mais ne contenant pas  $M(K_{t+2})$  comme mineur et tel que  $M$  soit minimal en nombre d'éléments. Par le Lemme 3.42, à la manière de la preuve du Théorème 3.8, on peut prouver que  $M$  est 3-connexe si on assume qu'un élément  $e$  ou

que les éléments d'un triangle  $T$  de  $M$  puisse ne pas appartenir à au moins  $t$  triangles. Par la caractérisation des matroïdes réguliers de Seymour (Théorème 2.31),  $M$  est soit un matroïde graphique, soit un matroïde co-graphique, soit est isomorphe au matroïde  $R_{10}$ , soit il est issu d'une séquence de 3-somme. Comme  $R_{10}$  est sans triangles,  $M$  ne peut être isomorphe à  $R_{10}$ . De plus si  $M$  était issu d'une 3-somme, comme  $M$  est régulier (et donc binaire en particulier), par le Lemme 3.42, on pourrait trouver un contre-exemple plus petit, ce qui contredirait la minimalité de  $M$ . Ainsi  $M$  est soit graphique soit co-graphique. Par le Lemme 3.44,  $M$  n'est pas co-graphique. On conclut la preuve de ce théorème en utilisant le lemme suivant.

**Lemme 3.46**

*Soit  $G$  un graphe tel que tout élément appartienne à au moins  $t$  triangles, pour  $1 \leq t \leq 5$ , sauf éventuellement pour une unique arête  $e$  ou pour les arêtes d'un triangle  $T$  de  $G$ , alors  $G$  contient le graphe  $K_{t+2}$  comme mineur.*

Nous ne donnerons pas la preuve de ce théorème. La preuve consiste en une modification de la preuve du Théorème 3.2 donné dans la Section 3.1 et de la preuve du Théorème 3.4 donné dans la Section 3.2. Le théorème de Mader nous permet en effet d'affirmer l'existence d'un sommet de petit degré qui ne soit pas incident à l'arête  $e$  ou aux arêtes du triangle  $T$ .

**3.4.3 Preuve du Théorème 3.10**

Dans cette partie, nous allons prouver le Théorème 3.10 dont la preuve repose sur le Théorème 2.32 dû à Oxley [55]. On va d'abord montrer la propriété suivante qui nous permettra de traiter le cas des matroïdes 3-connexes par la suite.

**Propriété 3.47**

*Soit  $M$  un matroïde ternaire 3-connexe sans mineur  $M(K_4)$  avec au moins deux éléments tel que tout élément appartienne à 2 triangles, sauf peut-être pour un élément  $e$ , alors  $M$  contient un mineur  $P_7$  ou est isomorphe à  $U_{2,4}$ .*

PREUVE . Par le Théorème 2.32,  $M$  est isomorphe à une whirl  $W^r$ , à  $J$  ou a un mineur 3-connexe du matroïde de Steiner  $S(5,6,12)$ . Toute whirl  $W^r$  pour  $r \geq 3$  contient au moins deux éléments qui n'appartiennent pas à deux triangles et le matroïde  $J$  contient un mineur  $P_7$  ([55, (2.9)]). De plus, nous avons vérifié (par ordinateur) que chacun des mineurs 3-connexe de  $S(5,6,12)$  contient un mineur  $P_7$  ou a au moins deux éléments n'appartenant pas à 2 triangles (cf. Annexe A.3). Ainsi  $M$  contient un mineur  $P_7$  ou est isomorphe à la whirl  $W^2$ , i.e. au matroïde  $U_{2,4}$ , ce qui conclut la preuve. □

Soit  $M$  un matroïde ternaire sans mineur  $K_4$  tel que tout élément appartienne à au moins 2 triangles. Supposons premièrement que  $M$  soit 3-connexe. Alors la Propriété 3.47 conclût la preuve.

Supposons maintenant que  $M$  ne soit pas 3-connexe. Par les Propositions 1.9 et 1.11,  $M$  peut s'écrire sous la forme  $M_1 \oplus_k M_2$  avec  $k \leq 2$  et où  $M_1$  et  $M_2$  sont deux mineurs stricts de  $M$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $M_1$  est 3-connexe (en considérant

un choix de  $M_1$  et  $M_2$  où  $|M_1|$  est minimal). De plus, par le Lemme 3.42, tous les éléments de  $M_1$  appartiennent à au moins 2 triangles sauf peut-être pour l'unique élément de  $E(M_1) \cap E(M_2)$ . Ainsi par la Propriété 3.47,  $M_1$  contient un mineur  $P_7$  ou bien  $M_1$  est isomorphe à  $U_{2,4}$ . Dans le premier cas, comme  $M_1$  est un mineur de  $M$  alors  $M$  contient un mineur  $P_7$ . Dans le deuxième cas, supposons par contradiction que  $M$  ne contienne pas de sous-matroïde  $U_{2,4}$ . Si  $M$  est la somme directe de  $M_1$  et  $M_2$  alors  $M_1$  est un sous-matroïde de  $M$  et contient à  $U_{2,4}$ , une contradiction. On en déduit donc que  $M$  est la 2-somme de  $M_1$  et  $M_2$ . Notons  $p$  l'unique élément de  $E(M_1) \cap E(M_2)$ . On affirme que tout élément de  $E(M_1) \setminus \{p\}$  appartient à au plus 1 triangle dans  $M$ . En effet, supposons qu'un élément de  $E(M_1) \setminus \{p\}$  appartienne à deux triangles. Alors l'un des deux triangles, noté  $T$ , peut s'écrire, par définition de la 2-somme, sous la forme  $C_1 \Delta C_2$  où  $C_i$  est un circuit de  $M_i$  pour  $1 \leq i \leq 2$ . Comme  $|T| = |C_1| + |C_2| - |C_1 \cap C_2| = 3$  et que  $|C_1 \cap C_2| \leq 1$ , on en déduit que soit  $|C_1| \leq 3$  et  $|C_2| = 2$ , soit  $|C_1| = 2$  et  $|C_2| \leq 3$ . Le dernier cas ne se produit pas car  $C_1$  serait un circuit de  $M_1$  de taille 2, et comme  $M_1$  est isomorphe à  $U_{2,4}$ , il n'en contient pas. Dans le premier cas, comme  $|C_2| = 2$  et  $p \in C_2$  par définition de la 2-somme, notons  $C_2 = \{p, q\}$ . Or comme  $p \in M_2$  et que l'élément  $q$  est parallèle à l'élément  $p$ , on en déduit que  $M_{|E(M_1) \cup \{q\}}$  est isomorphe à  $U_{2,4}$  donc  $M$  contient un sous-matroïde  $U_{2,4}$ , une contradiction.  $\square$

### 3.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que le fait d'avoir chaque élément appartenant à  $k$  triangles implique l'existence d'un mineur  $K_{k+2}$  pour  $k \leq 5$ . Pour  $k = 6$ , nous avons vu que ce type de théorème ne se généralise pas directement et certaines obstructions apparaissent. Nous conjecturons que le cas  $k = 7$  se généralise de la manière suivante.

**Conjecture 3.48**

*Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_9$  avec  $\delta(G) \geq 13$  a une arête  $uv$  telle que  $u$  a degré 13 et  $uv$  appartient à au plus 6 triangles.*

**Conjecture 3.49**

*Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_9$  avec  $\delta(G) \geq 11$  a une arête  $uv$  appartenant à au plus 6 triangles.*

**Conjecture 3.50**

*Tout graphe  $G$  sans mineur  $K_9$  ne contenant pas  $K_{2,2,2,2,1}$  comme sous-graphe induit a une arête  $uv$  appartenant à au plus 6 triangles.*

Ces conjectures sont motivées par les travaux de Song et Thomas [69] notamment par le Théorème 2.42 où ils caractérisent les obstructions au théorème de Mader pour les graphes sans mineur  $K_9$ . On remarque en particulier que le graphe  $K_{2,2,2,3,3}$  contient des arêtes n'appartenant pas à au moins 7 triangles.

Dans le cas des matroïdes, le problème apparaît bien plus compliqué. En effet si l'on connaît une caractérisation des graphes sans mineur  $K_t$  pour  $t \leq 5$  (cf. Section 2.2 du

Chapitre 2), une telle caractérisation est largement ouverte pour les matroïdes sans mineur  $K_t$  pour  $t \geq 4$ . Néanmoins, la question suivante paraît être un problème intéressant.

QUESTION. Pour tout entier  $t > 0$ , existe-t-il deux listes finies  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{S}$  de matroïdes telles que :

- pour tout  $M \in \mathcal{L} \cup \mathcal{S}$ , chaque élément de  $M$  appartient à au moins  $t$  triangles, et
- pour tout matroïde  $M$  tel que chaque élément de  $M$  appartient à au moins  $t$  triangles, il existe  $S \in \mathcal{S}$  tel que  $S$  soit un sous-matroïde de  $M$  ou bien il existe  $M' \in \mathcal{L}$  tel que  $M'$  soit un mineur de  $M$ .

Cette question est ouverte pour  $t \geq 4$ . En particulier, une telle liste contiendra un matroïde uniforme  $U_{2,k}$  où  $k$  dépend de  $t$  ainsi que le matroïde graphique  $M(K_{t+2})$ . Un premier pas vers cette question serait de le prouver pour les matroïdes représentables qui présentent de bonnes propriétés structurelles.

Pour  $t \geq 8$ , le problème est ouvert pour les matroïdes graphiques. On conjecture que, pour les matroïdes graphiques, la liste finie  $\mathcal{S}$  donnée par la question ci-dessus pour un  $t$  fixé, est un sous-ensemble de la liste des obstructions à la généralisation du théorème de Mader pour les graphes sans mineur  $K_{t+2}$ . Cela justifie en particulier la Conjecture 3.50.



# Applications

Dans ce chapitre, nous allons étudier les applications des théorèmes introduits dans le Chapitre 3 notamment relatives aux classes de graphe sans mineurs  $K_7$  ou  $K_8$ . En particulier, nous montrerons :

- une borne sur la nombre total de triangles qu'un graphe sans mineur  $K_7$  (resp. sans mineur  $K_8$  ou  $K_{2,2,2,2,2}$ ) peut avoir.
- que les graphes sans mineurs  $K_7$  sont 5-stress free répondant ainsi à une conjecture de Nevo [53]. Nous montrerons aussi que les graphes sans mineurs  $K_8$  et  $K_{2,2,2,2,2}$  sont 6-stress free, répondant ainsi à un cas particulier d'une seconde conjecture de Nevo.
- que les graphes sans mineur  $K_7$  et  $K_8$  sont respectivement 8 et 9-coloriables.
- un cas particulier de la conjecture doublement-critique d'Hadwiger due à Kawarabayashi, Toft et Pedersen.

Ces résultats ont été obtenus avec D. Gonçalves [2, 1].

## 4.1 Densité globale de triangles

Dans cette partie, nous allons étudier la relation entre le nombre de triangles et le nombre d'arêtes d'un graphe. Notons par  $\rho = \frac{t}{m}$  le ratio entre le nombre de triangles  $t$  et le nombre d'arêtes  $m$  d'un graphe  $G$ . La question que nous nous poserons est la suivante : pour tout  $k$ , quel est le nombre minimum  $f(k)$  tel que pour tout graphe  $G$  avec  $\rho \geq f(k)$ ,  $G$  contient un mineur  $K_k$  ?

Un  $k$ -arbre est un graphe obtenu récursivement de la manière suivante :

- $K_k$  est un  $k$ -arbre,
- Si  $T$  est un  $k$ -arbre alors le graphe obtenu à partir de  $T$  en ajoutant un sommet dont le voisinage est une clique de taille  $k$  est un  $k$ -arbre.

Pour  $k \geq 2$ , on peut remarquer que les  $k$ -arbres avec  $n \geq k$  sommets ont exactement  $\frac{k(k-1)}{2} + k(n-k)$  arêtes et  $\frac{k(k-1)(k-2)}{6} + (n-k)\frac{k(k-1)}{2}$  triangles. Ainsi tout  $k$ -arbre vérifie :

$$t = \frac{k-1}{2}m - \frac{1}{2} \binom{k+1}{3}.$$

Comme les  $k$ -arbres ne contiennent pas de mineur  $K_{k+2}$  par construction, pour tout  $k \geq 4$ , il existe des graphes sans mineur  $K_k$  avec  $\frac{k-3}{2}m - \frac{1}{2}\binom{k-1}{3}$  triangles.

On en déduit que pour tout  $k \geq 4$ ,  $f(k) \geq \frac{k-3}{2}$ . En effet pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $m$  et un graphe sans mineur  $K_k$  avec  $m$  arêtes et tel que  $\frac{k-3}{2} - \epsilon \leq \rho \leq \frac{k-3}{2}$ . En fait, pour  $4 \leq k \leq 7$ , le théorème suivant montre que cette borne est la meilleure possible, i.e.  $f(k) = \frac{k-3}{2}$ .

#### **Théorème 4.1**

Pour  $4 \leq k \leq 7$  (resp.  $k = 8$ ), tout graphe avec  $m \geq 1$  arêtes et  $t \geq \frac{m(k-3)}{2}$  triangles a un mineur  $K_k$  (resp. un mineur  $K_8$  ou  $K_{2,2,2,2,2}$ ).

PREUVE . Considérons par contradiction un graphe  $G$  non-trivial sans mineur  $K_k$  (resp. sans mineur  $K_8$  et  $K_{2,2,2,2,2}$ ) avec  $t \geq m(k-3)/2$  triangles. Parmi les graphes possibles, on considère celui minimisant  $m$  (où  $m \geq 1$ ).

Pour toute arête  $uv \in E(G)$ , soit  $H_{uv} = G[N(u) \cap N(v)]$  et on note par  $n'$  et  $m'$  respectivement le nombre de sommets et d'arêtes du graphe  $H_{uv}$ . Contracter l'arête  $uv$  du graphe  $H_{uv}$  induit un mineur propre de  $G$  avec exactement  $1 + n'$  arêtes en moins, et au plus  $n' + m'$  triangles en moins. Par minimalité de  $G$ , pour toute arête  $uv$

$$n' + m' > \frac{k-3}{2}(1 + n')$$

ce qui implique que

$$m' > \frac{k-3}{2} + \frac{k-5}{2}n'.$$

D'un autre côté, on a que  $\frac{n'(n'-1)}{2} \geq m'$ , ce qui implique que  $n'$  doit vérifier la condition  $(n' + 1)(n' + 3 - k) > 0$ , c'est-à-dire  $n' \geq k - 2$ . En reformulant cette condition, on peut donc dire que toute arête de  $G$  appartient à au moins  $k - 2$  triangles. Par le Théorème 3.4 (resp. Théorème 3.7), ces graphes contiennent un mineur  $K_k$  (resp.  $K_8$  et  $K_{2,2,2,2,2}$ ), ce qui contredit les hypothèses.  $\square$

## **4.2 Rigidité et contraintes dans les graphes**

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un problème issu de la rigidité dans les graphes et plus particulièrement aux structures de tensegrité. Une structure de tensegrité est un système physique composé d'un ensemble fini de barres et de câbles joints par leurs extrémités.

Plus spécifiquement, soit  $p = (p_1, \dots, p_n)$  une configuration de points de  $\mathbb{R}^d$ . Notons que chaque  $p_i$  est alors un vecteur de dimension  $d$ .

A chaque barre ou câble d'extrémités  $p_i$  et  $p_j$ , on associe un scalaire  $\omega_{ij}$  qui peut être pensé comme la force de tension ou de compression par unité de longueur entre les points  $p_i$  et  $p_j$ , où  $\omega_{ij} < 0$  pour une force de tension et  $\omega_{ij} > 0$  pour une force de compression. Par convention, on définit  $\omega_{ii} = 0$  pour tout  $i$ . On peut alors associer une éner-

gie au système total  $p$  que l'on note  $E_\omega(p)$  définie par

$$E_\omega(p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} (p_i - p_j)^2.$$

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement aux configurations d'énergie minimales (i.e. qui induisent un système en équilibre). Pour cela, nous pouvons étudier les minimums de la fonction  $E_\omega(p)$ . Étant donné une direction  $p' = (p'_1, \dots, p'_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a que

$$E_\omega(p + tp') = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} \left( (p_i - p_j)^2 + 2t(p_i - p_j)(p'_i - p'_j) + t^2(p'_i - p'_j)^2 \right).$$

En considérant maintenant la dérivée directionnelle suivant la direction  $p'$  et en évaluant à  $t = 0$ , on obtient l'équation suivante qui caractérise les minimums de la fonction  $E_\omega(p)$  :

$$\frac{d}{dt} E_\omega(p + tp')|_{t=0} = \sum_{i,j} \omega_{ij} (p_i - p_j) (p'_i - p'_j) = 0.$$

Comme l'équation précédente doit être valide pour toute direction  $p'$ , on en déduit que l'équation précédente ne dépend pas de  $p'$ . L'équation précédente est donc vérifiée si et seulement si la condition d'équilibre suivante est vérifiée pour tout  $i$  :

$$\sum_j \omega_{ij} (p_i - p_j) = 0.$$

On définit alors un **stress** d'un système de tenségrité comme un vecteur  $\omega = (\dots, \omega_{ij}, \dots)$  satisfaisant la condition d'équilibre précédente. Il est évident que la fonction identiquement nulle  $\omega = 0$  satisfait toujours cette condition. On appelle alors ce stress le **stress trivial**.

Tout système de tenségrité peut être représenté par un graphe pondéré. En effet on peut considérer que chaque point du vecteur  $p$  est un sommet et chaque barre ou câble d'extrémités  $i$  et  $j$  est une arête  $ij$  de poids  $\omega_{ij}$ . On peut alors formuler l'existence d'un stress dans un graphe plongé. Plus spécifiquement, étant donné un plongement  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  d'un graphe  $G = (V, E)$ . Un **stress** de  $\rho$  est une fonction symétrique  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $u \in V$  :

$$\sum_{\{u,v\} \in E} \omega_{uv} (\rho(v) - \rho(u)) = 0.$$

Autrement dit on veut que la condition d'équilibre soit vérifiée pour tout sommet du graphe  $G$ . La question de l'existence d'un stress pour un graphe motive la définition suivante.

#### Définition 4.2

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un plongement  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  de  $G$  est sans  $d$ -**stress** si tout stress de  $G$  est trivial (i.e.  $\omega = 0$ ).

Le problème de la définition précédente est qu'elle est dépendante du plongement  $\rho$  du graphe. La définition suivante est indépendante du plongement du graphe.

**Définition 4.3**

Soit  $G$  un graphe.  $G$  est **génériquement sans  $d$ -stress** si l'ensemble de ses plongements sans stress est ouvert et dense dans l'ensemble des plongements de  $G$ .

Notons que l'espace des plongements d'un graphe dans l'espace euclidien de dimension  $d$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{dn}$ . En effet chaque sommet du graphe peut alors être représenté par un vecteur de dimension  $d$  et le graphe contient  $n$  sommets. Ainsi un point dans l'espace  $\mathbb{R}^{dn}$  représente un plongement de  $G$  dans  $\mathbb{R}^d$ . De plus, tout graphe génériquement sans  $d$ -stress a au plus  $dn - \binom{d+1}{2}$  arêtes [53].

Par la suite nous aurons aussi besoin de la notion de rigidité dans les graphes. On note par  $d(a, b)$  la distance euclidienne entre deux points  $a$  et  $b$ . Un plongement  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  est dit  **$d$ -rigide** si il existe  $\epsilon > 0$  tel que si  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie  $d(f(v), g(v)) < \epsilon$  pour tout  $v \in V(G)$  et si  $d(g(u), g(v)) = d(f(u), f(v))$  pour toute arête  $uv$  alors  $d(g(u), g(v)) = d(f(u), f(v))$  pour toute paire de sommets  $(u, v) \in V(G)^2$ . Autrement dit si toute perturbation de  $G$  qui préserve la distance entre les sommets adjacents est induite par une isométrie de  $\mathbb{R}^d$ . On dit qu'un graphe  $G$  est **génériquement  $d$ -rigide** si l'ensemble de ses plongements  $d$ -rigides est ouvert et dense dans l'ensemble de ses plongements. Notons ainsi que le graphe  $K_n$  est génériquement  $d$ -rigide pour tout  $n$ .

Nous utiliserons ce fait dans le théorème suivant dû à Asimov et Roth [8] dans le cas particulier où l'intersection de deux graphes est une clique.

**Théorème 4.4** (Asimov & Roth, 1979, [8])

Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes génériquement sans  $k$ -stress tels que  $G_1 \cap G_2$  est génériquement  $k$ -rigide, alors  $G_1 \cup G_2$  est génériquement sans  $k$ -stress.

La théorie de la rigidité trouve ses racines chez Cauchy et Maxwell. Ces derniers ce sont notamment intéressés à la rigidité des polyèdres de dimension 3 (i.e. à la rigidité de leurs 1-squelettes). Ils ont notamment prouvé les théorèmes suivants.

**Théorème 4.5** (Cauchy, 1813, [14])

Tout polyèdre convexe est sans 3-stress.

**Théorème 4.6** (Maxwell, 1864, [50])

Tout polyèdre admet un 2-stress non trivial.

Par le théorème de Steinitz, il existe une correspondance entre polyèdres et graphes planaires 3-connexes. En particulier, on peut reformuler le théorème de Maxwell en disant que tout graphe planaire 3-connexe admet un 2-stress non trivial.

Dans le cas de la dimension 3, Glück généralisa le théorème de Cauchy de la manière suivante.

**Théorème 4.7** (Glück, 1974, [31])

L'ensemble des polyèdres n'admettant pas de 3-stress non-trivial est ouvert et dense dans l'ensemble de tous les polyèdres.

En terme de graphes, ceci revient à dire que tout graphe planaire 3-connexe est génériquement sans 3-stress.

En 2007, Nevo [53] généralisa ce résultat aux graphes sans mineur  $K_5$ . Plus précisément il prouva le résultat suivant :

**Théorème 4.8** (Nevo, 2007, [53])

*Pour  $3 \leq r \leq 6$ , tout graphe sans mineur  $K_r$  est génériquement sans  $(r - 2)$ -stress.*

Nevo a conjecturé que ce théorème pouvait s'étendre au cas  $r = 7$ . Le théorème suivant prouve cette conjecture.

**Théorème 4.9** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Tout graphe sans mineur  $K_7$  est génériquement sans 5-stress.*

Pour le cas des graphes sans mineurs  $K_8$ , ce théorème ne peut pas se généraliser directement, en effet une obstruction apparaît dans ce cas. Le graphe  $K_{2,2,2,2,2}$  est sans mineur  $K_8$  mais à trop d'arêtes pour être génériquement sans 6-stress car tout graphe génériquement sans  $d$ -stress a au plus  $dn - \binom{d+1}{2}$  arêtes.

**Théorème 4.10** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Tout graphe sans mineur  $K_8$  ne contenant pas  $K_{2,2,2,2,2}$  comme sous-graphe est génériquement sans 6-stress.*

Les preuves des théorèmes 4.9 et 4.10 sont similaires et reposent toutes deux sur le théorème suivant de Whiteley [81].

**Théorème 4.11**

*Soit  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant une arête  $uv$ . Si  $u$  et  $v$  ont au plus  $d - 1$  voisins communs et si  $G'$  est génériquement sans  $d$ -stress alors  $G$  est génériquement sans  $d$ -stress.*

Prouvons maintenant les théorèmes 4.9 et 4.10.

PREUVE . Supposons que  $G$  soit sans mineur  $K_7$  (resp. sans mineur  $K_8$  ni  $K_{2,2,2,2,2}$ ). Sans perte de généralité, on peut supposer que  $G$  est connexe. Maintenant, contractons les arêtes appartenant à au plus 4 (resp. 5) triangles tant qu'il en existe et notons par  $G'$  le graphe ainsi obtenu. Par construction, toute arête de  $G'$  appartient à 5 (resp. 6) triangles. De plus  $G'$  est un mineur de  $G$  et est donc sans mineur  $K_7$  (resp. sans mineur  $K_8$  et sous-graphe  $K_{2,2,2,2,2}$ ). Par le Théorème 3.4 (resp. 3.7),  $G'$  est le graphe trivial à un sommet. Ce graphe est trivialement génériquement sans 5-stress (resp. 6-stress), et donc par le Théorème 4.11,  $G$  est aussi génériquement sans 5-stress (resp. sans 6-stress).  $\square$

Nevo proposa la conjecture suivante qui englobe les Théorèmes 4.9 et 4.10.

**Conjecture 4.12** (Nevo, 2007, [53])

*Soit  $G$  un graphe et  $k$  un entier positif. Si  $\mu(G) \leq k$  alors  $G$  est génériquement sans  $k$ -stress, où  $\mu$  correspond au paramètre de Colin de Verdière introduit au Chapitre 2.*

Les cas  $k = 5, 6$  de cette conjecture peuvent être déduit des Théorèmes 4.9 et 4.10.

**Corollaire 4.13**

*Soit  $G$  un graphe tel que  $\mu(G) \leq 5$  (resp.  $\mu(G) \leq 6$ ) alors  $G$  est génériquement sans 5-stress (resp. sans 6-stress).*

PREUVE . Notons que  $\mu(K_r) = r - 1$  et que si le complément d'un graphe  $G$  à  $n$  sommets est une forêt, alors  $\mu(G) \geq n - 3$  (cf. Théorème 2.56). Ainsi on a que  $\mu(K_7) = 6$ ,  $\mu(K_8) = 7$  et  $\mu(K_{2,2,2,2,2}) \geq 7$ .

Comme le paramètre  $\mu$  est mineur-monotone, le graphe  $K_7$  (resp.  $K_8$  et  $K_{2,2,2,2,2}$ ) est un mineur exclu pour la classe de graphe définie par  $\mu(G) \leq 5$  (resp.  $\mu(G) \leq 6$ ). Ainsi par le Théorème 4.9 (resp. 4.10), ces graphes sont génériquement sans 5-stress (resp. sans 6-stress). □

### 4.3 Coloration des graphes

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la conjecture d'Hadwiger. Une  $t$ -coloration d'un graphe est une fonction  $\phi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, t\}$  telle que  $\phi(u) \neq \phi(v)$  si  $uv \in E(G)$ . On dit qu'un graphe est  $t$ -coloriable s'il existe une  $t$ -coloration de ce graphe. Étant donné un graphe  $G$ , on note alors  $\chi(G) = \min\{t : G \text{ est } t\text{-coloriable}\}$  et on dit que  $G$  est  $t$ -chromatique si  $\chi(G) = t$ . On dit qu'un graphe  $G$  est **critiquement  $t$ -chromatique** si  $G$  est  $t$ -chromatique et si  $\chi(H) < t$  pour tout mineur strict  $H$  de  $G$ . La conjecture d'Hadwiger [6] affirme que tout graphe critiquement  $t$ -chromatique contient un mineur  $K_t$ . La conjecture a été prouvée pour  $t \leq 6$ . Le cas  $t = 4$  a été prouvé par Dirac [24] et est une conséquence immédiate du Théorème 2.13. Le cas  $t = 5$  est équivalent au théorème des quatre couleurs par le Théorème 2.14 et à donc été prouvé par Appel et Haken [5, 7]. Enfin le cas  $t = 6$  a été prouvé par Robertson, Seymour et Thomas [60]. Pour cela, ils ont prouvé que tout contre-exemple minimal au cas  $t = 6$  de la conjecture d'Hadwiger était un graphe apex. La conjecture d'Hadwiger reste ouverte pour  $t \geq 7$ . Plusieurs résultats partiels ont été obtenus. Kawarabayashi et Toft ont prouvé que tout graphe sans mineur  $K_7$  ou  $K_{4,4}$  est 6-coloriable. De même, Jakobsen [33] a prouvé que tout graphe sans mineur  $K_7^-$  est 6-coloriable, où  $K_7^-$  est un graphe obtenu à partir de  $K_7$  en supprimant deux arêtes. Notons qu'il existe deux graphes possibles suivant si l'on supprime deux arêtes incidentes ou non.

En utilisant les Théorèmes 3.4 et 3.5, on peut prouver le théorème suivant.

**Théorème 4.14** (Albar & Gonçalves, 2012, [2])

*Tout graphe sans mineur  $K_7$  (resp.  $K_8$ ) est 8-coloriable (resp. 10-coloriable).*

Dans cette partie, nous prouverons aussi, par des techniques différentes, le théorème suivant.

**Théorème 4.15** (Albar, 2014, [1])

*Tout graphe sans mineur  $K_7^-$  est 7-coloriable.*

### 4.3.1 Preuve du Théorème 4.14

Avant de prouver ce théorème, nous avons besoin de plusieurs propriétés et définitions. Dans la suite nous noterons par  $\alpha(S)$  la taille du plus grand stable de  $G[S]$ .

**Lemme 4.16** (Folklore)

*Étant donné un graphe  $G$  critiquelement  $t$ -chromatique, pour tout sommet  $v \in V(G)$  on a que  $\deg(v) + 2 - \alpha(N(v)) \geq t$ .*

PREUVE . Étant donné un sommet  $v$  et un stable  $S$  de  $N(v)$ , considérons le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en contractant les arêtes entre  $v$  et  $S$ . Comme  $G'$  est un mineur strict de  $G$ ,  $G'$  est  $(k-1)$ -coloriable. Étant donné une telle coloration de  $G'$ , on peut alors colorier  $G \setminus \{v\}$  avec  $k-1$  couleurs de telle manière que tous les sommets de  $S$  aient la même couleur. Dans cette coloration, au plus  $\deg(v) + 1 - |S|$  couleurs sont ainsi utilisées dans  $N(v)$ . On en déduit donc que  $\deg(v) + 2 - |S|$  couleurs suffisent à colorier  $G$ , et donc  $\deg(v) + 2 - \alpha(N(v)) \geq k$ .  $\square$

Un graphe **split** est un graphe dont les sommets peuvent être partitionnés en une clique et un stable. Ces graphes correspondent aux graphes ne contenant pas  $C_4$ ,  $C_5$  ou le graphe  $2K_2$  (l'union disjointe de deux graphes  $K_2$ ) comme sous-graphe induit [28].

**Lemme 4.17**

*Étant donné un graphe  $G$  critiquelement  $t$ -chromatique, tout séparateur  $(A, B)$  de  $G$  est tel que  $G[A \cap B]$  n'est pas un graphe split (i.e.  $G[A \cap B]$  contient  $C_4$ ,  $C_5$  ou  $2K_2$  comme sous-graphe induit).*

PREUVE . Supposons par contradiction qu'il existe un tel séparateur  $(A', B')$ . Cela implique l'existence d'un séparateur  $(A, B)$  tel que  $S = A \cap B \subseteq A' \cap B'$ , et tel que les graphes  $G[A \setminus S]$  et  $G[B \setminus S]$  aient une composante connexe notée  $C_A$  et  $C_B$  telle que  $N(C_A) = N(C_B) = S$ . Notons que  $G[S]$  est un graphe split et soit  $I$  l'un de ses stables maximaux. Soit  $K = S \setminus I$  une clique. Soit  $G_A$  et  $G_B$  les graphes obtenus à partir de  $G[A]$  et  $G[B]$  respectivement, en identifiant les sommets de  $I$  en un unique sommet  $i$ . Par maximalité de  $I$ ,  $K \cup \{i\}$  induit une clique dans chacun de ces graphes. De plus ces graphes sont des mineurs stricts de  $G$  car l'identification des sommets dans  $I$  peut être effectuée par contraction des arêtes incidentes à  $C_B$  et  $C_A$  respectivement. Ainsi, ces graphes sont  $(k-1)$ -coloriables et ces colorations impliquent l'existence de  $(k-1)$ -colorations compatibles de  $G[A]$  et  $G[B]$ , car dans les deux colorations, les sommets de  $I$  utilisent la même couleur, et chaque sommet de  $K$  utilise une couleur distincte. Cela induit une  $(k-1)$ -coloration de  $G$ , une contradiction.  $\square$

On peut maintenant prouver le Théorème 4.14.

PREUVE . Considérons par contradiction qu'il existe un graphe  $G$  sans mineur  $K_7$  qui ne soit pas 8-coloriable (resp. un graphe sans mineur  $K_8$  qui ne soit pas 10-coloriable). On choisit ce graphe tel que  $|E(G)|$  soit minimal. De fait ce graphe est donc critiquelement 9-chromatique (resp. critiquelement 11-chromatique).

Pour tout sommet  $v$ , comme  $\alpha(N(v))$  est au moins 1, le Lemme 4.16 implique que

$\deg(v) > 7$  (resp.  $\deg(v) > 9$ ). Si  $\deg(v) = 8$  (resp.  $\deg(v) = 10$ ), et comme  $G$  est sans mineur  $K_7$  (resp. sans mineur  $K_8$ ), on a que  $\alpha(N(v)) \geq 2$ , ce qui contredit le Lemme 4.16. Finalement si  $\deg(v) = 9$  (resp.  $\deg(v) = 11$ ), le Lemme 4.16 implique que  $3 > \alpha(N(v))$ , et comme  $N(v)$  n'est pas une clique, on a que  $\alpha(N(v)) = 2$ . Par le Théorème 2.40, on a que  $\delta(G) = 9$  (resp.  $\delta(G) = 11$ ) et, de plus, tout sommet  $v$  de degré 9 est tel que  $\alpha(N(v)) = 2$ . Par le Théorème 3.4 (resp. Théorème 3.5), on peut considérer un sommet  $u$  de degré 9 (resp. de degré 11) tel qu'il existe une arête  $uv$  appartenant à au plus 4 (resp. 5) triangles. On note  $H = G[N(u)]$  et on rappelle que  $\alpha(H) = 2$ .

**Lemme 4.18**

*Le graphe  $H = G[N(u)]$  ne contient pas de sous-graphe  $K_5$  (resp.  $K_6$ ).*

PREUVE . Supposons par contradiction que  $H$  contient un sous-graphe  $K_t$  ayant pour sommets  $x_1, \dots, x_t$  avec  $t = 5$  (resp.  $t = 6$ ). Supposons premièrement que le graphe induit par  $Y = N(u) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}$  soit connexe. Comme  $\delta(G) \geq 9$ , tout sommet  $x_i$  a un voisin dans  $Y$  ou un voisin  $w_i$  dans  $G \setminus N[u]$ . Dans ce dernier cas, notons par  $C_i$  la composante connexe de  $G \setminus N[u]$  contenant  $w_i$ . Par le Lemme 4.17 appliqué à la séparation  $(N[C_i], V(G) \setminus C_i)$ ,  $N(C_i)$  intersecte  $Y$  et donc on peut contracter  $Y \cup (V(G) \setminus N[u])$  en un seul sommet et ainsi former un sous-graphe  $K_{t+2}$  avec les sommets  $u, x_1, \dots, x_t$ , ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant que le graphe induit par  $Y$  n'est pas connexe et notons par  $y_1, y_2 \in Y$  deux sommets non-adjacents. Comme  $G$  est critiquement  $(2t - 1)$ -chromatique, on peut considérer une  $(2t - 2)$ -coloration du graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en contractant les arêtes  $uy_1$  et  $uy_2$ . Cela implique l'existence d'une  $(2t - 2)$ -coloration  $c$  de  $G \setminus u$  telle que  $c(y_1) = c(y_2)$ . Comme cette coloration ne s'étend pas à  $G$ , les  $2t - 1$  sommets de  $N(u)$  utilisent toutes les  $2t - 2$  couleurs. Cela implique que les couleurs utilisées pour les sommets  $x_i$  ne sont utilisées qu'une seule fois dans  $N(u)$  et donc qu'il existe un sommet  $z \in Y$  dont la couleur n'est utilisée qu'une fois dans  $N(u)$ . Supposons que  $c(x_i) = i$  et que  $c(z) = 7$ . Étant donné deux couleurs  $a, b$  et un sommet  $v$  colorié avec  $a$ , la  $(a, b)$ -composante de  $v$  est la composante connexe contenant  $v$  du graphe induit par les sommets coloriés avec les couleurs  $a$  ou  $b$ . Pour tout  $1 \leq i \leq t$ , supposons que nous échangeons les couleurs dans la  $(i, 7)$ -composante de  $z$ . Comme cela ne peut induire une coloration n'utilisant pas toutes les couleurs dans  $N(u)$ , il existe donc un chemin  $(7, i)$ -bicolorié entre  $z$  et  $x_i$ . Cela est impossible car contracter ces chemins sur  $z$  induirait un sous-graphe  $K_{t+2}$  (dont les sommets seraient alors  $u, z, x_1, \dots, x_t$ ), ce qui est une contradiction.  $\square$

Soit  $v$  un sommet de  $H$  de degré minimum. Par le choix de  $u$  et par le Théorème 3.4 (resp. Théorème 3.5),  $\deg_H(v) \leq 4$  (resp.  $\deg_H(v) \leq 5$ ).

**Lemme 4.19**

$\delta(H) = \deg_H(v) = 4$  (resp.  $\delta(H) = \deg_H(v) = 5$ ).

PREUVE . Comme  $\alpha(H) = 2$ , les non-voisins de  $v$  dans  $H$  forment une clique. De plus comme  $H$  ne contient pas  $K_5$  (resp.  $K_6$ ) comme sous-graphe, on a que  $9 - 1 - \deg_H(v) < 5$  (resp.  $11 - 1 - \deg_H(v) < 6$ ), et donc que  $\deg_H(v) = 4$  (resp.  $\deg_H(v) = 5$ ).  $\square$

Soit  $y_1, \dots, y_t$  avec  $t = 4$  (resp.  $t = 5$ ) le voisinage de  $v$  dans  $H$ , et soit  $K$  la clique de taille  $t$  formée par ses non-voisins. Par le Lemme 4.18, on peut supposer que  $y_1$  et  $y_2$  ne sont pas adjacents. Notons que comme  $\alpha(H) = 2$ , tout sommet de  $K$  est adjacent à  $y_1$  ou  $y_2$ . Comme  $G$  est critiquelement  $(2t + 1)$ -chromatique, on considère une  $2t$ -coloration du graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en contractant les arêtes  $uy_1$  et  $uy_2$ . Cette coloration implique l'existence d'une  $2t$ -coloration  $c$  de  $G \setminus u$  telle que  $c(y_1) = c(y_2)$ . Comme cette coloration ne peut s'étendre à  $G$ , les  $2t + 1$  sommets de  $N(u)$  utilisent l'ensemble des  $2t$  couleurs. En particulier, les couleurs utilisées par  $K$  (disons  $1, \dots, t$ ) et  $y_3$  (disons 6) sont utilisées une seule fois dans  $N(u)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq t$ , supposons que nous échangeons les couleurs de la  $(i, 6)$ -composante de  $y_3$ . Comme cela ne peut induire une coloration n'utilisant pas toutes les couleurs dans  $N(u)$ , il existe donc un chemin  $(i, 6)$ -bicolorié entre  $y_3$  et le sommet de  $K$  colorié avec la couleur  $i$ . C'est impossible car contracter ces chemins sur le sommet  $y_3$  et contracter les arêtes  $uy_1$  et  $uy_2$  sur  $v$  induirait un graphe  $K_{t+2}$  dont les sommets seraient l'ensemble  $\{u, v, y_3\} \cup K$ . Cela conclut la preuve du théorème.  $\square$

### 4.3.2 Preuve du Théorème 4.15

Soit  $G$  un contre-exemple minimal au Théorème 4.15.  $G$  est donc un graphe critiquelement 8-chromatique sans mineur  $K_7^-$ .

Premièrement nous allons prouver que la plupart des sommets de degré 8 de  $G$  sont contenus dans des sous-graphes  $K_5$ . Ensuite nous utiliserons des techniques introduites dans [41] pour conclure.

Nous avons besoin du théorème suivant dû à Mader [48].

**Théorème 4.20** (Mader, 1968, [48])

*Tout graphe critiquelement  $k$ -chromatique avec au moins 7 sommets et qui ne soit pas isomorphe à  $K_7$  est 7-connexe pour  $k \geq 7$ .*

On en déduit que  $G$  est 7-connexe et en particulier que  $G$  n'est donc pas une  $(K_{2,2,2,2}, K_6, 4)$ -cockade. Par le Théorème 2.44, on en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 4.21**

*$G$  a moins de  $\frac{9}{2}|V(G)| - 12$  arêtes.*

De plus par le Lemme 4.16,  $G$  a degré minimum 8 car si  $G$  contenait un sommet  $u$  de degré 7 alors  $N(u)$  ne contiendrait pas de stable de taille 2 et donc  $G$  contiendrait un mineur  $K_7$ , ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Dans la suite, nous utiliserons les sommets de degré 8 et leurs voisinages pour construire un mineur  $K_7^-$ . Le lemme suivant assure l'existence de tels sommets de degré 8.

**Lemme 4.22**

*$G$  a au moins 25 sommets de degré 8.*

PREUVE . Par le Corollaire 4.21,  $G$  a moins de  $\frac{9}{2}n - 12$  arêtes. Supposons que  $G$  ait au plus

24 sommets de degré 8. Par le Lemme 4.16, on a vu que  $G$  ne contenait pas de sommets de degré strictement moins que 8. Ainsi, on a la relation suivante.

$$|E(G)| \geq \frac{9(n - 24) + 8 * 24}{2} = \frac{9}{2}n - 12,$$

ce qui est une contradiction. □

Le lemme suivant est le premier pas pour montrer le théorème.

**Lemme 4.23**

Soit  $u$  un sommet de degré 8, alors soit  $N(u)$  contient le graphe  $K_4$  comme sous-graphe, soit  $N(u)$  contient le graphe  $C_8^{1,2}$  (i.e. le graphe circulant à 8 sommets avec sauts 1, 2 - cf. Figure 4.1) comme sous-graphe.

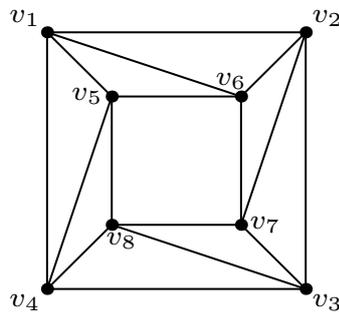


FIGURE 4.1 – Le graphe  $C_8^{1,2}$

Avant de prouver le Lemme 4.23, nous avons besoin d'introduire certaines propriétés. Le lemme suivant peut être déduit directement du théorème des quatre couleurs [5, 7].

**Lemme 4.24**

Soit  $x, y$  et  $z$  trois sommets de  $G$ , alors  $G - \{x, y, z\}$  est 4-connexe et non-planaire.

PREUVE . La première partie du lemme est évidente par la 7-connexité de  $G$  (Lemme 4.20). Supposons maintenant qu'il existe  $x, y, z \in V(G)$  tels que  $G - \{x, y, z\}$  soit planaire. Par le théorème des quatre couleurs  $G - \{x, y, z\}$  est 4-coloriable. Mais alors cette coloration induit une 7-coloration de  $G$ , ce qui contredit les hypothèses. □

Nous aurons aussi besoin de la définition suivante, introduite par Robertson, Seymour et Thomas [60], ainsi que du théorème correspondant.

**Définition 4.25**

Soit  $H$  un graphe et  $T = \{v_1, v_2, v_3\}$  un triangle.  $H$  est dit **triangulaire** par rapport à  $T$  si l'un des points suivants est vérifié.

- Il existe  $i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) tel que  $H \setminus v_i$  a degré maximum au plus 2, et  $H \setminus v_i$  est soit un cycle soit un arbre.
- Tous les sommets de  $H$  ont degré au plus 3, il existe au plus un sommet  $v \neq v_1, v_2, v_3$  de degré 3 et  $H \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$  est un arbre.
- Tous les sommets de  $H$  ont degré au plus 3, il existe un triangle  $C$  avec  $v_1, v_2, v_3 \notin V(C)$ , tout sommet de degré 3 de  $H$  est dans  $\{v_1, v_2, v_3\} \cup V(C)$ , et tout cycles de  $H$  à l'exception de ces deux triangles intersecte à la fois  $\{v_1, v_2, v_3\}$  et  $V(C)$ .

**Théorème 4.26** (Robertson, Seymour & Thomas, 1993, [60])

Soit  $v_1, v_2, v_3$  un triangle  $T$  d'un graphe non-planaire 4-connexe  $H$ . Soit  $Z$  un sous-graphe induit de  $H$  tel que  $v_1, v_2, v_3 \in Z$  et tel que  $Z$  ne soit pas triangulaire par rapport à  $T$ . Alors il existe  $Z_1, Z_2$  des sous ensembles de  $V(H) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$  disjoints tels que  $Z_1 \cap Z, Z_2 \cap Z \neq \emptyset$  et tels que  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2)$  soit une mineur  $K_5$  de  $H$ .

On peut maintenant prouver le Lemme 4.23.

PREUVE . Soit  $u$  un sommet de degré 8 de  $G$  tel que  $N(u)$  ne contienne pas  $K_4$  comme sous-graphe.

**Propriété 4.27**

$N(u)$  est 4-connexe.

PREUVE . Soit  $(A, B)$  une séparation minimale de  $N(u)$ . Comme  $N(u)$  ne contient pas de stables de taille 3 par le Lemme 4.16, pour toute paire de sommets  $v, v' \in A \setminus B$  et tout sommet  $w \in B \setminus A$ , l'ensemble  $\{v, v', w\}$  contient au moins une arête. Cette arête ne peut pas être  $vw$  ou  $v'w$  car  $(A, B)$  est une séparation de  $N(u)$  par hypothèse. On en déduit donc que les sommets  $v$  et  $v'$  doivent être adjacents. On en déduit que les graphes induits par les ensembles de sommets  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$  sont des graphes complets.

Supposons maintenant que  $(A, B)$  soit une séparation d'ordre 0 ou 1, alors soit  $|A \setminus B| \geq 4$ , soit  $|B \setminus A| \geq 4$ . Par la remarque précédente,  $N(u)$  contient un sous-graphe  $K_4$ , ce qui est une contradiction.

Supposons que  $(A, B)$  soit une séparation d'ordre 2, alors, dans ce cas,  $|A \setminus B| = |B \setminus A| = 3$ . Soit  $v \in A \cap B$ . Comme le graphe induit par  $N(u)$  est sans sous-graphe  $K_4$  et comme les graphes induits par  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$  sont des triangles, il existe un sommet  $w \in A \setminus B$  tel que  $vw$  ne soit pas une arête de  $N(u)$ . De la même manière, il existe un sommet  $w' \in B \setminus A$  tel que  $vw'$  ne soit pas une arête de  $N(u)$ . Comme  $(A, B)$  est une séparation de  $N(u)$ , alors  $\{v, w, w'\}$  est une stable de taille 3, ce qui est une contradiction.

Supposons finalement que  $(A, B)$  soit une séparation d'ordre 3. Par la remarque précédente,  $|B \setminus A| \leq 3$  et  $|A \setminus B| \leq 3$ . Comme  $|N(u)| = 8$  et  $|A \cap B| = 3$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $|A \setminus B| = 3$  et que  $|B \setminus A| = 2$ . On note  $A \cap B = \{s_1, s_2, s_3\}$  et  $B \setminus A = \{b_1, b_2\}$ . Supposons qu'il existe un sommet  $s_i, 1 \leq i \leq 3$  et un sommet  $b_j, 1 \leq j \leq 2$ , tels que  $s_i b_j$  ne soit pas une arête, alors comme  $N(u)$  n'a pas de stable de taille 3,  $s_i$  est adjacent à tous les sommets du triangle  $A \setminus B$  mais dans ce cas  $N(u)$  contient un sous-graphe  $K_4$ , une contradiction. Ainsi, on peut supposer que  $b_1$  et  $b_2$  sont adjacents à tous les sommets de  $A \cap B$ .

Maintenant comme  $N(u)$  ne contient pas de sous-graphe  $K_4$ ,  $A \cap B$  est un stable car si les sommets  $s_i$  et  $s_j$  étaient adjacents pour  $1 \leq i < j \leq 3$ , alors  $\{b_1, b_2, s_i, s_j\}$  serait un sous-graphe  $K_4$ , ce qui serait une contradiction. Mais dans ce cas  $A \cap B$  est un stable de taille 3, ce qui contredit les hypothèses.  $\square$

La propriété ci-dessus va nous servir à montrer que  $N(u)$  est planaire.

**Propriété 4.28**

$N(u)$  est planaire.

PREUVE . Supposons que  $N(u)$  ne soit pas planaire. Comme  $N(u)$  est 4-connexe par la propriété précédente, alors  $N(u)$  contient un mineur  $K_5$  par le théorème de Wagner (Théorème 2.14). Comme  $G$  n'est pas isomorphe à  $N[u]$  (car  $G$  contient au moins 25 sommets), alors il existe  $w \in G \setminus N[u]$ . Comme  $G$  est 7-connexe, par le théorème de Menger, il existe 7 chemins intérieurement sommet-disjoint entre  $u$  et  $w$ . Notons les  $P_1, P_2, \dots, P_7$ . On peut supposer que ces chemins sont de longueur minimale et dans ce cas, ces chemins intersectent  $N(u)$  au plus en un seul sommet. S'il existe 8 chemins intérieurement sommet-disjoint entre  $u$  et  $w$ , alors il existe un chemin entre  $w$  et chacun des sommets de  $N(u)$ . Comme  $N(u)$  contient un mineur  $K_5$ , alors  $N(u)$  avec les sommets  $u$  et  $w$  ainsi que les 8 chemins entre  $N(u)$  et  $w$  induit un graphe contenant un mineur  $K_7^-$ , ce qui est une contradiction.

Soit donc  $v$  l'unique sommet de  $N(u)$  qui ne soit pas contenu dans l'un des 7 chemins entre  $N(u)$  et  $w$ . Par le théorème de Ramsey, comme  $N(u) \setminus \{v\}$  a 7 sommets et ne contient pas de stables de taille 3, alors il contient un triangle. Notons par  $v_1, v_2$  et  $v_3$  les sommets de ce triangle. Comme  $N(u)$  est 4-connexe,  $N(u)$  n'est pas triangulaire par rapport au triangle  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , et comme il n'est pas non plus planaire, alors par le Théorème 4.26, il existe  $Z_1$  et  $Z_2$  tels que  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2)$  soit un mineur  $K_5$ . Comme  $N(u)$  ne contient pas de sous-graphe  $K_4$ , alors  $|Z_1|, |Z_2| \geq 2$ , donc les deux ensembles  $Z_1$  et  $Z_2$  intersectent au moins un des 7 chemins  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ . Ainsi  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2, u, \bigcup_{1 \leq i \leq 7} (V(P_i) \setminus N[u]))$  est un mineur  $K_7^-$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Propriété 4.29**

$G[N(u)]$  ne contient pas de sommets de degré 6 ou plus.

PREUVE . Supposons que  $G[N(u)]$  contienne un sommet  $v$  de degré plus grand ou égal à 6, alors le graphe induit par  $N(v)$  dans  $G[N(u)]$  ne contient pas de stable de taille 3, mais par le théorème de Ramsey, il contient un triangle. Ainsi  $N(u)$  contient un sous-graphe  $K_4$ , ce qui contredit les hypothèses.  $\square$

**Propriété 4.30**

Le voisinage dans  $G[N(u)]$  de tout sommet de  $N(u)$  est un chemin de taille 4, un 4-cycle ou un 5-cycle.

PREUVE . Comme  $N(u)$  est 4-connexe, ses sommets ont degré au moins 4 et au plus 5 par la Propriété 4.29. Soit  $v$  un sommet de degré 4 dans  $N(u)$ . Notons par  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  ses voisins. Supposons que le voisinage ne soit ni un chemin ni un 4-cycle. Comme le voisinage de  $v$  est sans triangles et ne contient pas de stable de taille 3, il doit être composé de deux arêtes disjointes, disons  $v_1 v_2$  et  $v_3 v_4$ . Notons par  $x, y$  et  $z$  les trois sommets dans  $N(u) \setminus \{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .  $\{x, y, z\}$  est un triangle car autrement il existerait un stable de taille 3 avec  $v$ .

Tout sommet dans  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  est adjacent à exactement deux sommets dans  $\{x, y, z\}$ .

En effet, si l'un de ces sommets était adjacent à un seul sommet de  $\{x, y, z\}$  alors ce sommet aurait degré 3 dans  $N(u)$ , ce qui contredirait le fait que  $N(u)$  est 4-connexe. De la même manière, si l'un de ces sommets était adjacent à tous les sommets de  $\{x, y, z\}$  alors  $N(u)$  contiendrait un sous-graphe  $K_4$ , ce qui contredirait les hypothèses. Alors comme il y a 8 arêtes entre  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  et  $\{x, y, z\}$  et comme les sommets de  $N(u)$  ont degré au plus 5 (Propriété 4.29), il existe un sommet de degré 5 dans l'ensemble  $\{x, y, z\}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que ce sommet est  $x$ . Par symétrie, on peut supposer que  $x$  est adjacent à  $v_1, v_2$  et  $v_3$ . Maintenant comme tout sommet de  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  est adjacent à deux sommets dans  $\{x, y, z\}$ ,  $v_1, v_2$  et  $v_3$  sont adjacents soit à  $y$  soit à  $z$ . Mais dans ce cas  $(v_1, v_2, v_3, v, x, \{y, z\})$  est un mineur  $K_{3,3}$ , ce qui contredit la Propriété 4.28.

Si  $v$  est un sommet de degré 5, alors comme  $N(v)$  ne contient pas de stable de taille 3 ni de triangles, alors  $N(v)$  ne peut être isomorphe qu'à un 5-cycle.  $\square$

Comme  $N(u)$  est planaire, il a au plus 18 arêtes par le Théorème 2.40, donc il contient au moins quatre sommets de degré 4. Soit  $v$  un tel sommet. Notons par  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  ses voisins et par  $x, y$  et  $z$  ses non-voisins.  $\{x, y, z\}$  est un triangle car autrement  $N(u)$  contiendrait un stable de taille 3 avec  $v$ . Alors  $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  peut induire un 4-chemin ou un 4-cycle.

Supposons que  $C$  soit un 4-chemin. Le voisinage de  $v_1$  ne peut pas induire un 4-cycle ou un 5-cycle car cela contredirait le fait que  $C$  induise un 4-chemin. Donc  $v_1$  a degré 4 et son voisinage est un 4-chemin. Par symétrie, on peut supposer que le voisinage de  $v_1$  est le 4-chemin  $v v_2 x y$ . De plus  $\{z, v_3, v_4\}$  est un triangle car autrement  $N(u)$  contiendrait un stable de taille 3 avec  $v_1$ . Mais  $y$  est adjacent à au moins 1 autre sommet de  $C$  car il serait de degré 3 autrement, ce qui contredirait le 4-connexité de  $N(u)$ . La planarité de  $N(u)$  force  $y$  à être adjacent à  $v_4$ , mais dans ce cas  $N(u)$  contient  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe.

Supposons maintenant que  $C$  est le 4-cycle  $v_1 v_2 v_3 v_4$ . Supposons que  $v_1$  a degré 4 et supposons que le voisinage de  $v_1$  est un 4-chemin, disons  $v_4 v v_2 x$ . Dans ce cas  $\{v_3, y, z\}$  est aussi un triangle car autrement il existerait un stable de taille 3 avec  $v_1$ . Comme  $y$  et  $z$  ont degré au moins 4 dans  $N(u)$  et comme  $y, z \notin N(v) \cup N(v_1)$  alors  $y$  et  $z$  sont tout les deux adjacents à au moins un sommet de l'ensemble  $\{v_2, v_4\}$ . De plus  $y$  et  $z$  ne peuvent être tous les deux adjacents à un même sommet de cet ensemble car autrement cela formerait un sous-graphe  $K_4$  avec  $v_3$ . Donc soit  $y$  est adjacent à  $v_2$  et  $z$  est adjacent à  $v_4$ , soit  $y$  est adjacent à  $v_4$  et  $z$  est alors adjacent à  $v_2$ . Dans les deux cas, après avoir supprimé l'arête  $v_2 v_3$ , le graphe obtenu est isomorphe à  $C_8^{1,2}$ . Notons que les mêmes arguments s'appliquent lorsque le voisinage de  $v_1$  est un 4-cycle en supprimant l'arête  $v_4 x$  à la fin.

Supposons maintenant que  $v_1$  a degré 5 et donc son voisinage est le 5-cycle  $v_4 v v_2 x y$ . Alors  $z$  est adjacent à  $v_3$  car autrement  $\{v_1 v_3, z\}$  serait un stable de taille 3. Comme  $z$  a degré au moins 4 dans  $N(u)$ , que  $N(u)$  est planaire et sans sous-graphe  $K_4$ , il est aussi adjacent à au moins un sommet de l'ensemble  $\{v_2, v_4\}$ . Mais si  $z$  est adjacent à  $v_2$  alors après avoir supprimé l'arête  $v_1 v_2$ , le graphe obtenu est isomorphe à  $C_8^{1,2}$ , et si  $z$  est adjacent à  $v_4$  alors après avoir supprimé l'arête  $v_1 v_4$ , le graphe obtenu est à nouveau isomorphe à  $C_8^{1,2}$ .  $\square$

**Lemme 4.31**

Soit  $u$  et  $u'$  deux sommets de  $G$  de degré 8 tels que  $N(u)$  et  $N(u')$  contiennent le graphe  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe, alors  $u$  et  $u'$  ne sont pas adjacents.

PREUVE . Supposons que  $u$  et  $u'$  soient adjacents. Comme tous les sommets de  $N(u)$  ont degré au moins 4 et que  $u' \in N(u)$  par hypothèse, on note par  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$  les quatre voisins de  $u'$  dans le sous-graphe  $C_8^{1,2}$  de  $N(u)$ . Ces quatre sommets induisent un chemin dans ce sous-graphe, disons  $v_1 v_2 v_3 v_4$ . Notons par  $w_1, w_2$  et  $w_3$  les sommets de  $N(u) \setminus \{u', v_1, v_2, v_3, v_4\}$  de telle manière à ce que  $w_1$  soit l'unique sommet adjacent à la fois à  $v_1$  et  $v_2$  et que  $w_2$  soit l'unique sommet adjacent à  $v_3$  et  $v_4$  (cf. Figure 4.2).

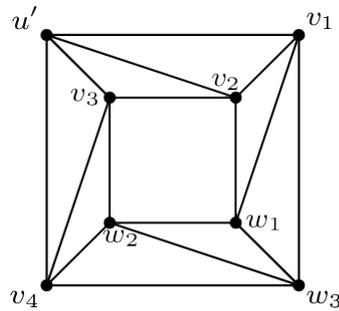


FIGURE 4.2 – Voisinage de  $u$

Considérons maintenant le graphe  $H = G \setminus \{u, w_1, w_2\}$ .  $H$  est 4-connexe et n'est pas planaire par le Lemme 4.24. Soit  $Z = \{w_3, u', v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , alors  $Z$  n'est pas triangulaire par rapport à  $\{u', v_1, v_2\}$  car  $u'$  a degré 4 dans  $Z$ . Ainsi par le Théorème 4.26, il existe  $Z_1$  et  $Z_2$  tels que  $(u', v_1, v_2, Z_1, Z_2, \{w_1, w_2\})$  soit un mineur  $K_7^-$  de  $G$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Le lemme suivant est la clé pour prouver que la plupart des sommets de degré 8 sont contenus dans un sous-graphe  $K_5$ .

**Lemme 4.32**

Soit  $u$  et  $u'$  deux sommets de degré 8 tels que  $N(u)$  et  $N(u')$  contiennent le graphe  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe et tels que  $|N(u) \cup N(u')| \geq 9$ , alors  $G$  contient un mineur  $K_7^-$ .

PREUVE . Par le Lemme 4.31, on peut supposer que  $u$  et  $u'$  ne sont pas adjacents. Notons par  $v_1, \dots, v_8$  les sommets de  $N(u)$  comme indiqués sur la Figure 4.1. Comme  $G$  est 7-connexe, il existe 7 chemins intérieurement sommet-disjoint entre  $u$  et  $u'$  qui induisent 7 chemins disjoints entre  $N(u)$  et  $N(u')$ . Notons que certains de ces chemins peuvent être de longueur nulle si les voisinages s'intersectent. En contractant les chemins de longueur non-nulle, on obtient un graphe  $G'$  tel que  $|N(u) \cup N(u')| \geq 9$ . On considèrera uniquement ce graphe par la suite. Par construction de  $G'$ ,  $N(u)$  contient toujours  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe.

Par la symétrie du graphe  $C_8^{1,2}$ , on peut supposer que  $v_1$  est le seul voisin de  $u$  qui ne

soit pas un voisin de  $u'$ . En particulier, on a que  $v_i \in N(u')$  pour tout  $i \geq 2$ . Mais alors  $(u, \{u', v_5\}, v_2, v_3, v_6, v_7, \{v_1, v_4, v_8\})$  est un mineur  $K_7^-$  de  $G'$  (en effet seul  $v_3$  et  $v_6$  ne sont pas adjacents) et est donc un mineur  $K_7^-$  de  $G$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Propriété 4.33**

*Soit  $u$  et  $u'$  deux sommets de degré 8 tels que  $N(u)$  et  $N(u')$  contiennent le graphe  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe, alors  $N(u) \neq N(u')$ .*

PREUVE . Supposons qu'il existe deux sommets  $u$  et  $u'$  de degré 8 tels que  $N(u) = N(u')$ . Alors on peut construire un mineur  $K_7^-$  dans  $G$  en utilisant la construction donnée dans la preuve du Lemme 4.32, ce qui est une contradiction.  $\square$

**Propriété 4.34**

*Au plus un sommet de degré 8 a un voisinage contenant le graphe  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe.*

PREUVE . Supposons qu'il existe deux sommets de degré 8 tels que leurs voisinages contiennent le graphe  $C_8^{1,2}$  comme sous-graphe. Par la Propriété 4.33, ces deux sommets ont un voisinage différent. Par le Lemme 4.32, cela implique qu'il existe un mineur  $K_7^-$  dans  $G$ , une contradiction.  $\square$

**Lemme 4.35**

*Il existe au moins 5  $K_5$  différents dans  $G$ .*

PREUVE . Par le Lemme 4.22, il existe au moins 25 sommets de degré 8 dans  $G$  et par le Lemme 4.34, au plus un de ces sommets contient le graphe  $C_8^{1,2}$  dans son voisinage. Par le Lemme 4.23, cela implique qu'il existe au moins 24 sommets dont le voisinage contient un sous-graphe  $K_4$ . Comme tout sous-graphe  $K_5$  au plus 5 sommets de degré 8, il y a au moins  $\lceil \frac{24}{5} \rceil = 5$  sous-graphe  $K_5$  différents dans  $G$ .  $\square$

Le lemme suivant est la dernière clé nécessaire pour finir la preuve du Théorème 4.15. Il utilise des techniques introduites par Kawarabayashi et Toft [41].

**Lemme 4.36**

*Il existe 3 copies différentes de  $K_5$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  telles que  $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$ .*

PREUVE . Supposons par contradiction qu'aucun triplet de copies de  $K_5$ , notées  $L_i$ ,  $L_j$  et  $L_k$ , sont telles que  $|L_i \cup L_j \cup L_k| \geq 12$ . Les propriétés énoncés ci-dessous permettent de conclure le lemme.

La première propriété se déduit aisément de la 7-connexité de  $G$ .

**Propriété 4.37**

*$G$  ne contient pas de sous-graphe  $K_6^-$ .*

PREUVE . Supposons que  $G$  contienne un sous-graphe  $K_6^-$ . Comme  $G$  n'est pas isomorphe à  $K_6^-$ , il existe un sommet  $x$  qui ne soit pas contenu dans ce  $K_6^-$ . Comme  $G$

est 7-connexe, par le théorème de Menger, il existe 7 chemins intérieurement sommet-disjoint entre  $x$  et les sommets du sous-graphe  $K_6^-$ . Cela induit un mineur  $K_7^-$  dans  $G$ , une contradiction.  $\square$

**Propriété 4.38**

*Toute paire de sous-graphes isomorphes à  $K_5$  s'intersectent sur au plus 2 sommets.*

PREUVE . Soit  $L_1$  et  $L_2$  deux copies de  $K_5$  de  $G$  et supposons qu'elles s'intersectent sur 4 sommets, alors  $G$  contient  $K_6^-$  comme sous-graphe, contredisant la Propriété 4.37. Si elles s'intersectent sur 3 sommets, alors notons par  $S$  l'ensemble des sommets de  $L_1 \cap L_2$  et par  $H$  l'ensemble des sommets de  $L_1 \Delta L_2$ . Par le Lemme 4.24,  $G \setminus S$  est 4-connexe et n'est pas planaire donc par le Théorème 2.34, il existe un mineur  $K_4$  enraciné en  $H$  dans  $G \setminus S$ , ce qui induit un mineur  $K_7$  dans  $G$ , une contradiction.  $\square$

**Propriété 4.39**

*Aucune paire de copies de  $K_5$  ne sont disjointes.*

PREUVE . Supposons que  $L_1$  et  $L_2$  soient deux copies disjointes de  $K_5$ . Soit  $L_3$  une copie de  $K_5$  différente de  $L_1$  et  $L_2$ . Comme  $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| < 12$ , on en déduit que  $|L_3 \cap L_i| \geq 2$  pour  $1 \leq i \leq 2$ . De plus, par la Propriété 4.38,  $|L_3 \cap L_1| = 2$  et  $|L_3 \cap L_2| = 2$ . Notons alors  $L_3 \cap L_1 = \{a, b\}$  et  $L_3 \cap L_2 = \{c, d\}$  (cf. Figure 4.3).

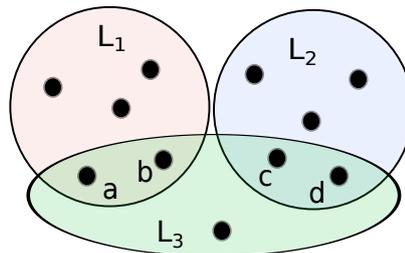


FIGURE 4.3 – Cas où  $L_1$  et  $L_2$  sont disjointes

Maintenant  $G \setminus \{a, b, c, d\}$  est 3-connexe donc par le théorème de Menger, il existe 3 chemins intérieurement sommet-disjoint  $P_1, P_2$  et  $P_3$  entre  $L_1 \setminus \{a, b\}$  et  $L_2 \setminus \{c, d\}$ , mais dans ce cas  $(a, b, c, d, V(P_1), V(P_2), V(P_3))$  est un mineur  $K_7$ , une contradiction.  $\square$

**Propriété 4.40**

*Aucune paire de  $K_5$  ne s'intersectent sur exactement un sommet.*

PREUVE . Soit  $L_1$  et  $L_2$  deux copies de  $K_5$  et supposons que  $L_1 \cap L_2 = \{x\}$ . Soit  $L_3$  un copie de  $K_5$  différente de  $L_1$  et  $L_2$ . Par la Propriété 4.39,  $L_3$  intersecte  $L_1$  et  $L_2$ .

Supposons que  $x \in L_3$ . Comme  $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| < 12$ ,  $|L_1 \cap L_3| = |L_2 \cap L_3| = 2$ . Soit  $y \in (L_1 \cap L_3) \setminus \{x\}$ .  $G \setminus \{x, y\}$  est 5-connexe et non-planaire par le Lemme 4.24. Soit  $Z = (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \setminus \{x, y\}$  et soit  $T = L_2 \setminus L_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$  (cf. Figure 4.4).  $Z$  n'est pas triangulaire par rapport à  $T$ , et donc il existe  $Z_1$  et  $Z_2$  tels que  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2)$  est un mineur  $K_5$  de  $G \setminus \{x, y\}$  et tels que  $Z_1 \cap Z \neq \emptyset$  et  $Z_2 \cap Z \neq \emptyset$ . Comme  $y$  est adjacent à tous les sommets de  $Z$  n'appartenant pas à  $T$  et quitte à rajouter les sommets de  $Z \setminus (Z_1 \cap Z_2)$

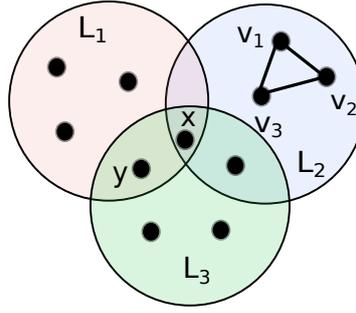


FIGURE 4.4 – Cas où  $L_1 \cap L_2 = \{x\}$  et  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x\}$

dans l'ensemble  $Z_1$  ou  $Z_2$ , on peut supposer que  $y$  est adjacent à  $Z_1$  ou  $Z_2$ . Sans perte de généralité, on suppose donc que  $y$  est adjacent à  $Z_1$ . Ainsi  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2, x, y)$  est un mineur  $K_7^-$  de  $G$  (seuls  $y$  et  $Z_2$  peuvent éventuellement ne pas être adjacents), une contradiction.

Supposons maintenant que  $x \notin L_3$ . Comme  $|L_1 \cup L_2| = 9$  et  $|L_1 \cap L_2 \cap L_3| < 12$ , par la Propriété 4.38, on peut supposer que  $|L_3 \cap L_1| = 2$  et on note  $L_3 \cap L_1 = \{a, b\}$ .

Si  $|L_3 \cap L_2| = 1$ , soit  $\{c\} = L_3 \cap L_2$ . Maintenant  $G \setminus \{a, b, c, x\}$  est 3-connexe. Donc par le théorème de Menger, il existe 3 chemins intérieurement sommet-disjoint  $P_1, P_2$  et  $P_3$  entre  $(L_1 \cup L_3) \setminus \{a, b, c, x\}$  et  $L_2 \setminus \{c, x\}$ . Mais dans ce cas  $(a, b, c, x, V(P_1), V(P_2), V(P_3))$  est un mineur  $K_7$ , une contradiction.

Si  $|L_3 \cap L_2| = 2$ , soit  $\{c, d\} = L_3 \cap L_2$ .  $G \setminus \{a, b, c, d, x\}$  est 2-connexe, donc il existe, par le théorème de Menger, deux chemins intérieurement sommet-disjoint  $P_1$  et  $P_2$  entre  $(L_1 \cup L_2) \setminus \{a, b, c, d, x\}$  et  $L_2 \setminus \{c, d, x\}$ . Mais alors  $(a, b, c, d, x, V(P_1), V(P_2))$  est un mineur  $K_7$ , une contradiction.  $\square$

#### Propriété 4.41

Aucune paire de  $K_5$  ne s'intersectent sur exactement deux sommets.

PREUVE . Supposons que  $L_1 \cap L_2 = \{x, y\}$ . Soit  $L_3$  une copie de  $K_5$  différente de  $L_1$  et  $L_2$ . Par les Propriétés 4.38, 4.39 et 4.40,  $L_3$  intersecte  $L_1$  et  $L_2$  sur deux sommets.

Supposons que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$  et soit  $L_1 \cap L_3 = \{u, v\}$  et  $L_2 \cap L_3 = \{z, t\}$ . Alors  $(u, v, x, y, z, t)$  est un sous-graphe  $K_6$  de  $G$ , ce qui contredit la Propriété 4.37.

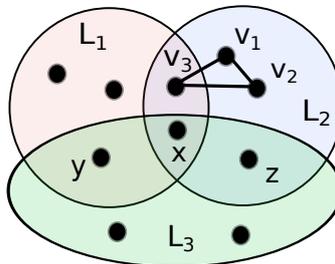


FIGURE 4.5 – Cas où  $L_1 \cap L_2 = \{x, y\}$  et  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x\}$

Supposons que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x\}$  et soit  $(L_1 \cap L_3) \setminus \{x\} = \{y\}$  et  $(L_2 \cap L_3) \setminus \{x\} = \{z\}$ . Maintenant  $G \setminus \{x, z\}$  est 5-connexe et non-planaire. Soit  $Z = (L_1 \cup L_2) \setminus \{x, z\}$  et soit

$T = \{v_1, v_2, v_3\} = L_2 \setminus \{x, z\}$  (cf. Figure 4.5).  $Z$  n'est pas triangulaire par rapport à  $T$ , donc il existe  $Z_1$  et  $Z_2$  tels que  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2)$  soit un mineur  $K_5$  de  $G \setminus \{x, z\}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $y \in Z_1$  (en l'ajoutant à  $Z_1$  si au départ  $y \notin Z_1 \cup Z_2$ ) mais dans ce cas  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2, x, z)$  est un mineur  $K_7^-$  de  $G$ , une contradiction.

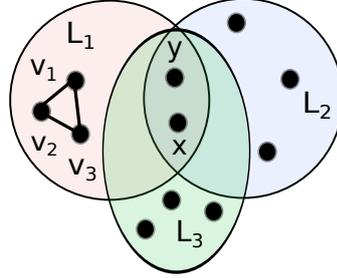


FIGURE 4.6 – Cas où  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x, y\}$

Finalement, supposons que  $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{x, y\}$ . Alors  $G \setminus \{x, y\}$  est 5-connexe et non-planaire. Soit  $Z = (L_1 \cup L_2) \setminus \{x, y\}$  et soit  $T = \{v_1, v_2, v_3\} = L_1 \setminus \{x, y\}$  (cf. Figure 4.6).  $Z$  n'est pas triangulaire par rapport à  $T$ , donc il existe  $Z_1$  et  $Z_2$  tels que  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2)$  soit un mineur  $K_5$  de  $G \setminus \{x, y\}$ . Mais dans ce cas  $(v_1, v_2, v_3, Z_1, Z_2, x, y)$  est un mineur  $K_7$  de  $G$ , une contradiction.  $\square$

Les Propriétés 4.38, 4.39, 4.40 et 4.41 permettent de conclure la preuve du lemme.  $\square$

On peut alors conclure la preuve du Théorème 4.15 en utilisant le théorème ci-dessous dû à Kawarabayashi et Toft [41].

**Théorème 4.42** (Kawarabayashi & Toft, 2005, [41])

*Soit  $G$  un graphe 7-connexe avec au moins 19 sommets. Supposons que  $G$  contienne trois  $K_5$  notés  $L_1, L_2$  et  $L_3$  tels que  $|L_1 \cup L_2 \cup L_3| \geq 12$ , alors  $G$  contient un mineur  $K_7$ .*

En appliquant ce théorème aux trois  $K_5$  donnés par le Lemme 4.36 on obtient une contradiction.

## 4.4 Conjecture d'Hadwiger doublement-critique

Un graphe connexe  $k$ -chromatique est dit **doublement-critique** si pour toute arête  $uv$  de  $G$ ,  $\chi(G \setminus \{u, v\}) = \chi(G) - 2$ . Il est clair que la clique  $K_k$  est un tel graphe. La conjecture suivante est due à Erdős et Lovász et affirme que les cliques sont les seuls graphes ayant cette propriété.

**Conjecture 4.43** (Erdős & Lovász, 1968, [25])

*Si  $G$  est un graphe  $k$ -chromatique doublement-critique, alors  $G$  est isomorphe au graphe  $K_k$ .*

Cette conjecture a été prouvée pour  $k \leq 5$  [70] mais reste ouverte pour  $k \geq 6$ . Kawarabayashi, Pedersen et Toft ont formulé une version affaiblie de cette conjecture et de la conjecture d'Hadwiger.

**Conjecture 4.44** (Kawarabayashi, Pedersen & Toft, 2010, [40])

*Si  $G$  est un graphe  $k$ -chromatique doublement-critique, alors  $G$  contient le graphe  $K_k$  comme mineur.*

Ils ont de plus prouvé que cette conjecture était vérifiée pour  $k \leq 7$  [40], mais le cas  $k = 8$  y est laissé comme un problème ouvert. Pedersen a prouvé que tout graphe 8-chromatique doublement-critique contient  $K_8^-$  comme mineur [56]. Nous allons prouver le cas  $k = 8$  de cette conjecture.

Pour cela, la proposition suivante va nous être utile.

**Proposition 4.45** (Kawarabayashi, Pedersen & Toft, 2010, [40])

*Soit  $G \neq K_k$  un graphe  $k$ -chromatique doublement-critique, alors*

- *le graphe  $G$  ne contient pas  $K_{k-1}$  comme sous-graphe,*
- *le graphe  $G$  a degré minimum au moins  $k + 1$ ,*
- *pour toute arête  $uv \in E(G)$  et toute  $(k-2)$ -coloration de  $G - \{u, v\}$ , l'ensemble des voisins communs de  $u$  et  $v$  contient des sommets de chaque classe de couleur.*

Le dernier point de cette proposition implique en particulier que chaque arête appartient à  $k - 2$  triangles. La preuve donnée ci-dessous est inspirée de [40].

PREUVE . Supposons que  $G$  contienne un sous-graphe  $H$  isomorphe à  $K_{k-1}$ . Comme  $G$  est un graphe  $k$ -chromatique doublement critique,  $E(G \setminus H) = \emptyset$  mais comme  $G$  n'est pas réduit à  $H$ , il existe  $v$  tel que  $v \in G \setminus H$ . Or comme  $\deg(v) \geq k - 1$  (par une remarque de Dirac [24]),  $v$  est adjacent à tous les sommets de  $H$  et donc  $G$  contient un sous-graphe  $K_k$ . Mais comme  $G$  est minimal,  $G \simeq K_k$ , ce qui est une contradiction.

Soit  $xy$  une arête de  $G$  et  $j \in \{1, 2, \dots, k-2\}$  une classe de couleur. Comme  $G$  est un graphe  $k$ -chromatique doublement critique, soit  $\phi$  une  $(k-2)$ -coloration de  $G \setminus \{x, y\}$ . On étend  $\phi$  à une  $(k-1)$ -coloration de  $G - xy$  ( $G$  moins l'arête  $xy$ ) en posant  $\phi(x) = \phi(y) = k-1$ . Supposons maintenant que l'on recoloré  $y$  en posant  $\phi(y) = j$ .  $\phi$  n'est pas une coloration propre de  $G - xy$  car autrement, comme  $\phi(x) \neq \phi(y)$  ce serait une  $(k-1)$ -coloration de  $G$ , contredisant le fait que  $G$  est  $k$ -chromatique. Ainsi, il existe un chemin entre  $x$  et  $y$  alternativement coloré avec les couleurs  $k-1$  et  $j$ . Or comme la couleur  $k-1$  est uniquement utilisée par les sommets  $x$  et  $y$  par construction, alors ce chemin est de taille 3. L'argument ci-dessus est valable pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ , ce qui prouve le premier point.

Prouvons maintenant que  $G$  a degré minimum au moins  $k + 1$ . Soit  $x$  un sommet de  $G$ . Soit  $z \in N(x)$ . Par le point précédent  $x$  et  $z$  ont  $k - 2$  voisins communs et comme  $G$  ne contient pas  $K_{k-1}$  comme sous-graphe, il existe  $y$  et  $y'$  deux voisins communs de  $x$  et  $z$  non-adjacents. Supposons maintenant que  $|N(x) \setminus N[y]| = \{y'\}$ . Alors les voisins communs de  $x$  et  $y'$  sont contenus dans les voisins communs de  $x$  et  $y$ . Comme  $x$  et  $y'$  ont  $k - 2$  voisins communs et que  $G$  est  $k$ -chromatique doublement critique, les voisins communs de  $x$  et  $y'$  utilisent  $k - 2$  couleurs différentes dans toute  $(k-2)$ -coloration de  $G \setminus \{x, y'\}$ . Il ne reste donc plus de couleur parmi les  $k - 2$  couleurs possibles pour  $y$ , ce qui contredit le fait que  $G \setminus \{x, y'\}$  est  $(k-2)$ -coloriable. Ainsi  $|N(x) \setminus N[y]| \geq 2$  et

$|N(x) \cap N(y)| \geq k - 2$ . Et comme  $N(x) = (N(x) \cap N(y)) \cup (N(x) \setminus N[y]) \cup \{y\}$ , on en déduit que  $|N(x)| \geq k + 1$ .  $\square$

**Théorème 4.46**

*Tout graphe  $k$ -chromatique doublement critique avec  $k \leq 8$  contient  $K_k$  comme mineur.*

PREUVE . Considérons par contradiction un graphe  $G$   $k$ -chromatique doublement-critique sans mineur  $K_k$ . Par le deuxième point de la Proposition 4.45,  $\delta(G) \geq k + 1$ . Par les Théorèmes 3.4 et 3.6, ce graphe possède une arête appartenant à au plus  $k - 3$  triangles, ce qui contredit le dernier point de la Proposition 4.45.  $\square$

Notons que l'on peut prouver le cas  $k = 8$  de ce théorème de manière alternative en utilisant le Théorème 3.7.

PREUVE . Considérons par contradiction un graphe  $G$  8-chromatique doublement-critique sans mineur  $K_8$ . Par le Théorème 3.7, ce graphe a une arête qui appartient à au plus 5 triangles ou bien il contient  $K_{2,2,2,2,2}$  comme sous-graphe induit. Par la Proposition 4.45, toute arête de  $G$  appartient à au moins 6 triangles et donc  $G$  contient  $K_{2,2,2,2,2}$  comme sous-graphe induit. Notons par  $K \subseteq V(G)$  l'ensemble des sommets contenant  $K_{2,2,2,2,2}$  comme sous-graphe induit. Comme  $K_{2,2,2,2,2}$  est un graphe sans mineur  $K_8$  et maximal pour cette propriété, alors toute composante connexe  $C$  de  $G \setminus K$  est telle que  $N(C) \subset K$  induit une clique. Comme  $G$  est un graphe 8-chromatique doublement-critique, il existe une 6-coloration de  $G[N[C]]$ , et une 6-coloration de  $G \setminus C$ . Comme ces deux graphes s'intersectent sur une clique, on peut combiner leurs colorations et obtenir ainsi une 6-colorations de  $G$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

## Sur une conjecture de Barát et Thomassen

*Dans ce chapitre nous prouvons que toute triangulation d'une surface compacte sans bords différente de la sphère et du plan projectif admet une orientation sans puits telle que tout sommet a degré sortant divisible par 3. Cela répond à une conjecture de Barát et Thomassen et constitue un premier pas vers une généralisation des bois de Schnyder aux surfaces de genre supérieures. Ce résultat à été obtenu avec D. Gonçalves et K. Knauer [3]*

### 5.1 Introduction

On se référera à [52] pour les notations et les définitions utilisées dans ce chapitre. Toute les surfaces que nous considèrerons par la suite seront compactes et sans bords. Une **carte** est un plongement d'un multigraphe  $G$  dans cette surface  $S$  telle que  $S \setminus G$  soit une union disjointe de disques topologiques ouverts, appelés **faces** de la carte. Une **triangulation** est une carte d'un graphe simple tel que le bord de toute face corresponde à un cycle de  $G$  de taille 3. Un résultat fondamental en topologie affirme que toute surface admet une carte [74]. Le **genre** d'une carte sur une surface orientable est  $\frac{1}{2}(2 - n + m - f)$  et le genre d'une carte sur une surface non-orientable est  $2 - n + m - f$ , où  $n, m, f$  correspond au nombre de sommets, d'arêtes et de faces de la carte respectivement. La **genre d'Euler** d'une carte est  $2 - n + m - f$ , i.e. est égal au genre de la surface si la surface est non-orientable et à deux fois le genre si la surface est orientable. Le genre d'Euler d'une carte ne dépend que de la surface considérée. Ainsi on peut définir le genre (d'Euler) de la surface comme le genre d'Euler de n'importe quelle carte sur cette surface. On peut voir que le nombre d'arêtes  $m$  d'une triangulation  $T$  d'une surface de genre d'Euler  $k$  est de  $3n - 6 + 3k$ . En effet, comme chaque arête appartient à exactement deux faces, on en déduit que  $f = \frac{2m}{3}$  et donc, comme  $k = 2 - n + m - f$ , que l'on a l'équation  $6 - 3n + m = 3k$  (i.e.  $m = 3n - 6 + 3k$ ). Ainsi le nombre total d'arêtes d'une triangulation est divisible par 3. Barát et Thomassen ont montré, en particulier, que toute triangulation d'une surface admet une décomposition en griffes (i.e. copies de  $K_{1,3}$ ). Une décomposition en griffes induit une orientation du graphe en orientant les arêtes des centres des griffes vers les feuilles. Avec une telle orientation, tout sommet a degré sortant divisible par 3 et ré-

ciproquement, si  $G$  admet une telle orientation alors  $G$  admet une décomposition en griffes.

Pour les triangulations de surfaces de genre d'Euler plus petit ou égal à 1, ces triangulations ont strictement moins que  $3n$  arêtes et donc toutes les orientations de ces triangulations telles que les sommets aient tous degré sortant divisible par 3 ont nécessairement un puits (i.e. un sommet de degré sortant 0). Néanmoins les surfaces de genre d'Euler plus grand ou égal à 2 ont suffisamment d'arêtes pour ne pas avoir besoin de puits. Barát et Thomassen ont donc posé la conjecture suivante.

### Conjecture 5.1

*Soit  $T$  une triangulation d'une surface de genre d'Euler  $k \geq 2$ . Alors  $T$  admet une orientation sans puits telle que le degré sortant de chaque sommet est divisible par 3.*

Une autre motivation pour cette conjecture est que l'on peut la voir comme un premier pas vers une généralisation des bois de Schnyder aux surfaces de genre supérieures. Un **bois de Schnyder** d'une triangulation planaire est une orientation et une  $\{0, 1, 2\}$ -coloration des arêtes intérieures vérifiant, pour tout sommet intérieur  $v$ , la règle locale suivante : en parcourant les arêtes incidentes à  $v$  dans le sens direct, on rencontre, dans l'ordre, une arête sortante de couleur 0, potentiellement plusieurs arêtes entrantes de couleur 2, une arête sortante de couleur 1, potentiellement plusieurs arêtes entrantes de couleur 0, une arête sortante de couleur 2, potentiellement plusieurs arêtes entrantes de couleur 1 et enfin on retrouve l'arête sortante de couleur 0 du départ.

Un problème intéressant consiste alors à généraliser ces règles locales aux triangulation de surfaces de genre d'Euler supérieurs de manière à ce que pour certains sommets la règle locale s'applique plusieurs fois autour de ceux-ci. On peut remarquer que l'existence d'un tel bois de Schnyder impliquerait une orientation satisfaisant la Conjecture 5.1.

Dans les sections suivantes, nous prouvons cette conjecture.

## 5.2 Préliminaires

Une carte  $M$  sur une surface  $S$  est caractérisée par un triplet  $(V(M), E(M), F(M))$  formé par les sommets, les arêtes et les faces de  $M$ . La paire  $(V(M), E(M))$  correspond alors au graphe plongé dans la surface. Une **triangulation** est une carte telle que chaque face soit un triangle. Les seules cartes considérées par la suite seront des triangulations. Une **sous-carte**  $M'$  d'une triangulation  $T$  est un triplet  $(V', E', F')$  où  $V' \subseteq V(T)$ ,  $E' \subseteq E(T)$  et  $F' \subseteq F(T)$ . Notons qu'une sous-carte n'est en général pas une carte. Une sous-carte est dite **fermée** si

- pour toute arête  $uv \in E'$ ,  $\{u, v\} \subseteq V'$ , et
- pour toute face  $f \in F'$ , alors toute arête  $e$  incidente à  $f$  appartient à  $E'$ .

La fermeture  $cl(M')$  d'une sous-carte  $M'$  de  $M$  est la plus petite sous-carte fermée de  $M$  contenant  $M'$ .

Dans une sous-carte  $M'$  d'une triangulation  $T$ , un **angle**  $\widehat{e_0 v e_t}$  autour d'un sommet  $v$  est une séquence alternée  $(e_0, f_1, e_1, \dots, f_t, e_t)$ , avec  $t \geq 1$ , d'arêtes et de faces incidentes à  $v$  (dans  $T$ ) et telle que

- les faces  $f_i$  sont différentes deux-à-deux pour  $1 \leq i \leq t$ .
- pour toute face  $f_i$  avec  $1 \leq i \leq t$ ,  $f_i$  est incidente aux arêtes  $e_{i-1}$  et  $e_i$ ,
- les arêtes  $e_0$  et  $e_t$  appartiennent toutes deux à  $cl(M')$ ,
- aucune des arêtes restantes  $e_i$  pour  $0 < i < t$  ni des faces  $f_i$  pour  $0 < i \leq t$  n'appartiennent à  $cl(M')$ .

Les angles que nous considérerons ici ne sont pas orientés, c'est-à-dire que les angles  $(e_0, f_1, e_1, \dots, f_t, e_t)$  et  $(e_t, f_t, e_{t-1}, \dots, f_0, e_0)$  sont identiques. Notons que dans la séquence  $(e_0, f_1, e_1, \dots, f_t, e_t)$ , on peut avoir  $e_0 = e_t$ .

Le **bord**  $\partial M'$  d'une sous-carte  $M'$  de  $M$  est l'ensemble des arêtes de  $cl(M')$  ayant strictement moins que deux incidences à des faces de  $cl(M')$ . Cela correspond aussi à l'ensemble des arêtes appartenant à au moins un angle. On dit que deux angles distincts  $(e_0, f_1, e_1, \dots, f_t, e_t)$  et  $(e'_0, f'_1, e'_1, \dots, f'_t, e'_t)$  sont **consécutifs** sur le bord si  $e_t = e'_0$  et  $f_t = f'_1$ . Comme chaque angle a exactement deux côtés ( $e_0$  et  $e_t$  dans le cas de l'angle  $\widehat{e_0 v e_t}$ ), on peut définir la **séquence bordante** comme une collection de séquences circulaires d'angles. Parfois une séquence bordante est notée par une séquence alternée  $(\hat{a}_0, e_0, \hat{a}_1, e_1, \dots, \hat{a}_t, e_t)$  ou encore par  $(e_0, e_1, \dots, e_t)$  où  $e_i$  est l'arête commune à  $\hat{a}_i$  et  $\hat{a}_{i+1}$ . Notons qu'une arête  $e$  peut apparaître deux fois dans une séquence bordante, par exemple si  $e$  est un isthme de  $M'$ . Ainsi, si nécessaire, on se réfèrera à une occurrence spécifique de  $e$  dans  $\partial M'$ . Par simplicité, la séquence bordante de  $M'$  est aussi noté  $\partial M'$ .

Dans la suite, un **disque** de  $T$  est une sous-carte  $M'$  de  $T$  homéomorphe à un disque topologique (ouvert ou fermé). On appelle  **$k$ -disque** un disque dont le bord est un cycle de taille  $k$ . Un 3-disque est dit **trivial** s'il contient une seule face. Un disque est dit **sans cordes** si les sommets sur son bord induisent un cycle sans cordes à l'intérieur du cycle. Un cycle **non-contractible** est un cycle dont le bord n'induit pas un disque de  $T$ .

Étant donné une triangulation  $T$  et un ensemble de sommets  $X \subseteq V(T)$ , la **sous-carte induite**  $T[X]$  est la sous-carte de  $T$  dont l'ensemble de sommets est  $X$ , l'ensemble d'arêtes  $\{uv \in E(T) \mid u, v \in X\}$  et l'ensemble de faces  $\{uvw \in F(T) \mid u, v, w \in X\}$ . Notons que les sous-cartes induites sont des sous-cartes fermées.

Étant donné une sous-carte induite  $M' = T[X]$  d'une triangulation  $T$ , et une occurrence de l'arête  $ab \in \partial M'$  et dont les angles correspondants sont notés  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$ , il existe un unique sommet  $c$  tel que la face  $abc$  de  $T \setminus M'$  appartiennent aux angles  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$ . Pour tout tel sommet  $c$  et arête  $ab \in \partial M'$ , on définit l'opération d'**empilage** de  $c$  sur l'arête  $ab$  comme l'ajout de  $c$  à  $X$ , c'est-à-dire passer de  $M' = T[X]$  à  $T[X + c]$ . Lorsque l'on empile un sommet  $c$  sur  $M' = T[X]$ , le voisinage de  $c$  dans  $M'$  est alors  $M' \cap cl(M'' \setminus M')$  où  $M'' = T[X + c]$ . Comme  $T$  est simple, notons que ce voisinage est soit un cycle soit une union de chemins où l'un de ces chemins contenant au moins une arête (l'arête  $ab$ ). La Figure 5.1 représente les différentes possibilités d'empiler un sommet  $c$ .

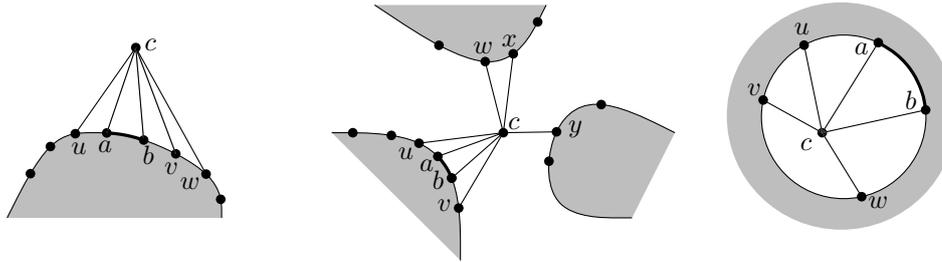


FIGURE 5.1 – Empilement d'un sommet  $c$  sur l'arête  $ab$ . La zone grisée correspond à la sous carte avant l'empilement de  $c$ . A gauche : un chemin  $P_1 = (u, a, b, v, w)$ . Au milieu : trois chemins  $P_1 = (u, a, b, v)$ ,  $P_2 = (w, x)$  et  $P_3 = (y)$ . A droite : un cycle  $C = (u, v, w, b, a)$ .

### 5.3 Preuve de la Conjecture 5.1

Considérons par contradiction un contre-exemple minimal  $T$ . Notons que  $T$  ne contient pas de 3-disque non trivial  $D'$ . Autrement, on aurait pu supprimer l'intérieur de  $D'$  et le replacer par une face. Par minimalité de  $T$ , cette nouvelle triangulation admet une orientation telle que tout sommet a degré sortant non-nul et divisible par 3. Comme  $D'$  est une triangulation plane, il existe une orientation de ses arêtes intérieures de manière à ce que les sommets externes et internes aient respectivement degré sortant 0 et 3. C'est le cas pour les orientations induites par un bois de Schnyder sur cette triangulation [65]. Alors l'union de ces deux orientations induit une orientation de  $T$  dans laquelle tous les sommets ont degré sortant divisible par 3. La sous-section suivante donne un aperçu du reste de la preuve.

#### 5.3.1 Aperçu

On prouvera dans un premier temps que l'on peut partitionner les arêtes d'une triangulation  $T$  en quatre graphes :

- Le **graphe initial**  $I$ , qui est une sous-carte induite qui contient un cycle non-contractible. De plus,  $I$  contient une arête  $e^* = \{u, v\}$  telle que  $I \setminus e^*$  est un disque  $D$  dont le graphe sous-jacent est un graphe plane externe maximal avec seulement deux sommets de degré 2,  $u$  et  $v$  (cf. Figure 5.2).
- Le **graphe de correction**  $B$  qui est muni d'une orientation acyclique telle que chaque sommet de  $V(T) \setminus V(I)$  a degré sortant 2, alors que les sommets restants ont degré sortant 0.
- Le **chemin de correction**  $G$  qui est un chemin reliant les sommets  $u$  et  $v$ .
- Le **graphe non-nul**  $R$  qui est muni d'une orientation telle que les sommets de  $V(T)$  à l'exception des sommets intérieurs de  $G$  (i.e. les sommets de  $V(T) \setminus (V(G) \setminus \{u, v\})$ ) aient degré sortant au moins 1.

L'existence d'un tel graphe  $I$  est prouvé à la Sous-Section 5.3.2 et l'existence des graphes  $B$ ,  $G$  et  $R$  est prouvé dans la Sous-Section 5.3.3. L'existence de ces trois derniers graphes est obtenue à partir de la sous-carte  $I$  en empilant les sommets les uns après les autres jusqu'à couvrir la totalité de la triangulation  $T$  (cette approche est inspirée de celle utilisée dans [13, 10]).

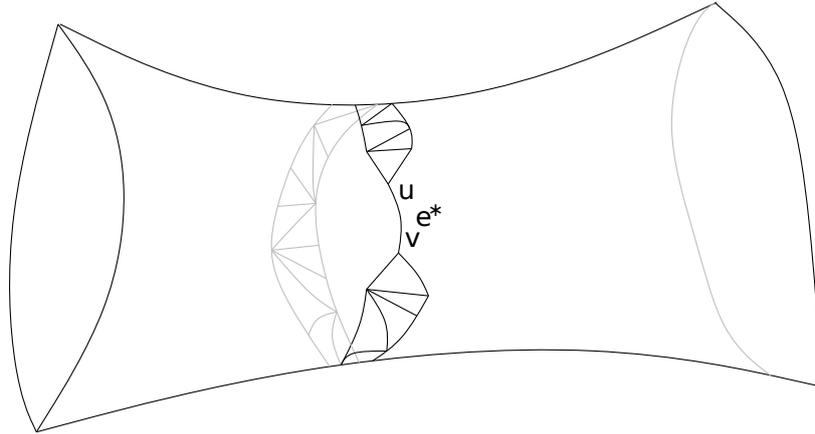


FIGURE 5.2 – Le graphe initial I

Les arêtes de I, B et G seront alors (ré)orientées pour obtenir l'orientation désirée. Le chemin G quant à lui sera entièrement orienté soit de  $u$  vers  $v$ , soit en sens inverse en fonction des corrections à effectuer. Dans tous les cas, ses sommets intérieurs seront assurés d'avoir degré sortant au moins 1. L'orientation des arêtes de R ne changera pas et cela assurera donc l'existence d'au moins un arc sortant pour chaque sommet n'étant pas interne à G. Au final tous les sommets de T seront assurés d'avoir un degré sortant non-nul, et nous pourrons nous concentrer sur le fait qu'ils aient degré sortant divisible par 3.

Nous réorienterons les arcs de B afin d'assurer que les sommets  $V(T) \setminus V(I)$  aient degré sortant divisible par 3 (comme dans [10]). Enfin dans la Sous-Section 5.3.5, nous choisirons l'orientation du chemin G et nous orienterons I de manière à obtenir l'orientation désirée.

### 5.3.2 L'existence de I

Pour prouver l'existence du graphe I, nous allons avoir besoin du lemme suivant garantissant l'existence d'une sous-carte contenant un cycle non-contractible mais telle que la suppression d'un certain sommet induise une sous-carte homéomorphe à un disque.

#### Lemme 5.2

*Toute triangulation T de genre d'Euler au moins 2, admet une sous-carte induite I obtenue à partir d'un disque D en empilant un sommet  $v$  telle que pour toute paire de voisins  $a$  et  $b$  de  $v$  appartenant à deux chemins distincts du voisinage de  $v$  dans D, tout cycle C de I contenant les arêtes  $av$  et  $vb$  n'est pas contractible.*

PREUVE . Notons que toute face de T est un disque induit. Considérons un disque induit maximal D de T. Soit  $xy \in \partial D$  et  $v$  le sommet de  $V(T) \setminus V(D)$  tel que  $vxy \in F(T)$ . On note alors par I la carte obtenue en empilant le sommet  $v$  sur l'arête  $xy$ . Comme T est de genre d'Euler au moins 2, le voisinage de  $v$  n'est pas un cycle. De plus, comme D est maximal, il existe au moins deux chemins distincts dans le voisinage de  $v$  car autrement empiler  $v$  induirait un disque plus grand, ce qui contredirait sa maximalité. Supposons par contradiction, qu'il existe un cycle contractible C de I passant par les arêtes  $av$  et  $vb$

où  $a, b$  sont des sommets appartenant à deux chemins distincts du voisinage de  $v$  dans  $D$ . Comme  $C$  est contractible, on note par  $D'$  le disque bordé par le cycle  $C$ . Comme  $I$  est induit,  $D'$  contient des sommets n'appartenant pas à  $I$ . Soit  $w$  un tel sommet. Alors, comme  $C$  est contractible,  $V(D) \cup \text{Int}(D')$  (ie.  $V(D) \cup V(D') \setminus \{v\}$ ) induit un disque plus grand, ce qui contredit la maximalité de  $D$ . Ainsi le cycle  $C$  n'est pas contractible, ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Le lemme suivant garantit l'existence d'une sous-carte  $I$  avec certaines propriétés qui permettront d'en déduire l'existence du graphe  $I$  par la suite.

**Lemme 5.3**

*Toute triangulation  $T$  de genre d'Euler au moins 2 admet une sous-carte  $I$  induite contenant un cycle non-contractible et une arête  $e^* = uv$  telle que  $I \setminus e^*$  est un disque  $D$ . De plus cette sous-carte peut être choisie telle que pour chacun des deux  $(u, v)$ -chemins de  $\partial D$ , ses sommets intérieurs ont un voisin dans l'intérieur de l'autre  $(u, v)$ -chemin.*

PREUVE . Soit  $I$  une sous-carte induite de  $T$  donnée par le Lemme 5.2 de taille minimale. Par construction, il existe un sommet  $v$  de  $I$  tel que  $I \setminus \{v\}$  soit un disque (noté  $\tilde{D}$ ) et tel que  $I$  soit obtenu à partir de  $\tilde{D}$  en empilant le sommet  $v$  sur une arête  $ab$ . On note alors par  $(w_1, \dots, w_s)$  avec  $s \geq 2$ , le chemin du voisinage de  $v$  contenant l'arête  $ab$  et par  $u_1, \dots, u_t$ , où  $t \geq 1$ , les sommets du voisinage de  $v$  distincts des sommets  $w_1, \dots, w_s$ . Enfin on note par  $D$  le disque obtenu à partir de  $\tilde{D}$  en y ajoutant le sommet  $v$ , les arêtes  $vw_i$  pour tout  $1 \leq i \leq s$  et les faces  $vw_iw_{i+1}$  pour  $1 \leq i < s$ . La minimalité de  $I$  permet de montrer les propriétés suivantes.

**Propriété 5.4**

*$\partial \tilde{D}$  n'induit pas de corde  $xy$  à l'intérieur de  $\tilde{D}$  tel qu'il existe un  $(x, y)$ -chemin contenant à la fois une arête  $w_iw_{i+1}$ , avec  $1 \leq i < s$ , et un sommet  $u_j$  avec  $1 \leq j \leq t$ .*

PREUVE . Supposons qu'il existe une telle corde  $xy$ . Soit  $\tilde{D}' \subsetneq \tilde{D}$  le disque dont le bord est contenu dans  $\partial \tilde{D} + xy$  et contenant l'arête  $w_iw_{i+1}$  et le sommet  $u_j$ . Le graphe induit par  $V(\tilde{D}') \cup \{v\}$  contredit la minimalité de  $I$ .  $\square$

En particulier, la Propriété 5.4 implique que  $\partial D$  ne contient pas de corde incidente à deux sommets  $u_i$  et  $u_j$ , pour tout  $1 \leq i, j \leq t$ .

**Propriété 5.5**

*Pour tout  $1 \leq j \leq t$ , tout sommet intérieur  $x$  d'un chemin entre  $v$  et  $u_j$  de  $\partial D$  est adjacent à un sommet intérieur du deuxième chemin entre  $v$  et  $u_j$  de  $\partial D$ .*

PREUVE . Soit  $P_1$  et  $P_2$  les deux chemins de  $\partial D$  entre  $v$  et  $u_j$  contenant respectivement  $w_1$  et  $w_s$ . Supposons par contradiction qu'il existe un sommet intérieur  $x$  de  $P_1$  n'ayant aucun voisin dans l'intérieur de  $P_2$ . Par la Propriété 5.4, cela implique que  $\tilde{D} = D \setminus \{v\}$  ne contient pas de corde incidente au sommet  $x$ . Ainsi  $\tilde{D} \setminus \{x\}$  est un disque induit contenant  $u_j$  et l'arête  $w_{s-1}w_s$ , et donc la carte induite par  $V(I) \setminus \{x\}$  contredit la minimalité de  $I$ .  $\square$

Comme  $\partial D$  n'a pas de cordes adjacente à  $u_j$ , pour tout  $1 \leq j \leq t$ , cela implique que  $t = 1$ , ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

Soit  $I = D \cup \{e^*\}$  une sous-carte donnée par le Lemme 5.3. Il reste à montrer que le graphe induit par la sous-carte  $D$  est un graphe planaire externe, i.e. qu'il ne contient pas de sommet intérieur. Au début de la preuve, nous avons vu que, par minimalité,  $T$  ne contient pas de 3-disque non-trivial. Par la définition de  $I$ , si  $D$  contenait un sommet intérieur, ce sommet appartiendrait à un 4-disque sans cordes de  $D$ . Le lemme suivant montre que ce n'est pas possible.

**Lemme 5.6**

*La sous-carte  $D$  ne contient pas de 4-disque sans cordes.*

PREUVE . Supposons par contradiction que  $D$  contienne un tel disque  $D'$ . On note par  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  le bord de  $D'$ . Alors en supprimant l'intérieur de  $D'$  et en ajoutant l'une des deux diagonales possibles, disons  $v_2v_4$  (sans perte de généralité, on peut supposer que  $v_2v_4 \neq e^*$ ) et les faces triangulaires  $v_1v_2v_4$  et  $v_2v_3v_4$ , on obtient une triangulation  $T'$  définissant la même surface que  $T$ . De plus, comme  $I$  est une sous-carte induite sans 3-disque non trivial et comme  $v_2v_4 \neq e^*$ ,  $v_2v_4$  n'est pas une arête de  $T$ . Ainsi  $T'$  est une triangulation strictement plus petite que  $T$ . Par minimalité de  $T$ ,  $T'$  admet une orientation telle que tout sommet ait degré sortant non nul et divisible par 3. Supposons que l'arête  $v_2v_4$  soit orientée de  $v_2$  à  $v_4$  dans une telle orientation. Comme toute triangulation planaire admet une orientation de ses arêtes intérieures telle que les sommets intérieurs (resp. extérieurs) aient degré sortant 0 (resp. 3) [65], on peut orienter les arêtes intérieures de  $D'$  de telle manière à ce que les sommets intérieurs, le sommet  $v_2$  et les sommets  $v_1, v_3$  et  $v_4$  aient respectivement degré sortant 3, 1 et 0. Pour cela on considère l'orientation d'une triangulation  $D' + v_1v_3$ , de face externe  $v_1v_3v_4$ , et notons que les arêtes  $v_2v_1$  et  $v_2v_3$  sont nécessairement orientées de  $v_2$  à  $v_1$  et  $v_3$  respectivement (car  $v_1, v_3$  et  $v_4$  ont degré sortant 0). Alors l'union des orientations de  $T' \setminus v_2v_4$  et des arêtes intérieures de  $D'$  induit une orientation de  $T$  telle que tous les sommets aient degré sortant non nul et divisible par 3.  $\square$

**5.3.3 L'existence de B, G et R**

Dans cette partie, nous allons construire B, G et R de manière itérative en partant du graphe  $I$  et en explorant le reste de la triangulation sommet par sommet. Pour cela nous allons définir deux notions :

- La région **explorée** est une sous-carte induite  $T[X]$  de  $T$  de bord  $\partial T[X]$  correspondant à la partie explorée de la triangulation.
- La **région non-explorée** est alors la sous-carte  $T \setminus T[X]$  qui peut éventuellement être composée de plusieurs composantes connexes.

En particulier, G sera obtenu comme l'union de deux chemins séparés  $G_u$  et  $G_v$ , allant respectivement de  $u$  à  $u'$  et de  $v$  à  $v'$  où  $u'$  et  $v'$  sont deux sommets pouvant être égaux à  $u$  et  $v$  respectivement si les chemins sont triviaux, ou bien être tels que  $u' = v'$ . Si  $u' \neq v'$ , on les appelle les **extrémités actuelles** de G et sont situés sur le bord  $\partial T[X]$  de la région explorée.

Lors de la construction des graphes B, G et R certains sommets ne vérifient pas les conditions imposés sur les graphes dans la Sous-Section 5.3.1, car certaines des arêtes seront ajoutés à une étape ultérieure de la construction. Nous allons donc introduire la notion de **requête** sur un angle. On définit deux types de requêtes qu'un angle de  $\partial T[X]$  peut avoir. Un angle  $a$  au plus une requête et un angle n'ayant aucune requête est dit **libre**. Informellement, une G-requête (resp. une R-requête) pour un angle  $\hat{a}$  signifie qu'à une étape ultérieure, une arête contenue à l'intérieur de cet angle sera ajouté au graphe G (resp. au graphe R et orienté de  $a$  vers l'autre extrémité de l'arête).

Durant la construction de la région explorée, on conservera les invariants suivants :

- (I) Les graphes I, B, G et R partitionnent les arêtes de  $T[X]$ .
- (II) Tous les sommets intérieurs de  $T[X]$  ont au moins un R-arc sortant dans R ou 2 G-arêtes incidentes.
- (III) B est un graphe acyclique tel que les sommets de I n'ont pas de B-arc sortant et tel que les sommets de  $V(T[X]) \setminus V(I)$  ont deux B-arcs sortants.
- (IV) Tout sommet de  $(\partial T[X] \setminus \{u', v'\}) \cup \{u, v\}$  n'ayant pas de R-arc sortant, a un angle associé avec une R-requête.
- (V) Si G n'est pas un  $(u, v)$ -chemin, ses extrémités actuelles ont un angle associé chacune, disons  $\hat{u}'$  et  $\hat{v}'$  consécutifs sur  $\partial T[X]$ , et qui ont une G-requête.
- (VI) S'il existe un disque  $D'$  non-exploré (i.e. une composante de la région non-explorée homéomorphe à un disque), alors au moins trois des angles de  $\partial T[X]$  sur le bord de  $D'$  sont libres.

Rappelons qu'à l'étape initiale  $T[X] = I$  et vérifions que dans ce cas les invariants ci-dessus sont satisfaits. Il est clair que (I), (II) et (III) sont trivialement satisfaits. Comme chacun des deux cycles du bord  $\partial I$  est non-contractible, alors aucune des composantes de la région non-explorée n'est un disque et donc (VI) est satisfait. Comme  $u$  et  $v$  apparaissent consécutivement deux fois le long de  $\partial T[X]$  (car l'arête  $e^*$  apparait deux fois dans  $\partial T[X]$ ), on choisit deux angles consécutifs de  $u$  et  $v$  et on y ajoute une G-requête, et (V) est satisfait. Ensuite, on ajoute une R-requête à tous les autres angles de  $\partial I$  (cf. Figure 5.3). Notons que tous les sommets de I ont une R-requête et donc que (IV) est satisfait.

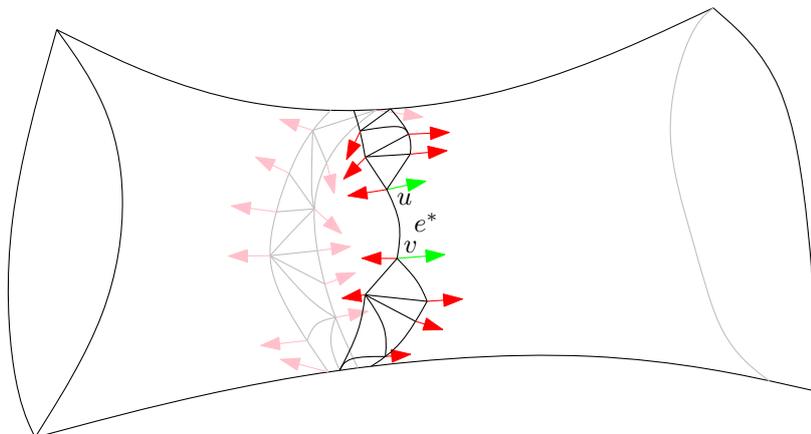


FIGURE 5.3 – Le graphe initial I avec les requêtes correspondantes

Rappelons que pour le reste de la construction, à chaque étape nous agrandirons la région explorée  $T[X]$  en empilant des sommets  $x$  sur une arête  $e \in \partial T[X]$ . Le sommet  $x$  choisi, le sera par les règles suivantes :

- (i) Une des deux extrémités de  $e$  n'a pas de G-requête.
- (ii) Si  $x$  appartient à un disque non-exploré (i.e. à un disque contenu dans la région non-explorée)  $D$ , soit  $x$  est adjacent à tous les sommets de  $\partial D$ , soit le voisinage de  $x$  dans  $\partial D$  est composé d'un unique chemin  $P$  tel que  $P$  ne contienne pas tous les angles libres de  $\partial D$ .
- (iii) Dans le cas où  $x$  n'appartient pas à un disque non-exploré, on choisit si possible  $x$  de telle manière à ce qu'aucun disque non-exploré ne soit créé lorsque l'on empile  $x$ .

Comme  $T$  ne contient pas de 3-disque non trivial, on peut facilement vérifier que choisir un tel sommet  $x$  est toujours possible.

Par la suite, on montre que l'on peut étendre  $G$ ,  $B$  et  $R$  et réactualiser les requêtes des angles de telle manière à ce que tous les invariants restent satisfaits. Dans la construction donnée ci-dessous, les arêtes de  $T[X]$  ne changent pas, de même que les requêtes des angles associés à des sommets non-voisins de  $x$ . Ainsi nous avons uniquement à nous préoccuper du sommet  $x$  et de ses voisins immédiats. Les sous-cas sont définis en fonction de la topologie de la région non-explorée contenant  $x$ .

### 1) Le sommet $x$ est contenu dans un disque non-exploré $D$ et son voisinage est un cycle $\partial D$ .

Par (VI), le disque non-exploré contenant  $x$  a au moins 3 angles libres. On oriente alors les arêtes correspondant à ces angles de  $x$  vers ses voisins et on en ajoute deux au graphe  $B$  et les autres au graphe  $R$ . On ajoute alors les arêtes incidentes à  $x$  correspondantes aux angles non-libres au graphe  $G$  ou  $R$  en fonction de leurs requêtes, en les orientant vers  $x$ .

Nous allons maintenant vérifier que les invariants sont respectés. Par construction, les invariants (I) et (III) sont trivialement vérifiés. L'invariant (II) est vérifié car toutes les requêtes des voisins de  $x$  sont satisfaites. L'invariant (VI) est vérifié car le disque actuel contenant  $x$  fait maintenant partie de la région explorée et les autres disque non-explorés, s'il y en a, restent inchangés par cette construction et donc conservent leurs trois angles libres. De plus comme les G- et R-requêtes associées aux angles de  $\partial T[X]$  (après l'empilement de  $x$ ) n'ont pas été modifiées, les invariants (IV) et (V) sont vérifiés. Par la suite, nous ne vérifierons plus explicitement les invariants conservés trivialement par les constructions données et laisserons le soin au lecteur de faire cette vérification. Nous vérifierons néanmoins que l'invariant (VI) soit vérifié car la preuve peut-être non-triviale.

Pour les cas restants, nous aurons besoin de notations additionnelles. Étant donné  $P = (p_1, \dots, p_s)$  un chemin correspondant à une composante du voisinage de  $x$  dans  $\partial T[X]$  et ses angles correspondants  $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s)$ , les angles **internes** sont les angles  $\hat{p}_i$  où  $1 < i < s$  et les autres sont appelés angles **externes**. Tout angles interne ayant une R- ou G-requête doit la satisfaire. Ainsi pour tout angle interne  $\hat{p}_i$  avec une R-requête

(resp. une G-requête), on ajoute l'arête  $xp_i$  au graphe  $G$  (resp. au graphe  $R$  orientée en direction de  $x$ ). On appellera cette étape, **étape initiale**, par la suite. On rappelle que les extrémités actuelles de  $G$  seront toujours dénotées par  $u'$  et  $v'$  dans la suite.

## 2) La région non-explorée contenant $x$ n'est pas un disque.

On peut supposer qu'il n'existe pas d'angles libres. Autrement on assigne une R-requête à ces angles. La construction se déroule en trois étapes : l'étape initiale décrite ci-dessus, l'étape intermédiaire décrite dans la partie 2.1) et enfin l'étape finale décrite dans la partie 2.2). L'étape intermédiaire dépend de la position des G-requêtes. Pour les cas où certains angles possèdent une G-requête, on pourra se référer à la Figure 5.4.

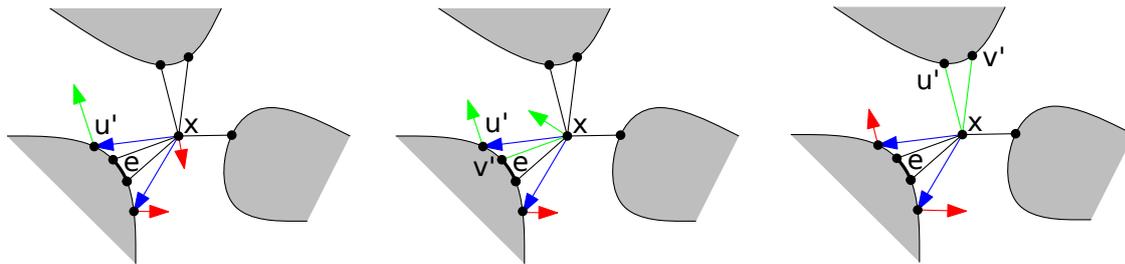


FIGURE 5.4 – Etude de cas en fonction de la position des G-requêtes (cas 2.1.3)

### 2.1) Étape intermédiaire

**2.1.1) S'il n'y a aucune G-requête** sur les angles des chemins du voisinage de  $x$ , alors on assigne une R-requête à l'un des angles  $\hat{x}$  associé à  $x$ .

**2.1.2) S'il y a une seule G-requête** sur les angles des chemins du voisinage de  $x$  (disons sur l'angle  $\hat{u}'$ ), alors  $\hat{u}'$  est situé à l'une des extrémités d'un chemin du voisinage de  $x$ . Le nouvel angle de  $u'$  (issu de  $\hat{u}'$ ) hérite de la G-requête de  $\hat{u}'$ . On assigne enfin une R-requête à l'un des angles  $\hat{x}$  associé à  $x$ .

**2.1.3) S'il y a deux G-requêtes** sur les angles des chemins du voisinage de  $x$ .

**2.1.3.1) Si l'une des G-requête est sur un angle externe (noté  $\hat{u}'$ ) et la seconde est sur un angle interne (noté  $\hat{v}'$ )**, alors l'arête  $v'x$  a été ajoutée au graphe  $G$  à l'étape initiale. On ajoute alors une G-requête à l'angle  $\hat{x}$  associé à  $x$ , qui suit l'angle  $\hat{u}'$  et le nouvel angle issu de  $\hat{u}'$  hérite de la G-requête de  $\hat{u}'$ .

**2.1.3.2) Si les deux G-requêtes sont sur des angles internes**, cela signifie que les arêtes  $v'x$  et  $u'x$  ont été ajoutées au graphe  $G$  à l'étape initiale. Ainsi  $x$  est un sommet intérieur de graphe  $G$  et n'a donc pas besoin de requêtes. On peut donc laisser tous les angles associés à  $x$  libres.

**2.1.3.3) Si les deux G-requêtes sont sur des angles externes**, alors par (i), le voisinage de  $x$  dans  $\partial T[X]$  contient un chemin de taille 1 composé des sommets  $u'$  et  $v'$  ainsi qu'au moins un deuxième chemin de taille au moins 1. Dans ce cas, on ajoute les arêtes  $v'x$  et  $u'x$  au graphe  $G$  et comme les sommets  $x$ ,  $u'$  et  $v'$  sont alors des sommets de  $G$ , on peut laisser les nouveaux angles associés à  $u'$  et  $v'$ , ainsi que les angles associés à  $x$ , libres.

## 2.2) Étape finale

On procède maintenant à l'étape finale. On ajoute deux arêtes incidentes à  $x$  au graphe B, en fonction des G-requêtes. S'il existe un angle externe  $\hat{u}'$  avec une G-requête (cas 2.1.2) et 2.1.3.1) de l'étape intermédiaire), on ajoute l'arête  $xu'$  orientée en direction de  $u'$  au graphe B. Les une ou deux arêtes restantes à ajouter au graphe B sont alors choisies parmi les arêtes reliant  $x$  à un angle externe. On peut toujours trouver ces une ou deux arêtes car dans la construction décrite à l'étape intermédiaire. En effet, soit l'un des angles externes ( $\hat{p}_1$  ou  $\hat{p}_s$ ) est libre et dans ce cas l'arête incidente à  $x$  et associé à cet angle peut être utilisé, soit le voisinage de  $x$  possède au moins deux chemins de longueur au moins 1 et dans ce cas, les deux angles externes du chemin différent de P sont libres et on peut alors utiliser les arêtes incidentes à  $x$  et associés à ces angles. Toutes les autre arêtes reliant  $x$  à un angle externe sont ajoutées au graphe R et orientées en direction de  $x$ . Notons que parmi les nouveaux angles externes créés et les angles associés à  $x$ , au plus 3 de ces angles possèdent des requêtes : les deux angles associés à des arêtes ajoutés au graphes B et l'un des angles associés à  $x$ .

Dans le cas où ajouter  $x$  crée un disque non-exploré  $D'$ , on doit vérifier que (VI) reste satisfait. Pour cela, on utilisera la propriété suivante :

### Propriété 5.7

*Le sommet  $x$  apparait plusieurs fois sur le bord de  $D'$ .*

PREUVE . Supposons que nous créons un disque non-exploré  $D'$  tel que  $x$  apparaisse seulement une fois sur son bord. Supposons aussi que  $x$  soit choisi afin de minimiser le nombre de faces de  $D'$ . Comme il n'existe pas de 3-disque non trivial dans  $D'$ , le bord de  $D'$  est un cycle de taille au moins 4. Donc  $D'$  contient un sommet non-exploré  $x'$  qui aurait pu être empilé sur une sous-séquence de  $\partial D' \setminus x$ . De plus,  $x'$  peut être choisi de manière à ce que cette sous-séquence ne contienne pas uniquement les G-requêtes. Ainsi empiler  $x'$  soit n'aurait pas créé de disque non-exploré, soit en aurait créé un plus petit, ce qui contredit le choix de  $x$ .  $\square$

Comme T est simple, cette propriété implique qu'il y a au moins 6 angles sur le bord de  $D'$  qui soient associés aux sommets externes des chemins du voisinage de  $x$  (il y en a au moins 4) où associés à  $x$  (il y en a au moins 2). Comme au plus 3 de ces angles ont des requêtes par construction, il reste donc au moins 3 angles libres sur le bord de  $D'$  et (VII) reste donc satisfait.

### 3) La région non-explorée contenant $x$ est un disque, mais le voisinage de $x$ n'est pas un cycle.

On procède d'abord à l'étape initiale. Par (ii), le voisinage du sommet  $x$  est composé d'un unique chemin  $P = (p_1, \dots, p_s)$  avec  $s \geq 2$ . On note alors par  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s$  les angles correspondants et par  $t$  le nombre de ces angles qui sont libres.

Dans ce cas, pour vérifier (VI), on a uniquement à maintenir le nombre d'angles libres de ce disque non-exploré au dessus de 3. Comme par (ii) il existe au moins un angle

libre n'étant pas contenu parmi les angles  $\hat{p}_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , on doit alors garantir au moins  $\min(t, 2)$  angles libres parmi les nouveaux angles  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{p}_s$  et  $\hat{x}$ .

Dans ce but, on utilise les angles libres de la manière suivante. Pour tout angle libre  $\hat{p}_i$  (interne ou non), l'arête  $xp_i$  est ajoutée soit au graphe B, soit au graphe R, dans les deux cas orienté en direction de  $p_i$ . Parmi ces  $t$  angles,  $\min\{t, 2\}$  induisent un arc dans le graphe B et  $\max\{0, t - 2\}$  un arc du graphe R. Il reste à traiter le cas des angles qui ne sont ni internes ni libres. On termine ce cas différemment suivant la position des G-requêtes.

**3.1) S'il n'y a pas de G-requêtes sur P**, alors si  $t \leq 2$ , on assigne une R-requête à l'angle  $\hat{x}$  et autrement on laisse l'angle  $\hat{x}$  libre. On utilise alors  $\max\{0, 2 - t\}$  des angles externes non-libres en ajoutant les arêtes correspondantes au graphe B et en les orientant de  $x$  vers l'autre extrémité. S'il reste des angles externes non-libres (il y en a  $\min\{2, t\}$ ), on ajoute les arêtes correspondantes au graphe R orienté en direction de  $x$  et on laisse leurs nouveaux angles associés libres. Si  $t \leq 2$  (resp.  $t \geq 3$ ), il y a donc  $\min(2, t) = t$  (resp.  $1 + \min(2, t) = 3$ ) angles libres parmi les nouveaux angles  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{x}$  et  $\hat{p}_s$ .

**3.2) S'il y a une seule G-requête (disons  $\hat{u}'$ ) sur P**, alors  $\hat{u}'$  est une extrémité de P, disons  $p_1 = u'$ . On pourra se référer à la Figure 5.5 pour voir comment le cas est traité. Le nouvel angle associé à  $u'$  (issu de  $\hat{u}'$ ) hérite de la G-requête de  $\hat{u}'$  et on ajoute l'arête  $xp_1$  au graphe B si  $t \leq 1$ , ou au graphe R autrement. Dans les deux cas l'arête est orientée en direction de  $p_1$ . Si  $t = 0$  alors  $\hat{p}_s$  n'est pas libre (il a donc une R-requête) et on ajoute  $xp_s$  au graphe B orienté de  $x$  à  $p_s$  et le nouvel angle issu de  $\hat{p}_s$  hérite de la R-requête de  $\hat{p}_s$ . Si  $t \geq 1$ , on ajoute l'arête  $xp_s$  au graphe R orienté en direction de  $x$  si l'angle  $\hat{p}_s$  avait une R-requête. Dans tous les cas, que  $p_s$  soit libre ou non, le nouvel angle issu de  $\hat{p}_s$  est libre. Si  $t \leq 1$ , on ajoute une R-requête à l'angle  $\hat{x}$  et autrement on laisse  $\hat{x}$  libre. Ainsi, si  $t \geq 1$ , l'angle  $\hat{p}_s$  est libre et si  $t \geq 2$  l'angle  $\hat{x}$  est libre.

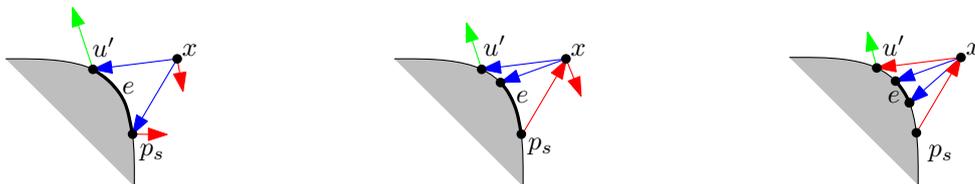


FIGURE 5.5 – Cas où il n'y a initialement qu'une seule G-requête (sur  $\hat{u}'$ ) et une R-requête sur l'angle associé à  $p_s$ . Les trois figures correspondent, de gauche à droite, aux cas où  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $t = 2$  respectivement.

**3.3) Si une G-requête est sur un angle externe  $\hat{u}'$  et une autre est sur un angle interne  $\hat{v}'$** , on note  $u' = p_1$  et  $v' = p_2$ . A l'étape initiale, l'arête  $p_2x$  a été ajoutée au graphe G. On pourra se référer à la Figure 5.6 pour voir comment le cas est traité.

Autour du sommet  $p_1$ , si  $t \leq 1$ , on assigne aux nouveaux angles issus de  $\hat{p}_1$  et  $\hat{x}$  une G-requête, et on ajoute l'arête  $xp_1$  dans B orienté de  $x$  vers  $p_1$ . Autrement (si  $t \geq 2$ ), on ajoute l'arête  $p_1x$  au graphe G, et on laisse les nouveaux angles  $\hat{p}_1$  et  $\hat{x}$  libres.

Autour du sommet  $p_s$ , si  $t = 0$  (et donc si  $\hat{p}_s$  a une R-requête), on ajoute  $xp_s$  au graphe B orienté de  $x$  vers  $p_s$ , et le nouvel angle issu de  $\hat{p}_s$  hérite de la R-requête de  $p_s$ . Autrement (si  $t \geq 1$ ), si  $\hat{p}_s$  a une R-requête, on ajoute  $xp_s$  au graphe R et on l'oriente de  $p_s$  vers  $x$ .

Dans tous les cas, que  $\hat{p}_s$  ait une R-requête ou non, on laisse le nouvel angle issu de  $\hat{p}_s$  libre.

Ainsi, si  $t \geq 1$ , le nouvel angle issu de  $\hat{p}_s$  est libre et si  $t \geq 2$ , les deux nouveaux angles issus de  $\hat{p}_1$  et  $\hat{x}$  sont libres.

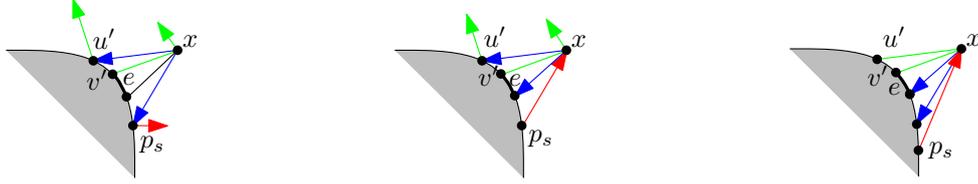


FIGURE 5.6 – Cas où une G-requête est sur un angle externe et une autre sur un angle interne et où l'angle  $\hat{p}_s$  a une R-requête. Les trois figures correspondent, de gauche à droite, aux cas où  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $t = 2$  respectivement.

**3.4) Si les deux G-requêtes  $\hat{u}'$  et  $\hat{v}'$  sont sur des angles internes.** A l'étape initiale, les arêtes  $v'x$  et  $u'x$  ont donc été ajoutées au graphe G. On laisse alors l'angle  $\hat{x}$  libres. On utilise alors les arêtes correspondantes à  $\max\{0, 2 - t\}$  des angles externes non-libres pour ajouter les arêtes sortantes de  $x$  au graphe B. Les autres angles externes restants satisfont à leurs R-requêtes s'ils en ont une puis sont laissés libres. Dans tous les cas, que ces angles aient eu une R-requête ou non, il y a  $1 + \min\{2, t\}$  angles libres parmi les nouveaux angles issus de  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}_1$  et  $\hat{p}_s$ .

Finalement, par la définition d'empilement d'un sommet, l'unique chemin du voisinage de  $x$  est distinct de  $(u', v')$  et donc tous les cas ont été traités.

### 5.3.4 Réorienter B

Étant donnée une orientation partielle O de T, on définit la demande d'un sommet  $v$  par  $\text{dem}_O(v) = -\delta_O^+(v) \pmod 3$ , où  $\delta_O^+(v)$  correspond au degré sortant de  $v$  par rapport à O. Notre but est de trouver une orientation de T telle que toutes les demandes des sommets valent 0.

Rappelons qu'on ne modifiera pas l'orientation des arêtes du graphe R, ce qui garantira que pour tous les sommets de  $V(T)$  à l'exception des sommets internes du chemin G ont degré sortant non nul. De plus, toutes les arêtes de G seront orientées dans une même direction, ce qui implique en particulier que tout sommet interne de G a degré sortant au moins 1. Ainsi tous les sommets de  $V(T)$  ont degré sortant au moins 1. On supposera pour le moment que tous les angles de G sont orientés de  $u$  vers  $v$ .

On ordonne linéairement les sommets de  $V(T) \setminus V(I) = (v_1, \dots, v_l)$  de telle manière à ce que, par rapport à B, tout sommet  $v_i$  ait ses deux voisins sortants dans le graphe B parmi  $V(I) \cup \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . On note par  $B_i$  le sous-graphe de B induit par les arcs sortants de  $v_1, \dots, v_i$ . On traite les sommets de  $V(T) \setminus V(I)$  du dernier au premier élément relativement à l'ordre choisi ci-dessus. Pour tout sommet  $v_i$ , on réoriente (si nécessaire) les arcs initialement sortants de  $v_i$  du graphe B de manière à avoir  $\text{dem}_{G \cup R \cup B_i}(v_i) = 0$  (i.e.  $\delta_{G \cup R \cup B_i}^+(v_i) \equiv 0 \pmod 3$ ) pour tout sommet  $v_j$ ,  $j \geq 1$ . Comme ces B-arcs sont orientés en direction des sommets de I ou en direction de l'un de leurs prédécesseurs, la demande des

sommets  $v_j$  pour  $j > i$  n'est pas modifié par cette réorientation. Comme  $v_i$  a toujours au moins deux arcs sortants dans le graphe  $B$ , cette réorientation est toujours possible.

### 5.3.5 Orienter $G$ et $I$

Notons par  $O$  l'orientation partielle de  $T$  obtenue après 5.3.4. On oriente le chemin  $G$  et l'arête  $e^* = uv$  (toutes les arêtes du chemin doivent être orientées dans la même direction) de manière à ce que l'orientation partielle  $O'$  en résultant vérifie  $\text{dem}_{O'}(v) \equiv 1 \pmod{3}$ . Notons par  $\Delta$  le seul triangle de  $I$  contenant  $v$  et on rappelle que  $D = I \setminus e^*$ . Comme  $D$  est un graphe planaire externe maximal avec seulement deux sommets de degré 2,  $D$  peut être épluché en enlevant un par un les sommets de degré 2 jusqu'à n'obtenir que le triangle  $\Delta$ . Quand un sommet  $x$  est enlevé, on oriente ses deux arêtes incidentes de manière à avoir  $\text{dem}_{O'}(x) = 0$ . On obtient alors une orientation partielle  $O''$ , telle que tous les sommets, sauf éventuellement ceux de  $\Delta$ , ont degré sortant divisible par 3.

Notons que le nombre d'arêtes de  $T$  est divisible par 3 par application de la formule d'Euler. Ainsi le nombre d'arêtes de  $T \setminus \Delta$  est aussi divisible par 3 car  $\Delta$  a trois arêtes. Si on note par  $d$  le nombre d'arêtes de  $O'$  qui sont des arêtes sortantes de sommets de  $\Delta$ . Comme  $m' = m - 3 - d$  peut s'écrire comme la somme des degrés sortant des sommets de  $V(T) \setminus V(\Delta)$  et que ces sommets ont un degré sortant divisible par 3 alors  $m'$  est divisible par 3 et donc  $d = m - 3 + m'$  est divisible par 3 et donc la somme des demandes de  $\Delta$  est divisible par 3. Notons que  $\text{dem}_{O'}(v) = \text{dem}_{O''}(v) = 1$ . Ainsi les demandes des autres sommets de degré 2 de  $\Delta$  sont soit  $(1 \pmod{3})$  pour tous les deux sommets, soit  $(0 \pmod{3})$  pour l'un des sommets et  $(2 \pmod{3})$  pour l'autre. Dans tous les cas les arêtes de  $\Delta$  peuvent être orientées pour satisfaire les trois demandes.



---

## Conclusion

Nous avons étudié, tout au long du Chapitre 3, certaines conditions suffisantes pour qu'un graphe admette un mineur  $K_t$ . Nous résumons ici ces résultats et les questions ouvertes qui en découlent.

- Le Théorème 3.4 affirme que tout graphe sans mineur  $K_t$  pour  $t \leq 7$  contient une arête qui appartient à au plus  $t - 3$  triangles et que cette arête est incidente à un sommet de petit degré. Ce théorème généralise un résultat de Nevo pour le cas  $t = 6$  et l'étend pour le cas  $t = 7$ .
- Les Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7 étendent différents aspects du Théorème 3.4 au cas supérieur ( $t = 8$ ). En effet, le Théorème 3.4 ne peut être étendu directement au cas  $t = 8$  car certains contre-exemples construits à partir de copies de  $K_{2,2,2,2,2}$  apparaissent, et seuls certains aspects de ce théorème peuvent être généralisés.

Pour le cas  $t = 9$ , nous avons proposé les Conjectures 3.48, 3.49 et 3.50 comme une possible extension des résultats obtenus dans le cas  $t = 8$ . La preuve du cas  $t = 8$  fait intervenir une étude exhaustive des voisinages d'un sommet de petit degré dans un contre-exemple minimal au théorème. Cette étude exhaustive a été effectuée par ordinateur et il n'est pas clair qu'une telle étude puisse être réalisée dans le cas  $t = 9$  dû à l'explosion du nombre de voisinages possibles. Il serait aussi intéressant, pour les cas  $t = 7$  et  $t = 8$ , de trouver une preuve n'utilisant pas cette étude exhaustive des voisinages. Pour les petit cas, la seule possibilité, pour le moment, reste d'utiliser les théorèmes de caractérisation des graphes sans mineur  $K_t$  (pour  $t \leq 5$ ). L'existence d'un théorème de caractérisation pour les graphes sans mineur  $K_t$  pour  $t \geq 6$  étant un problème ouvert très difficile, il serait intéressant de trouver une preuve structurelle sans énumération des voisinages pour ces théorèmes.

Du côté des matroïdes, le Théorème 3.8 montre que l'on peut généraliser les résultats sur les graphes aux matroïdes. Néanmoins le problème se révèle bien plus ardu que dans le cas des graphes. Nous avons posé la question de savoir si tout matroïde dont les éléments appartiennent à  $t$  triangles contient nécessairement un mineur parmi une liste finie (cf. Question 3.51). Répondre à cette question serait une avancée considérable sur ce problème même si l'on se réduit au cas des matroïdes graphiques. Dans les cas où  $t$

est petit, il serait intéressant de trouver un analogue au Théorème 3.8. La question est ouverte pour  $t \geq 4$  mais même dans le cas où  $t = 4$ , nous n'avons pour le moment pas d'idée sur ce que pourrait être une liste complète de mineurs interdits.

Notons que dans le cas du Théorème 3.8, la preuve utilise un théorème de caractérisation des matroïdes binaires sans mineur  $F_7$  dû à Seymour. Il serait intéressant de trouver une preuve ne faisant pas appel à ce théorème. En effet il est peu probable que de tels théorèmes se généralisent aisément. Trouver une preuve de ce théorème sans utiliser le théorème de Seymour permettrait peut-être de généraliser ces théorèmes aux cas supérieurs.

Dans le Chapitre 4, nous avons vu plusieurs applications des théorèmes précédents à plusieurs domaines en théorie des graphes. En particulier, nous avons montré que les graphes sans mineurs  $K_7$  étaient génériquement sans 5-stress et que les graphes sans mineur  $K_8$  et  $K_{2,2,2,2,2}$  étaient génériquement sans 6-stress. Comme un graphe génériquement sans  $d$ -stress a au plus  $dn - \binom{d+1}{2}$  arêtes, il serait intéressant de trouver une preuve de ce fait sans utiliser le théorème de Mader. En effet, on pourrait alors déduire le théorème de Mader du fait que  $G$  est génériquement sans  $d$ -stress.

Une seconde application considère la coloration des graphes sans mineur  $K_t$ . On prouve notamment que les graphes sans mineur  $K_7$  sont 8-coloriable et que les graphes sans mineur  $K_8$  sont 10-coloriable. On montre aussi par des techniques différentes que les graphes sans mineur  $K_7^-$  sont 7-coloriable. L'idée principale utilisée dans les preuves consiste à étudier le voisinage des sommets de petits degrés dans un contre-exemple minimal et à les utiliser pour construire le mineur approprié. Il serait intéressant de prouver d'autres résultats intermédiaires entre ceux-ci et la conjecture d'Hadwiger. On rappelle que la conjecture d'Hadwiger affirme dans ce cas, que les graphes sans mineur  $K_7$  (resp.  $K_8$ ) sont 6-coloriable (resp. 7-coloriable). Prouver que les graphes sans mineur  $K_7$  sont 7-coloriable ou que les graphes sans mineur  $K_7^-$  sont 6-coloriable serait une avancée considérable vers une preuve de la conjecture d'Hadwiger dans le cas des graphes sans mineur  $K_7$ . La principale difficulté rencontrée lorsque l'on essaye d'étendre les preuves des Théorèmes 4.14 et 4.15 (affirmant que tout graphe sans mineur  $K_7$  est 8-coloriable et que tout graphe sans mineur  $K_7^-$  est 7-coloriable respectivement) pour prouver par exemple que les graphes sans  $K_7^-$  sont 6-coloriable, vient du fait que certains voisinages ne sont pas assez denses. Par exemple, un graphe critiquement 7-chromatique sans mineur  $K_7$  peut contenir un sommet de degré 9 dont les voisinages sont l'union disjointe de trois triangles. Un tel voisinage ne contient pas alors de stables de taille 4 et vérifie donc le Lemme 4.16. De plus, un tel voisinage n'est pas assez dense pour permettre la construction d'un mineur  $K_7$  facilement.

Le théorème de Mader implique, en particulier, que les graphes sans mineur  $K_6$  (resp.  $K_7$ ) sont 6-dégénérés (resp. 9-dégénérés). Une question importante est de savoir si cette borne sur la dégénérescence est optimale. Barát, Joret et Wood [9] ont posé la question de savoir si les graphes sans mineur  $K_6$  étaient 6-dégénérés. La question se pose aussi pour les graphes sans mineur  $K_d$  pour  $d$  petit : est-ce que les graphes sans mineur  $K_d$  sont  $d$ -dégénérés ? Asymptotiquement, c'est affirmation est fautive car les graphes sans mineur  $K_d$  pour  $d$  grand ont degré minimum  $cd\sqrt{\log d}$  où  $c$  est une constante par le résultat de Kostochka et Thomassen. Néanmoins montrer de telles propriétés pour  $d$  petit

aurait des conséquences importantes sur la plupart des propriétés des graphes sans mineur  $K_d$  étudiés dans cette thèse, et en particulier sur la conjecture d'Hadwiger. De la même manière, montrer des résultats intermédiaires tels que montrer que les graphes sans mineur  $K_7$  sont 8-dégénérés simplifierait grandement la preuve du Théorème 3.4 par exemple.

Nous avons aussi étudié la conjecture d'Hadwiger doublement critique introduite par Kawarabayashi, Pedersen et Toft. En particulier, nous avons prouvé que tout graphe 8-chromatique doublement critique contient un mineur  $K_8$ . Comme tout élément d'un graphe  $k$ -chromatique doublement critique appartient à  $k-2$  triangles, une réponse positive à la Question 3.51 dans le cas des matroïdes graphiques serait un premier pas vers la conjecture en bornant par un nombre fini le nombre d'obstructions à cette conjecture. De la même manière, une réponse positive à la Conjecture 3.49 impliquerait cette conjecture dans le cas des graphes 9-chromatiques doublement critique.

Enfin nous avons donné une borne serrée sur le nombre total de triangles que peut contenir un graphe sans mineur  $K_k$ , pour  $k \leq 7$ , en fonction de son nombre d'arêtes. Il serait intéressant d'étudier ce problème pour les valeurs de  $k$  plus grandes, voire de donner une valeur asymptotique de cette quantité. Pour le cas  $k = 8$ , on peut seulement fournir une borne pour les graphes sans mineur  $K_8$  ou  $K_{2,2,2,2,2}$  en utilisant le Théorème 3.7.

Dans le Chapitre 5, nous avons vu que toute triangulation d'une surface de caractéristique supérieure à 2 admet une orientation telle que le degré sortant de chaque sommet est au moins 3 et est divisible par 3. Ceci répond à une conjecture de Bárat et Thomassen et constitue un premier pas vers une généralisation des bois de Schnyder pour les surfaces de genre supérieur ou égal à 2.





---

## Bibliographie

- [1] B. Albar. Coloration of  $K_7^-$ -minor free graphs. *preprint, arXiv :1402.2806*, 2014.
- [2] B. Albar and D. Gonçalves. Triangles in  $K_d$ -minor free graphs. *preprint, arXiv :1304.5468*, 2013.
- [3] B. Albar, D. Gonçalves, and K. Knauer. Orienting triangulations. *preprint*, 2014.
- [4] B. Albar, D. Gonçalves, and J. Ramírez-Alfonsín. Detecting minors in matroids through triangles. *preprint*, 2014.
- [5] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. part i. discharging. *Illinois J. Math.*, 21 :429–490, 1977.
- [6] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Über eine klassifikation der streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 88 :133–143, 1943.
- [7] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable. part ii. reducibility. *Illinois J. Math.*, 21 :491–567, 1977.
- [8] L. Asimov and B. Roth. The rigidity of graphs : part II. *J. Math. Anal. Appl.*, 68 :171–190, 1979.
- [9] J. Barát, G. Joret, and D.R. Wood. Disproof of the list hadwiger conjecture. *Electron. J. Combin.*, 18(1) :232, 2011.
- [10] J. Barát and C. Thomassen. Claw-decompositions and Tutte-orientations. *J. Graph Theory*, 52(2) :135–146, 2006.
- [11] R. E. Bixby. On reid's characterization of the ternary matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, 2 :174–204, 1979.
- [12] T.H. Brylawsky. A combinatorial model for series-parallel networks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154 :1–22, 1971.

- [13] L. Castelli-Aleari, E. Fusy, and T. Lewiner. Schnyder woods for higher genus triangulated surfaces, with applications to encoding. *Discrete & Computational Geometry*, 42(3) :489–516, 2009.
- [14] A. L. Cauchy. Sur les polygones et les polyèdres. *Second Memoire, I. Ecole Polytechnique*, 1813.
- [15] G. Chartrand and F. Harary. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930.
- [16] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, 3(4) :433–438, 1967.
- [17] G. Chen, R. J. Gould, K. Kawarabayashi, F. Pfender, and B. Wei. Graph minors and linkages. *J. Graph Theory*, 49 :75–91, 2005.
- [18] J. Chen and A. Kanevsky. On assembly of four-connected graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 657 :158–169, 1993.
- [19] M. Chudnovsky, B. Reed, and P. Seymour. The edge-density for  $K_{2,t}$  minors. *J. Combin. Theory Ser. B*, 101(1) :18–46, 2011.
- [20] Y. Colin de Verdière. Constructions de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 20 :599–615, 1987.
- [21] Y. Colin de Verdière. Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité. *J. Combin. Theory Ser. B*, 50 :11–21, 1990.
- [22] R. Diestel. *Graph Theory (3ème ed.)*. Springer, 2005.
- [23] G. Ding. A characterization of graphs with no octahedron minor. *Journal of Graph Theory*, 74(2) :143–162, 2013.
- [24] G.A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.*, 27 :85–92, 1952.
- [25] P. Erdős. Problem 2. *In Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, page 361, 1968.
- [26] R. Fabila-Monroy and D. R. Wood. Rooted  $K_4$  Minors. *preprint, arXiv :1102.3760*, 2011.
- [27] J. C. Fournier. A characterization of binary geometries by a double elimination axiom. *J. Combin. Th. Ser. B*, 31 :249–250, 1981.
- [28] S. Földes and P. L. Hammer. On split graphs and some related questions. *Problèmes Combinatoires et Théorie Des Graphes, Colloques internationaux C.N.R.S.*, 260 :138–140, 1976.
- [29] A. Gagarin, W. Myrvold, and J. Chambers. Forbidden minors and subdivisions for toroidal graphs with no  $K_{3,3}$ 's. *Elec. Notes Discrete Math.*, 22 :151–156, 2005.

- [30] H. H. Glover, J. P. Huneke, and C. S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27 :332–370, 1979.
- [31] H. Gluck. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. *Geometric topology. Lecture Notes in Math.*, 438 :225–239, 1975.
- [32] D. Hall. A note on primitive skew curves. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 :935 – 936, 1943.
- [33] I.T. Jakobsen. A homomorphism theorem with an application to the conjecture of Hadwiger. *Studia Sci. Math. Hung.*, 6 :151–160, 1971.
- [34] I.T. Jakobsen. On certain homomorphism properties of graphs ii. *Math. Scand*, 52 :229–261, 1983.
- [35] D.L. Vertigan G.P. Whittle J.F. Geelen, J.G. Oxley. On the excluded minors for quaternary matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, 80(1) :57–68, 2000.
- [36] H. A. Jung. Eine verallgemeinerung des n-fachen zusammenhangs fur graphen. *Math. Ann.*, 187 :95–103, 1970.
- [37] L. K. Jørgensen. Contractions to  $K_8$ . *J. Graph Theory*, 18 :431–448, 1994.
- [38] L. K. Jørgensen. Vertex partitions of  $K_{4,4}$ -minor free graphs. *Graphs and Combinatorics*, 17(2) :265–274, 2001.
- [39] K. Kawarabayashi and L. K. Jørgensen. Extremal results for rooted minor problems. *J. Graph Theory*, 55(1) :191–207, 2007.
- [40] K. Kawarabayashi, A. S. Pedersen, and B. Toft. Double-critical graphs and complete minors. *Electron. J. Combin.*, 17(1) :Research Paper 87, 27 pp., 2010.
- [41] K. Kawarabayashi and B. Toft. Any 7-chromatic graphs has  $K_7$  or  $K_{4,4}$  as a minor. *Combinatorica*, 25(3) :327–353, 2005.
- [42] A. Kotlov, L. Lovász, and S. Vempala. The Colin de Verdière number and sphere representations of a graph. *Combinatorica*, 17 :483–521, 1997.
- [43] J.B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi’s conjecture. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 95 :210–225, 1960.
- [44] T. Lazarson. The representation problem for independence functions. *J. London Math. Soc.*, 33 :21–25, 1958.
- [45] L. Lovász. Graph Minor Theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43(1) :75–86, 2006.
- [46] L. Lovász and A. Schrijver. A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126 :1275–1285, 1998.
- [47] W. Mader. Homomorphiesätze für Graphen. *Math. Ann.*, 178 :154–168, 1968.

- [48] W. Mader. Uber trennende Eckenmengen in homomorphiekritischen graphen. *Math. Annalen*, 175 :243–252, 1968.
- [49] J. Maharry. A characterization of graphs with no cube minor. *J. Combin. Theory Ser. B*, 80(2) :179–201, 2000.
- [50] J. C. Maxwell. On Reciprocal Diagrams and Diagrams of Forces. *Phil. Msg. Series* 27, 4 :250–261, 1864.
- [51] K. Menger. Zur allgemeinen kurventheorie. *Fund. Math.*, 10 :96–115, 1927.
- [52] B. Mohar and C. Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.
- [53] E. Nevo. Embeddability and Stresses of graphs. *Combinatorica*, 27 :465–472, 2007.
- [54] J. G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [55] J.G. Oxley. A characterization of the ternary matroids with no  $M(K_4)$ -minor. *J. Combin. Theory Ser. B*, 42(2) :212–249, 1987.
- [56] A. S. Pedersen. Complete and almost complete minors in double-critical 8-chromatic graphs. *Electron. J. Combin.*, 18(1) :Research Paper 80, 17 pp., 2011.
- [57] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph Minors. IX. Disjoint crossed paths. *J. Combin. Theory Ser. B*, 49(1) :40–77, 1990.
- [58] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph Minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 48(2) :255–288, 1990.
- [59] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph Minors. XX. Wagner’s conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 92(2) :325–357, 2004.
- [60] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Hadwiger conjecture for  $k_6$ -free graphs. *Combinatorica*, 13 :279–361, 1993.
- [61] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Kuratowski Chain. *J. Combin. Theory Ser. B*, 64(2) :127–154, 1995.
- [62] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Pertersen Family Minors. *J. Combin. Theory Ser. B*, 64(2) :155–184, 1995.
- [63] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Sachs’ linkless embedding conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 64(2) :185–227, 1995.
- [64] D. Rolfsen. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing, 2003.
- [65] W. Schnyder. Planar graphs and poset dimension. *Order*, 5(4) :323–343, 1989.
- [66] P.D. Seymour. Decomposition of regular matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, 28 :305–359, 1980.

- [67] P.D. Seymour. Minors of 3-connected matroids. *European J. Combin.*, 6 :375–382, 1985.
- [68] Z. Song. The extremal function for  $K_8^-$  minors. *J. Combin. Theory Ser. B*, 95(2) :300–317, 2005.
- [69] Z. Song and R. Thomas. The extremal function for  $K_9$  minors. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96 :240–252, 2006.
- [70] M. Stiebitz.  $K_5$  is the only double-critical 5-chromatic graph. *Discrete Mathematics*, 64(1) :91–93, 1987.
- [71] R. Thomas. Recent excluded minor theorems for graphs. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 267 :201–222, 1999.
- [72] R. Thomas and P. Wollan. An improved linear edge bound for graph linkages. *European J. Combin.*, 26 :309–324, 2005.
- [73] A. Thomason. An extremal function for contractions of graphs. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 95 :261–265, 1984.
- [74] C. Thomassen. The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 99 :116–130, 1992.
- [75] W. T. Tutte. A homotopy theorem for matroids. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88 :144–174, 1958.
- [76] W. T. Tutte. A theory of 3-connected graphs. *Indagationes Mathematicae*, 23 :441–455, 1961.
- [77] W. T. Tutte. Menger’s theorem for matroids. *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics*, 69B :49–53, 1965.
- [78] H. van der Holst, M. Laurent, and A. Schrijver. On a Minor-Monotone Graph Invariant. *J. Combin. Theory Ser. B*, 65(2) :291–304, 1995.
- [79] H. van der Holst, L. Lovász, and A. Schrijver. The Colin de Verdière graph parameter. *Graph Theory and Combinatorial Biology, Bolyai Soc. Math. Stud.*, 7 :29–85, 1999.
- [80] K. Wagner. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Math. Ann.*, 114 :570–590, 1937.
- [81] W. Whiteley. Infinitesimally rigid polyhedra. i. Statics of frameworks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 285 :431–465, 1984.
- [82] D. R. Wood and S. Linusson. Thomassen’s Choosability Argument Revisited. *SIAM J. Discrete Math.*, 24(4) :1632–1637, 2010.



**A**

---

## **Annexes**

## A.1 Génération de graphes avec Sage

### A.1.1 Recherche d'un mineur de graphe complet

Le code suivant est basé sur le code original de Sage pour trouver un mineur dans un graphe en utilisant la programmation linéaire. Il à été optimisé afin d'utiliser les symétries du graphe complet afin de réduire considérablement le temps de recherche d'un tel graphe.

---

```
1  ##### an optimized version of minor function for cliques #####
2
3  def S(l):
4      if (l[0] < l[1]):
5          return (l[0],l[1]);
6      else:
7          return (l[1],l[0]);
8
9  def clique_minor(G, H, solver=None, verbose=0):
10
11     from sage.numerical.mip import MixedIntegerLinearProgram,
12         MIPSolverException, Sum
13     from sage.rings.integer import Integer;
14     p = MixedIntegerLinearProgram(solver=solver)
15
16     # rs = Representative set of a vertex
17     # for h in H, v in G is such that rs[h][v] == 1 if and only if v
18     # is a representant of h in G
19     rs = p.new_variable(dim=2)
20
21     for v in G:
22         p.add_constraint(Sum([rs[h][v] for h in H]), max = 1)
23
24     # This part represent the optimisation added to this function.
25     # Since the complete graph is symmetric, we can explore only
26     # half the graph. Thus, we can avoid having i as a representative
27     # of h if i < h.
28     for h in H:
29         for i in range(0,h):
30             p.add_constraint(rs[h][i] == 0)
31
32     # We ensure that the set of representatives of a
33     # vertex h contains a tree, and thus is connected
34
35     # edges represents the edges of the tree
36     edges = p.new_variable(dim = 2)
37
38     # there can be a edge for h between two vertices
39     # only if those vertices represent h
40     for u,v in G.edges(labels=None):
```

```

40     for h in H:
41         p.add_constraint(edges[h][S((u,v))] - rs[h][u], max = 0
42             )
43         p.add_constraint(edges[h][S((u,v))] - rs[h][v], max = 0
44             )
45     # The number of edges of the tree in h is exactly the cardinal
46     # of its representative set minus 1
47     for h in H:
48         p.add_constraint(Sum([edges[h][S(e)] for e in G.edges(labels
49             =None)])-Sum([rs[h][v] for v in G]), min=-1, max=-1)
50     # a tree has no cycle
51     epsilon = 1/(5*Integer(G.order()))
52     r_edges = p.new_variable(dim=2)
53
54     for h in H:
55         for u,v in G.edges(labels=None):
56             p.add_constraint(r_edges[h][(u,v)] + r_edges[h][(v,u)] -
57                 edges[h][S((u,v))], min = 0)
58
59         for v in G:
60             p.add_constraint(Sum([r_edges[h][(u,v)] for u in G.
61                 neighbors(v)]), max = 1-epsilon)
62     # Once the representative sets are described, we must ensure
63     # there are arcs corresponding to those of H between them
64     h_edges = p.new_variable(dim=2)
65
66     for h1, h2 in H.edges(labels=None):
67
68         for v1, v2 in G.edges(labels=None):
69
70             p.add_constraint(h_edges[(h1,h2)][S((v1,v2))] - rs[h2][
71                 v2], max = 0)
72             p.add_constraint(h_edges[(h1,h2)][S((v1,v2))] - rs[h1][
73                 v1], max = 0)
74
75             p.add_constraint(h_edges[(h2,h1)][S((v1,v2))] - rs[h1][
76                 v2], max = 0)
77             p.add_constraint(h_edges[(h2,h1)][S((v1,v2))] - rs[h2][
78                 v1], max = 0)
79
80     p.add_constraint(Sum([h_edges[(h1,h2)][S(e)] + h_edges[(h2,
81         h1)][S(e)] for e in G.edges(labels=None)]), min = 1)
82
83     p.set_binary(rs)

```

```

78     p.set_binary(edges)
79
80     p.set_objective(None)
81
82     try:
83         p.solve(log=verbose)
84     except MIPSolverException:
85         raise ValueError("This_graph_has_no_minor_isomorphic_to_H!")
86
87     rs = p.get_values(rs)
88
89     rs_dict = {}
90     for h in H:
91         rs_dict[h] = [v for v in G if rs[h][v]==1]
92
93     return rs_dict

```

---

### A.1.2 Génération des graphes excluant un certain mineur

Le code ci-dessous permet de générer les graphes à  $n$  sommets et un certain nombre d'arêtes ne contenant pas un certain mineur de graphe complet (la borne inférieure sur le nombre d'arêtes est déterminée par le degré minimum du graphe et le nombre d'arête maximal est déterminé par le théorème de Mader). Dans ce cas le script génère les graphes connexes, de degré minimal au moins 6 avec 11 sommets et entre 33 et 40 arêtes, et ne contenant pas  $K_7$  comme mineur.

---

```

1  from sage.all import *
2  load cliquemino1trd.spyx
3
4  ### Find K7 minor free graphs with degree minimum 6 and size at most
5  11 ###
6  graphlist=list(graphs.nauty_geng("11_33:40_c_d6"))
7  K7 = graphs.CompleteGraph(7);
8  filterlist = []
9  prefilter = []
10
11 ## Check for K7 minors
12 @parallel(8)
13 def filter_K7(i):
14     try:
15         clique_minor(graphlist[i], K7);
16     except ValueError as e:
17         if e.message == "This_graph_has_no_minor_isomorphic_to_H!":
18             print "This_graph_doesn't_contain_a_K7_minor";
19             return 0;
20     print "This_graph_contain_a_K7_minor"

```

```

21     return 1;
22
23     prefilter = list(filter_K7(range(0, len(graphlist))))
24
25     ## Creating the filterlist
26     for position, i in prefilter:
27         if(i == 0):
28             filterlist.append(graphlist[position[0][0]])
29
30     ## Save the filtered list
31     save(filterlist, 'nominor113340.sobj');

```

---

### A.1.3 Recherche de la taille maximale d'une séparation

Le code suivant permet de tester si, pour tout graphe créé à l'étape précédente, ajouter un sommet dominant et une composante accrochée à 6 sommets induit un mineur de graphe complet  $K_7$ . Pour cela, on ajoute un sommet adjacent à tous les sommets du graphe et on ajoute un sommet adjacent à toutes les combinaisons de 6 sommets du graphe de départ.

```

1  load ../SageFiles/cliqueminor1trd.spyx
2  numtri = 5
3  KG = graphs.CompleteGraph(numtri + 2);
4  graphlist = load('../SageFiles/nominor5/nominor113340.sobj')
5
6  for position, G in enumerate(graphlist):
7      for i in combinations(G.vertices(), numtri + 1):
8          H = G.copy();
9          for j in i:
10             H.add_edge([99, j]) # add an edge between the new vertex 99
11                and all the vertices of the component
12
13             for k in G.vertices():
14                 H.add_edge([98, k]) # add an edge between the vertex 98 and
15                    all the vertices of the graph H
16
17         try:
18             clique_minor(H, KG);
19         except ValueError as e:
20             if(e.message == "This_graph_has_no_minor_isomorphic_to_H_!"):
21                 print "This_graph_doesn't_contain_a_K7_minor_at_the_position"
22                   + str(position);
23                 print "The_separation_in_this_case_is";
24                 H1 = G.subgraph(i);
25                 print H1.num_edges();

```

---

### A.1.4 Recherche du nombre de triangles par arêtes

Le code suivant permet de tester si certains graphes ont des arêtes contenues dans  $t$  triangles.

---

```
1 load ../SageFiles/cliqueminor.spyx
2 numtri = 5
3 graphlist = load('../SageFiles/nominor5/nominor113340.sobj')
4
5 def numtriangles(G, e):
6     tri = 0;
7     for i in G.neighbors(e[0]):
8         if i in G.neighbors(e[1]):
9             tri = tri + 1;
10    return tri;
11
12 for position, G in enumerate(graphlist):
13     numverttri = 0;
14     for v in G.vertices():
15         numtriedge = 0;
16         for e in G.edges():
17             if((e[0] == v) or (e[1] == v)):
18                 if(numtriangles(G, e) < (numtri - 1)):
19                     break;
20                 else:
21                     numtriedge = numtriedge + 1;
22             if(numtriedge == G.degree(v)):
23                 numverttri = numverttri + 1;
24             break;
25     if(numverttri >= 2):
26         print "Found_a_graph_such_that_it_contains_too_much_vertices_
                with_neighbour_included_:" + str(position);
```

---

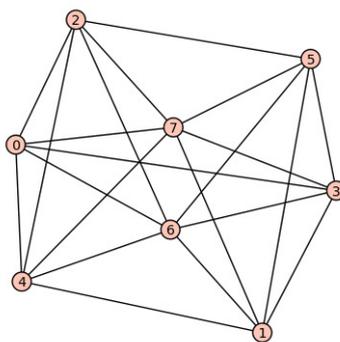
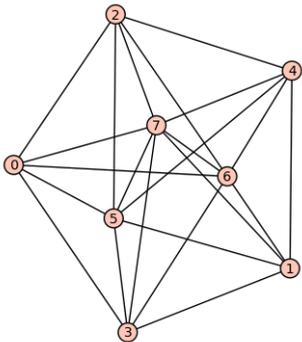
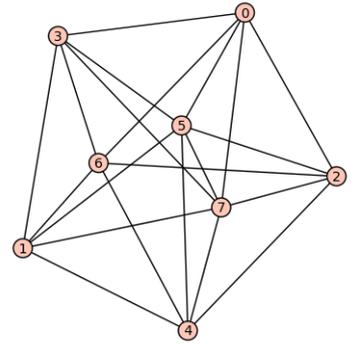
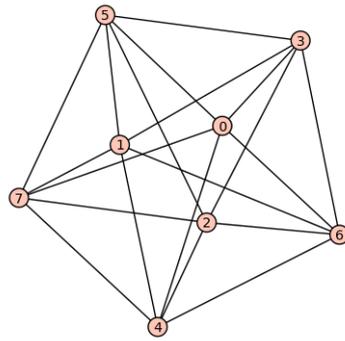
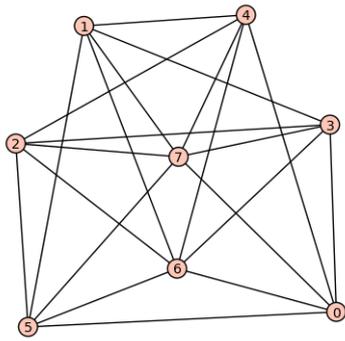
## A.2 Liste de graphes

Ces graphes ont été obtenus à partir du code donné dans l'annexe précédente. Les logiciels utilisés sont Sage 6.0 (<http://sagemath.org>) et nauty 24r2 (<http://cs.anu.edu.au/people/bdm/nauty/>). On pourra trouver la liste des graphes de taille au plus 11 et de degré minimum 6 sans mineur  $K_7$  à l'adresse suivante : <http://www2.lirmm.fr/~albar/triminors/index.html>.

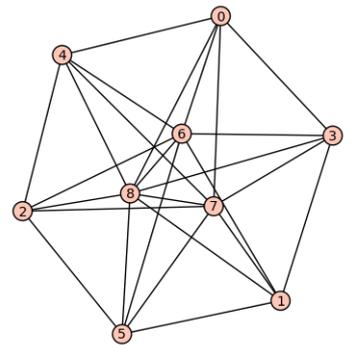
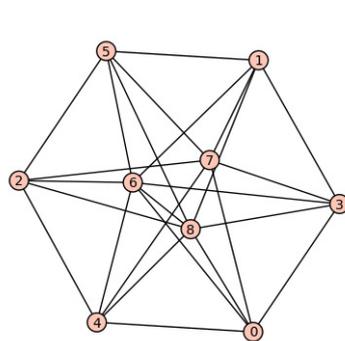
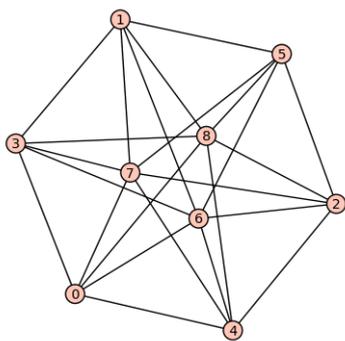
Dans la Sous-Section suivante, nous allons représenter la liste des graphes de taille 8 et 9 et de degré minimum 4 et sans mineur  $K_6$ .

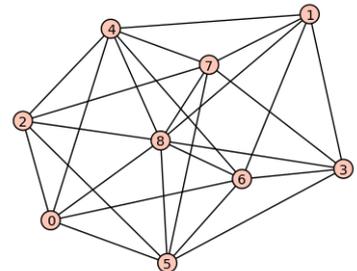
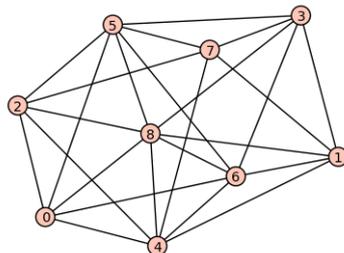
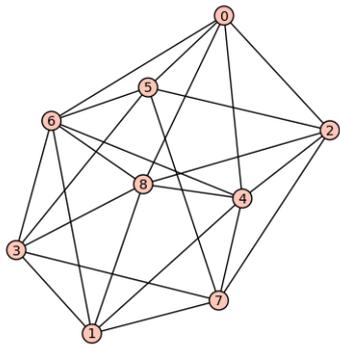
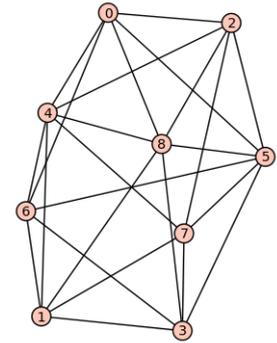
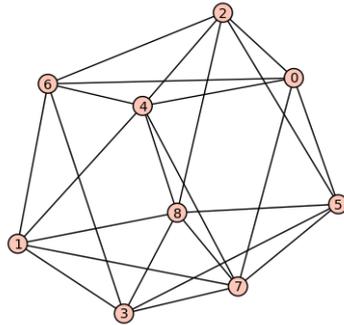
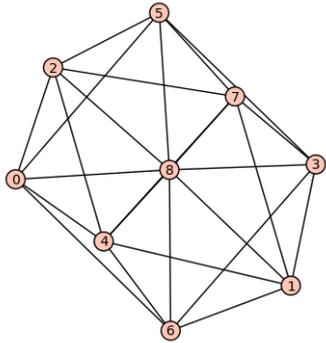
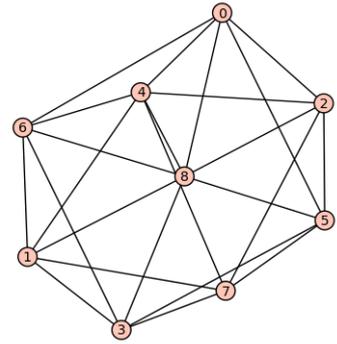
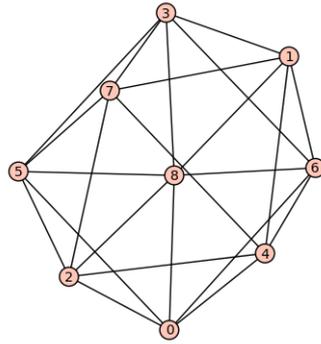
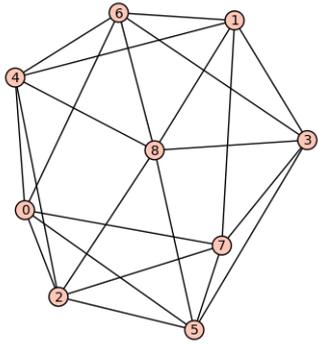
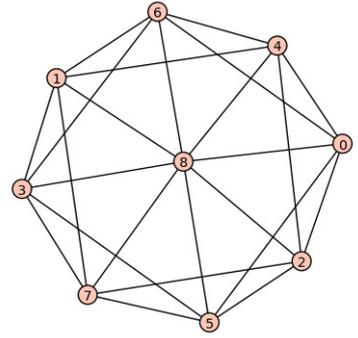
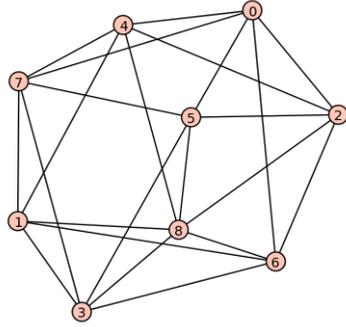
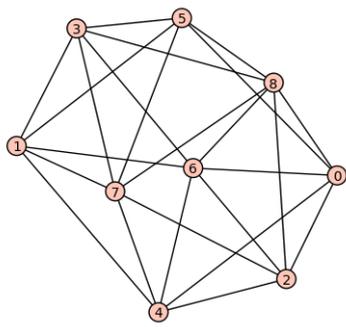
## A.2.1 Graphes de taille 8 et 9 de degré minimum 4 sans mineur $K_6$

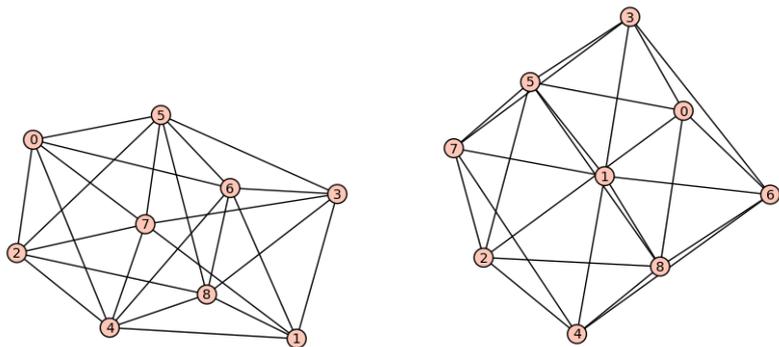
### A.2.1.1 Graphes de taille 8



### A.2.1.2 Graphes de taille 9







### A.3 Mineurs 3-connexe de $S(5, 6, 12)$

Dans cette partie, nous allons considérer les mineurs 3-connexes de  $S(5, 6, 12)$ . Le but est de montrer que tout mineur 3-connexe de  $S(5, 6, 12)$  contient un mineur  $P_7$  ou contient au moins deux éléments n'appartenant pas à au moins 2 triangles. On se réfèrera à (Table II, [55]) pour la liste complète des mineurs et nous suivrons les notations introduites par Oxley pour dénoter ces matroïdes. Il existe 12 matroïdes. Les matrices correspondantes à ces matroïdes peuvent être trouvées dans [55] ou [54]. Toutes les matrices considérées sont à coefficients dans  $GF(3)$ . Nous avons utilisé le logiciel Macek (<http://www.fi.muni.cz/hlineny/MACEK/>) afin de lister les circuits et de calculer les mineurs de ces matroïdes.

Premièrement, le matroïde  $P_7^*$  (dual de  $P_7$ ) donné par la matrice ci-dessous ne contient aucun triangle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sous Macek, cela revient à afficher tous les circuits de ce matroïde via la commande suivante.

---

```
!prcircuits;!dual P7
```

---

Le matroïde  $AG(2, 3) - p$  obtenu à partir du matroïde  $AG(2, 3)$  en supprimant un élément quelconque  $p$  contient un mineur  $P_7$ . En effet, il suffit de supprimer n'importe quel élément de ce matroïde pour obtenir un matroïde isomorphe à  $P_7$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le matroïde  $AG(2, 3)$  contient lui aussi un mineur  $P_7$ . On peut vérifier cette affirmation en utilisant Macek, avec la commande suivante.

Le matroïde dual  $(AG(2,3) - p)^*$  ne contient pas de triangles comme on peut le vérifier sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

De même le matroïde  $AG(2,3)^*$  ne contient pas non plus de triangles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le matroïde  $P_7^* + e_1$ , obtenu par 1-extension de  $P_7^*$  et donné par la matrice ci-dessous, contient un mineur  $P_7$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, contracter l'élément associé à la dernière colonne de cette matrice induit par exemple un matroïde isomorphe à  $P_7$ .

Comme les matroïdes  $P_7^* + e_1 + e_2$ ,  $P_7^* + e_1 + e_2 + e_3$  sont obtenus par 1-extensions successive de ce matroïde alors ils contiennent tous un mineur  $P_7$ .

Le matroïde  $(P_7^* + e_1 + e_2)^*$ , donné par la matrice ci-dessous, contient un mineur  $P_7$  obtenu par exemple en contractant les éléments associés aux deux dernières colonnes de cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme les matroïdes  $(P_7^* + e_1 + e_2)^* + f_1$  et  $(P_7^* + e_1 + e_2)^* + f_1 + f_2$  sont obtenus à partir de 1-extensions successives de ce matroïde, on en déduit qu'il contiennent aussi un mineur  $P_7$ .

Le matroïde  $((P_7^* + e_1 + e_2)^* + f_1 + f_2)^*$ , donné par la matrice ci-dessous, contient un mineur  $P_7$  obtenu par exemple en contractant les éléments des trois dernières colonnes

et en supprimant l'élément associé à la première colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme le matroïde  $S(5,6,12)$  est une 1-extension de ce matroïde, on en déduit que  $S(5,6,12)$  contient aussi un mineur  $P_7$ .